湖南师范学院数学函授專修科講义

代 數

（上 册）

湖南师范学院数学系編

湖 南 人 民 出 版 社

編号：(湘課)0077

代数（上册）

编　者：湖南师范学院数学系
出版者：湖南人民出版社
（湖南省书刊出版业营业許可証出字第一号）
长沙市新村路
印刷者：长沙印刷厂
长沙市府正亍
发行者：湖南省新华书店

开本：787×1092耗 1/32　　1958年10月第一版
印张：4 7/8　　1959年4月第2次印刷
字数：103,000　　印数：20,201—45,200

统一书号：K7109·176
定价：(2)二角六分

前言

自从党中央提出了社会主义建設的总路綫以后，在全国范圍內，不論工业和农业方面，都来了个大跃进，掀起了技术革命和文化革命的高潮，形势迫使文化教育事业也要来个大跃进。在我們省內，与全国各地一样，中等学校如雨后春笋，大批的建立起来了，新的师資需要大批的培养，光靠常設制的高等师范学校来担負这个任务是不行的，必須加强函授教育的工作。过去，在数学函授科的教学計划里，算术与初等代数是分开作两門課开設的，学生学完这两門課程，要讀完两本不薄的書，时間拖长到两年。显然，这是不符合多快好省的原則的。另一方面，根据形势的发展，工农文化水平突飞猛进的提高，作为一个中学教师，对高等代数中某些基本內容，象綫性方程組的理論等，似乎也应該掌握。根据这两个原則，我們大胆的破除迷信，解放思想，发揮了集体的力量，組織了一部分教师，集体編写出这个教本。

根据上面的原則，本書內容分为数的发展、綫性方程組、多項式、有理函数及无理函数、不等式这几部分。其中包括了算术課程中屬于数的概念的內容——自然数理論与分数理論，也就是最主要的与最基本的內容；初等代数課程的全部內容及高等代数課程中的基础部分——綫性方程組理論。根据我們的估計，函授生只要能保証学习时間，在一年內学完这本書是沒有問

題的。

除綫性方程組理論这一部分外，本書其它各部分教材基本上取材于格列本卡的"算术"与洛霍塞諾夫的"代数与初等函数"二書，但根据我們自己的意見作了重新的处理。并且考虑到函授生不能集中講授的特点，在編写时我們力求作到問題提的明晰，語句通俗。当然，这只是我們的主观愿望，有沒有达到目的是值得考虑的。

另外，我們覺得这样的編写还有下面的好处。首先，数的发展的系統性加强了，讀者讀完本書后，一定能对数的发展得到一个完整的概念。其次，由于在前面把有理数体、实数体和复数体都討論过了，在后面討論多項式时就有很大的方便。

由于时間的需要，本書分两册出版，在上册中包括数的发展一部分。

这是我們一个大胆的尝試，由于水平的限制，可能有很多地方都是不符合要求的。我們誠恳地希望每一位看过本書的同志，向我們提出宝貴的意見，使我們能够改正我們的缺点。

編　者　1958年9月1日

目　录

第一章　自然数与零……………………………………………………(1)
1　基数理論……………………………………………………………(2)
2　序数理論……………………………………………………………(14)
3　数“0”……………………………………………………………(25)
第二章　分　数……………………………………………………(26)
1　量……………………………………………………………(27)
2　用量引入分数……………………………………………………………(33)
3　小数……………………………………………………………(50)
第三章　有理数……………………………………………………(60)
1　有理数……………………………………………………………(60)
2　有理数大小的比較……………………………………………………………(62)
3　有理数的算术运算……………………………………………………………(66)
4　数环与数体……………………………………………………………(82)
5　运算的比較性質……………………………………………………………(83)
第四章　实数体……………………………………………………(85)
1　綫段的度量……………………………………………………………(85)
2　正实数……………………………………………………………(96)
3　負实数……………………………………………………………(98)
4　实数的比較……………………………………………………………(99)

5 实数集合的稠密性……………………………………………………(101)
6 用有理数趋近无理数…………………………………………………(103)
7 关于不减与不增序列的定理…………………………………………(104)
8 实数的算术运算………………………………………………………(110)
9 实数体…………………………………………………………………(120)
10 开方…………………………………………………………………(122)
11 中間数体……………………………………………………………(125)

第五章 复数体 ……………………………………………………………(127)

1 基本概念和定义………………………………………………………(127)
2 复数的几何表示………………………………………………………(133)
3 复数运算的几何解释，棣美弗公式…………………………………(139)

第一章 自然数与零

在中学数学課程中，自然数是基本的概念。在那里，我們不可能用其他已知概念来揭露它們的意义。那末，自然数概念是怎样产生的呢？

原始人沒有数的概念，而仅有数的感覚。所謂数的感覚，是指在一小組物件中，移去或加进某个物件，就能发現这中間已經有了变化的一种能力，也就是辨别多寡的能力（嬰孩会玩玩具的时候，就已开始具备这种能力）。到了游牧时代，人們的这种能力加强了；他們知道用在树上刻划或堆聚石子的方法来表示他們所养畜牧的多寡。这固然是一个重要的进步，但只能辨别多寡，并不是就有了数的概念。数的概念是由于数而产生的。人們的数的能力决定了数的概念的范圍。例如，未开化部落之一凱尼尼仅能按一只手的指头来数，因而他們仅有1到5五个自然数的概念；柏拉几尼的某些部落仅能按手指的关节来数，因而他們仅知道 1、2、3 这三个数，对于所有大于3的数，便沒有明确的概念，而只籠統地用“許多”这个字来表示。在人类历史的发展过程中，由于数的任务的复杂化，数的概念便逐漸发展起来。

要問自然数的意义是怎样的，只要看数是怎样一回事。我們对某一組物件进行数的結果，得到一个自然数，这个自然数一方面表示着被数过的物件共有“多少个”，另一方面表示着最后被数的物件是“第几个”或“那一个”。在人們的意識中，前者是“数量”的概念，后者是“次序”的概念。正由于自然数兼备着这二种

不同的意义，我們在建立自然数的理論时，就有二种不同的理論——基数理論和序数理論。

凡建立一种关于数的理論，我們要解决三个問題：第一，所討論的数的定义是怎样的？所謂某个概念的定义是指用先前已知的概念对这个概念的意义所作的表述。例如："三角形一边的中点和对角頂点的联綫叫做三角形在这一边上的中綫"，这就是三角形的中綫的定义。这里"三角形"，"三角形的边"，"綫段的中点"，"角"，"角的頂点"，"二点的联綫"都必須是先前已知的概念。如果对某个概念的意义所作的表述中，含有非先前已知的概念，那末，这样的表述不能說是这一概念的定义。当然，任何一种理論不能对每个概念都下定义，必定有一些概念是不可能下定义的，这样的概念叫做原始的或不定义的概念。数学科学的特点之一，就是在它的每一分支或每一理論中，不定义的概念只是极少数的几个。第二，怎样的数被認为相等的？在不等的数中，如果可能的話，还要規定大小的概念，从而討論关于数的大小比較的基本性質，也就是所謂順序律。第三，对每一种数，在实际运用中，經常要进行各种运算，那末运算的法則是怎样的？这就需要在数的理論中討論运算法則所依据的运算基本性質，也就是所謂运算律。

§1. 基数理論

1.集合的概念

集合是一个难以定义的概念，我們先举出一些例子：

1)一只手的手指的集合。

2)长沙市的居民的集合。

3)某周內，数学系党总支召开的会議的集合。

4)一杯水內分子的集合。

5)方程$x^2-5x-4=0$的根的集合。

6)直綫上的点的集合。

7)所有面积等于$12cm^2$的三角形的集合。

8)所有質数的集合。

从这些例子，我們可以指出：

①集合可以由任何东西組成。組成一个集合的东西叫做这个集合的元素。我們也說这样的东西屬于这个集合，或这个集合包含这样的东西。

②一个集合是由它的元素所唯一确定。如果对于任何一个东西，我們能通过某种法則，判定它是否屬于某个集合，至少在概念上可以这样判定，那么就認为这个集合是被确定了。例如对于例7，如果一个三角形的底为 6 cm，高为4 cm，我們按照三角形面积公式可算出它的面积等于 $12\ cm^2$，因此它是这个集合的元素；如果底为9 cm，高为3 cm，它便不屬于这个集合。又如对于例8，虽然一个数是否質数，有时很难断定，但質数与非質数的区别，在概念上非常明确，所以例 8 也是一个确定的集合的例子。但"所有很大的数"，不能确定为一个集合，因为怎样的数是很大的数，这里并沒有明确的規定。

③"集合"并不意味着它定要包含多少元素。即使单个元素(例如太阳)也可組成一个集合，甚至它可以不包含任何元素，这样的集合叫做空集合。例如$x^2+1=0$的实数根的集合就是空集合。

現在一般地用符号来表示：設

$\alpha,\beta,\gamma,\cdots\cdots$

代表任何东西，把这些东西看作一个整体，我們就說，有一个由元素$\alpha,\beta,\gamma,\cdots\cdots$所組成的集合M，而記如

$$M=\{\alpha,\beta,\gamma,\cdots\cdots\}$$

我們再来規定：

④如果集合A和集合B由同样的元素所組成，亦即，如果集合A的每一个元素都屬于B，而集合B的每一个元素也屬于A，我們就說集合A和B相等，而写成$A=B$。

⑤如果集合A的每一个元素都屬于集合B，則集合A叫做集合B的部分集合。如果集合A的每一个元素都屬于集合B，但集合B还包含着不屬于A的元素，則集合A叫做集合B的眞部分集合。

2.集合的等价、基数概念

这里还要采用一个不定义的概念："对应"。我們这样来描述它。假設給定了二个集合：

$$M=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\},\qquad N=\{\alpha',\beta',\gamma',\delta',\varepsilon'\}$$

我們把它們的元素如下地配置起来：

M	α	β	γ	δ	ε
N	α'	β'	γ'	δ'	ε'

亦即，M的每一个元素对应着N的一个且仅一个元素；反之，亦是如此，以这两个集合为例，我們有

定义1. 設給定两个集合M，N。若M的每一个元素，对应着N的一个且仅一个元素，同时N的每一个元素也对应着M的一个且仅一个元素，这样的对应叫做集合M，N間的一一对应。

定义2. 可以建立起一一对应的两个集合M和N叫做等价的（我們也說它們有相同的濃度，或說它們的濃度相等）。用符号M∽N来表示。

例如五边形的一切边的集合和它的一切頂点的集合是等价的，三角形的頂点的集合与四角形的頂点的集合不等价。

由以上定义，关于集合的等价关系，有下面三个基本性質：

①反射性：对于任何集合A，A∽A；

②对称性：如果A∽B，則B∽A；

③傳遞性：如果A∽B，B∽C，則A∽C。

定义2給出了"濃度相等"的定义，而沒有給出"濃度"的定义。一个集合的濃度是什么？我們可以說，它是指所有互相等价的集合共有的性質，但这样說，太不确定了。根据上面所指出等价关系的基本性質，可以把所有各种各样的集合，依照等价关系来分类，凡互相等价的一切集合組成一类。把这样的类的本身叫做濃度，就可避免这种不确定性。

定义3. 一切互相等价的集合的濃度叫做基数。

基数描述出集合的元素的所謂"数量"。例如一切与太阳的集合等价的集合有相同的濃度，用符号1来表示；与一只手的手指的集合等价的一切集合有相同的濃度，用符号5来表示。这1和5就是基数的特例；它們分别描述出两类集合的元素的数量。

用等价集合的濃度来确立数的概念，并不是偶然的，它有其历史的渊源。数的某些名称实际上就是集合的名称。如某些部落把数"2"叫做"耳朵"，把数"5"叫做"手"。我国"二"与"耳"同音；藏文"二"有"翼"的意义。印度語"5"为Pantcha与波斯語

Pentcha(手)相近。

3.有限集合与无限集合

定义1.

1)由任何单个元素α組成的集合$\{\alpha\}$,叫做有限集合,增添某元素β到这个集合中,得集合$\{\alpha,\beta\}$,也叫做有限集合,再增添某元素γ到后一集合中,得集合$\{\alpha,\beta,\gamma\}$,也叫做有限集合,等等。

2)若M是有限集合,那末增添任何元素到M中所得集合M'也叫做有限集合。

定义2. 不是有限集合的非空集合叫做无限集合。

例如第1小节中1),2),3),4),5)都是有限集合;6),7),8)都是无限集合。

对于无限集合,我們可以在它和它的某个眞部分集合之間建立起一一对应;就是說,无限集合有与自身等价的眞部分集合。这一論断我們不加証明,只举例解釋如下:

例: 設AB是一个綫段,由A取它的一个部分綫段,而繞A轉动到AC的位置,如图。AB上所有一切的点組成一个无限集合M;AC上所有一切的点所組成的一个集合N,就是它的眞部分集合。

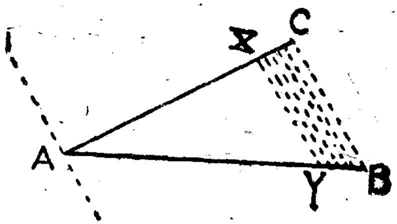

图 1

联結BC,作BC的一切与AB、AC相交的平行綫,使所作的每一条綫上的两个交点相互对应,则M与N之間便建立起一一对应。因为过AC上任意一点X可作一条且仅可作一条直綫平行于BC,又因为两直綫只有一个交点,故AB上有一个且仅有一个点Y与X

对应。同样，对于AB上的任意一点Y，AC上也有一个且仅有一个点X与Y对应。因此，M∽N。

但有限集合沒有这样的性質。

定理1. 有限集合和它的任何眞部分集合不等价。

我們对这个定理也不加証明。事实上，要严密証明这个定理，还需要其他的一些預备知識，証起来也比較难懂。讀者很可能以为这个定理是显然而容易証明的。比方說 $A=\{\alpha,\beta,\gamma,\cdots\lambda,\mu,\cdots,\rho\}$ 是任意一个有限集合，$B=\{\alpha,\beta,\gamma,\cdots,\lambda\}$ 是A的任何一个眞部分集合。对于B中的每个元素，用A中的同一元素和它对应：

$$\begin{array}{lccccc} A: & \alpha, & \beta, & \gamma,\cdots\lambda, & \mu,\cdots\rho \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \quad \updownarrow & \\ Б: & \alpha, & \beta, & \gamma,\cdots\lambda & \end{array}$$

由于B是A的眞部分集合，A中还包含着一些元素 $\mu,\cdots,\rho$ 不屬于B。这些元素不对应于B中的任何元素。如果令这些元素的任何一个，例如 μ，对应于B的某个元素，例如 α，則对于B中的元素 α，A 将有二个元素 α,μ 和它对应。这样的对应就不是一一对应。因此，"A和B不等价"。

注意，这样的論証是錯誤的，因为，上面的对应法則，只是說明，我們那样做，沒有建立起一一对应，而并不足以說明在A与B的元素之間不可能建立起一一对应。要証明"A和B不等价"，按照第2小节定义2，就是要証明建立一一对应的不可能性。

有沒有和自身等价的眞部分集合是无限集合与有限的根本区别。以后我們只討論有限集合。

定理2. 两个有限集合A和B，或者其中一个与另一个的眞部

分集合等价，或者这两个集合等价。

〔証〕 設給定两个有限集合：

$$A=\{\alpha,\beta,\gamma,\cdots,\mu\},\qquad B=\{\alpha',\beta',\gamma',\cdots,\upsilon'\}$$

令$A'=\{\alpha\}$，$B'=\{\alpha'\}$，則$A'\backsim B'$，对这两个集合分别增添元素β和β'，得$A''=\{\alpha,\beta\}$，$B''=\{\alpha',\beta'\}$，則$A''\backsim B''$。繼續增添元素，每次所得到的两个集合都彼此等价，最后有二种可能情形：

1)增添元素的結果，最后得到集合A和B，在这样的情形下，$A\backsim B$。

2)增添元素的結果，最后得到A，B中的一个。比方說，得到$A=\{\alpha,\beta,\gamma,\cdots,\mu\}$和另一集合$B^{(n)}=\{\alpha',\beta',\gamma',\cdots\mu'\}$，后一集合$B^{(n)}$的元素都属于B，而B中还有不屬于$B^{(n)}$的元素。在这样的情形下，$A\backsim B^{(n)}$而$B^{(n)}$是B的眞部分集合。于是定理得到了証明。

定理3. "集合A与集合B等价"和"集合A（或B）与集合B（或A）的眞部分集合等价"不能同时成立。

〔証〕若$A\backsim B$，而同时$A\backsim B'$，其中B'为B的某一眞部分集合。則由等价关系的对称性，有$B\backsim A$，再由傳递性，有$B\backsim B'$，这与定理1矛盾。

定理4. "集合A与集合B的眞部分集合等价"和"集合B与集合A的眞部分集合等价"不能同时成立。

〔証〕設$A\backsim B'$，且$B\backsim A'$，这里B'，A'分别是B，A的眞部分集合。由$B\backsim A'$，B的元素与A'的元素之間可建立起某个一一对应，因而B的眞部分集合B'的元素与A'的某个眞部分集合A''的元素之間也建立起一一对应，$B'\backsim A''$，而A''也是A的眞

部分集合。由等价关系的傳递性，有$A\sim A''$，这与定理1矛盾。

由定理2,3,4，对于任何两个有限集合A和B，下列三种关系有一且仅有一成立：

①A与B等价；

②A与B的真部分集合等价；

③B与A的真部分集合等价。

4. 自然数及其大小比較

互相等价的集合的全体組成等价集合的类，每一个等价集合类，有該类的一个确定的基数与它对应。特别地，我們有

定义1. 与等价有限集合类对应的基数叫做自然数（以下簡称数）。

等价集合类用該类的任意一个集合作代表可以完全表征出来。例如人的眼睛的集合是与該集合等价的集合类的代表；与它对应的基数是自然数2。

定义2. 二数a、b叫做相等，而記如$a=b$，如果对应于它們的集合等价。

定义3. 二数a、b中，a叫做小于b，而記如$a<b$，若对应于a的集合与对应于b的集合的真部分集合等价。

定义4. 二数a、b中，若$a<b$，則b叫做大于a，而記如$b>a$。

利用集合的理論，可以証明下列关于自然数的論断：

①三分律：对于任何二数a和b，有且仅有下列三种关系之一成立：$a=b$，$a<b$，$a>b$。

〔証〕設集合A，B是分别对应于a和b的集合类的代表。根据上一小节的最后結論，有且仅有下列三种关系之一成立：$A\sim B$，$A\sim B$的真部分集合，$B\sim A$的真部分集合。由本小节定义2,3,

4，直接就推出所要証明的。

完全类似地，由集合等价关系的基本性質，可証明

②**反射律**：对于任何自然数a，$a=a$。

③**对称律**：若$a=b$，則$b=a$。

④**傳递律**：若$a=b$，$b=c$，則$a=c$。

若$a<b$，$b<c$，則$a<c$。

若$a>b$，$b>c$，則$a>c$。

以上①，②，③，④合称为順序律。作为与等价有限集合类对应的基数的自然数是滿足順序律的。順序律指出了数与数之間的基本关系（或基本性質）。其他关系都可以由基本关系导出。作为一个例子，我們来証明："若$a>b$，$b=c$，則$a>c$"。

〔証〕由三分律，对于二数a和c，有下列三种关系之一成立：

$$a=c,\ a<c,\ a>c。$$

假設$a=c$。因$b=c$，由对称律，$c=b$。再由傳递律，$a=b$。但已知$a>b$，由三分律，$a=b$不能成立。故假設$a=c$是不能成立的。其次，假設$a<c$。因$a>b$，由定义4，$b<a$。再由傳递律，$b<c$。但已知$b=c$，由三分律，$b<c$不能成立。故假設$a<c$，也不能成立。因此，$a>c$。

5. 自然数的运算

（1）加法

設有二个有限集合A和B，它們沒有共同元素。把集合B的元素增添到集合A里，也就是用A和B的一切元素作元素，組成一个唯一的新的有限集合C。集合C叫做两集合A，B的和。記如

$$A+B=C。$$

用 a,b,c分别表集合A,B,C的基数，c 叫做两数a，b的和記如

$$a+b=c。$$

其中a，b叫做加数。由給定的二数求它們的和的运算叫做加法。

自然数的和具有下列基本性質。

①**交換律**：$a+b=b+a$。

事实上，設集合 A,B 分别是对应于a,b的等价集合类的代表，它們沒有共同元素。把B的元素增添到A里或把A的元素增添到B里的結果是一样的，也就是說，A+B和B+A同样都由A,B的一切元素組成，故由集合相等的定义，得到

$$A+B=B+A。$$

因而，由两数的和的定义以及自然数相等的定义，有

$$a+b=b+a。$$

②**結合律**：$a+(b+c)=(a+b)+c$。

事实上，設集合A,B,C分别是对应于 a,b,c 的等价集合类的代表，它們彼此都沒有共同元素。先把C的元素增添到B里，得B+C，再把B+C的元素增添到A里，得集合 A+(B+C)；或先把B的元素增添到A里，得A+B，再向这个集合增添 C 的元素，得集合(A+B)+C，这样得到的两个結果是一样的，它們都是由A,B,C的一切元素所組成。故得

$$A+(B+C)=(A+B)+C。$$

因而有

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$

关于两个集合的和的概念，很容易推广到彼此沒有共同元