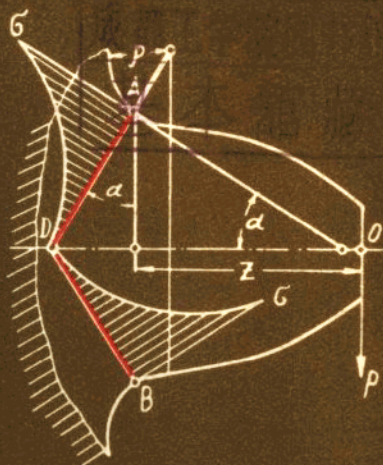


294006



A·B·韦尔霍夫斯基等著

复杂形状零件 危险截面的应力确定

张德辉译

中国工业出版社

前 言

研究零件形状急剧变化处的应力和变形的计算方法无疑是有实用价值的，因为絕大多数机械零件都具有很复杂的外形。

用一般的彈性理論方法来計算机械零件的应力和变形，不是常常能够得到滿意的結果的。因为在外形既定的条件下，具有微分方程組的积分是一則数学难题。因此，在目前，彈性理論方法只能解决一部分問題，而材料力学能解决直梁(杆)、曲梁(杆)和等橫截面梁(杆)中的应力和变形的确定問題。尽管它有局限性，但是由于材料力学本身的方法簡單，使得它在工程应用中仍然有着穩固的地位。

差不多所有关于材料中的应力确定方面的論著都基于平截面假設(柏努利假設)；在这个假設的基础上解决梁的弯曲、拉伸、压縮和扭轉等問題。

如果能找到既能确定在等橫截面梁中而且也能确定在变橫截面梁中的应力的簡易方法，那么，毋庸置疑，材料力学这門科学所能解决的問題的范围将会大大地扩大。为了解决这一已提出来的問題，必須采用一些类似平截面假設那样的新的工作假設。下面两种假設可作为这种性质的假設：折綫形截面假設和圓柱形截面假設，它們可以被統称为非平截面假設。基于上述假設进行計算，則在許多場合下能够足够准确地确定复杂外形机械零件的应力的一系列实际問題。

采用非平截面假設来計算复杂形状的零件，还得出了零

件截面應力的雙曲綫分布的規律。在這方面可以指出，本計算方法同Н. Н. 阿范納斯耶夫(Афанасьев)〔2〕的方法有某些相同點。根據截面(包括曲梁)中應力的雙曲綫分布規律來計算作用在變截面零件中的應力的，還有用於計算鑄件的彎曲的海台爾(Хедер)法和計算帶有孔的平板在受拉伸時的應力的提摩盛科(Тимошенко)法。因此，非平截面假設可以被认为是對從前所熟知的複雜形狀零件的計算方法作了某些改進。

非平截面假設的原理曾在А. В. 韋爾霍夫斯基(Верховский)的著作中闡述過〔4〕〔5〕。日丹諾夫高爾基工學院材料力學教研組的許多同事們對上述假設作了進一步的研究。特別注意對理論結果作詳細的試驗驗證。由於上述驗證，而使圓柱形截面假設更為精確了。

本書系由下列幾位作者集體寫成：第一、二章由韋爾霍夫斯基執筆；第三、四、五章由В. П. 安德羅諾夫(Андронов)執筆；第六、七章由В. А. 伊奧諾夫(Ионов)執筆；第八、十章由О. К. 盧芭諾娃(Лупанова)執筆；第九章由В. И. 切夫金諾夫(Чевкинов)執筆。

在正文前載有Р. Д. 瓦加波夫(Вагапов)的評論：“關於複雜形狀零件危險截面的應力確定問題”，它更深刻地闡明了其中的問題，而對讀者有所裨益。

目 次

前 言

关于复杂形状零件危险截面的应力确定问题.....5

第一章 折线形截面假设及其在复杂形状杆件

计算中的应用.....9

§1. 假设的基础.....9

§2. 对称曲面的平面杆件受弯曲时的应力.....11

第二章 用折线形截面假设确定切口和沟槽中的

应力集中系数.....15

§3. 两边带有切口的扁钢的拉伸.....15

§4. 两边带有切口的扁钢的纯弯曲.....23

§5. 带有环形沟槽的圆柱形杆的拉伸.....28

§6. 带有环形沟槽的圆柱形杆的纯弯曲.....31

§7. 带有环形沟槽的圆柱形杆的扭转.....34

§8. 应力梯度的确定.....36

第三章 根据折线形截面假设, 两边带有圆角过渡的

扁钢的法向应力确定.....38

§9. 两边带有圆角过渡的扁钢的拉伸.....38

§10. 两边带有圆角过渡的扁钢的纯弯曲.....42

第四章 根据圆柱形截面假设, 两边带有圆角过渡的

扁钢的法向应力确定.....45

§11. 两边带有圆角过渡的扁钢的拉伸.....45

§12. 两边带有圆角过渡的扁钢的纯弯曲.....49

§13. 应力梯度的确定.....52

§14. 計算公式的試驗驗證	52
第五章 具有軸肩圓的軸	75
§15. 軸受拉伸時的法向應力	75
§16. 軸受純彎曲時的法向應力	79
§17. 軸在扭轉時的剪應力	81
§18. 應力梯度的確定	84
§19. 計算公式的試驗驗證	85
第六章 根據精確的圓柱形截面假設，帶有切口的 杆件受拉伸時的應力	97
§20. 精確的圓柱形截面假設	97
§21. 兩邊帶有切口的扁鋼的拉伸	99
§22. 帶有環形溝槽的圓柱形杆受拉伸	107
§23. 精確的圓柱形截面假設的試驗驗證	111
第七章 帶有環形溝槽的杆件中的應力	117
§24. 兩邊帶有切口的扁鋼的純彎曲	117
§25. 帶有環形溝槽的圓柱形杆的純彎曲	123
§26. 帶有環形溝槽的圓柱形杆的扭轉	126
§27. 彎曲應力的試驗研究	130
第八章 帶有不對稱切口的扁鋼的應力	133
§28. 選擇扁鋼形狀的根據	133
§29. 折線形截面假設	134
§30. 圓柱形截面假設	139
§31. 非平截面假設的試驗驗證	145
第九章 齒輪輪齒中的彎曲應力	150
§32. 應力的試驗測定	150
§33. 應力的解析法確定	162
第十章 變寬度懸臂梁中的應力	168
參考文獻	172

关于复杂形状零件危險截面的应力 确定問題

在机械零件中和金属结构的节点处，由于从一种截面过渡到另一种截面和有切口和横孔，而使应力产生局部增大，这些是零件在承受变载荷、冲击载荷和静载荷时，决定零件强度的极其重要的因素。实际証明：零、构件的破坏大多数发生在上述应力集中处，或者是因工艺缺陷而引起。估計应力集中系数对体积龐大的零件或机器的高速轉动件，在減輕它們的重量和工作的安全性方面具有特殊意义。

近十年来的研究証明，为了估計应力集中对零件强度的影响，用系数 α_0 的数值是有不足之处的。因为它仅取决于在純彈性载荷情况下的第一主应力的最大值。

在变载荷作用时，必須考虑到在該作用点附近的应力状态，在該处 $\sigma_1 = \sigma_{max}$ 。

在受静载荷、冲击载荷或者在受循环载荷的过程中应力重新分布的情况下，欲确定零件的强度，必須知道沿着整个被削弱截面及其附近的三組主应力。在各种形状的零件中，彈性应力的分布規律即为在上述情况下估計应力状态的理論基础。

許多数学分析和实验研究結果闡明了在彈性变形时的应力集中的理論。

有关原則性的重要結論和部分解答是由苏联科学家 Г. В. 科洛索夫(Колосов)、Н. И. 穆斯哈利什維耳(Мухалиш-виль)、Г. Н. 薩文(Савин)等以及外国科学家：Г. 澳依別尔

(Нейбер)、德热費尔 (Джеффер)、Р. 茄烏兰德 (Гауланд) 和 К. 林格 (Линг) 等科学家們所作出的。

由这些研究工作得出下面与零件形状有关的应力分布規律一般結論：

1. 应力集中的特点是存在着很大程度的应力分布不均。在輪廓有切口的地方，第一主应力的数值为最大。应力的提高带有局部的特点，应力随着离开切口的距离的增大而降低。

在其它条件相同时，应力集中和应力分布不均現象，随着切口的曲率 $\frac{1}{\rho}$ 的增加而加剧。

2. 如果没有切口的平板或梁在外力作用下处于直綫应力状态，那么，薄板形状的零件，在切口周围处的应力情况就变为良好的平面状态，如果是梁或厚板零件，則变为立体状态。

3. 无论在应力集中减弱处或是在应力集中增大处，切口和孔的相互影响都能表示出来。增大和“减弱”的效应取决于与外力作用方向有关系的切口位置，取决于切口的間距和切口的数量。

然而，大多数正确的解答是在有許多限制、且难于将它们用于具体情况的条件下得到的。

这些限制通常与外形的正确制造条件有关。例如，解决在具有对称切口平板中的应力分布問題的条件如下：即这些切口或者是很深(涅依別尔)，或者是半圓形的(林格)。对于任意深度的沟槽來說这种問題尚未得到解决^①。

① Г.С. 沙皮罗 (Шандро) 給出了解决具有任意深度环形沟槽的轉动件問題的一般方法。

本书作者恰当地指出：在实际计算中利用准确的解答，还存在计算上的很大困难。

鉴于上述情况，在材料力学方法的基础上估计应力集中的近似方法就值得注意了。但是，在这种情况下不研究第二和第三主应力，所以问题的解决就不完全。这样提议的有提摩盛科和阿法纳斯耶夫（与曲梁相类似）以及韦尔霍夫斯基假设。较详细的近似计算在这种情况下就有实际意义，即对确定零件的强度来说，只要单单计算第一主应力（平板零件）和作为试验研究中的补充。

在应用基本理论时，尚有其它一些明显的限制。为了引起读者对非平截面假设的注意，我们也谈谈这方面的問題。这个假设的基本思想在于任意两个相近的垂直于切口轮廓的截面，在受拉伸时，一个截面要相对于另外一个截面产生位移，或者在受弯曲时，在保持原有形状的同时截面也要转一角度 $d\alpha$ 。

上述假设近似地反映了在第一主应力方向移动的分布规律，并且在該种意义上它与平截面假设应用于曲梁上是一样的。

由于这个规律简单，使得有可能初步计算第一主变形，这变形乘上弹性系数则为切口削弱区域处应力的近似值。此时不考虑横向变形 ε_z 或第二主应力 σ_z 。

在作上述简化时，令人满意的是沿着被削弱截面的应力实际分布是按双曲线规律分布。但是，在最大应力区域，应力的双曲线分布与实际情况有很大的出入，并且不能够作为确定应力梯度绝对值的基础^①。

① 例如，按双曲线规律计算的应力梯度值，在 $\sigma_1 = \sigma_{max}$ 点上比由精确理论（当 $t = \infty$ 时）得到的少一半。

本书作者未曾指出：靠非平截面假设在原则上不可能估计切口的相互影响，也就是说，不能够确定在这种情况下应力集中减弱和增大的效应。

作者提出的相当一般性的方法，可以研究整个一系列问题，这些问题是与按照邻近最小截面的圆柱形截面计算应力有关的。按邻近最小截面的圆柱形截面，可以得到当平板零件和轴上有圆角过渡的变化时，沿最危险截面的应力分布。

引入表征切口深度的参数 a_0 ，使得有可能考虑切口深度对第一主应力分布的影响，亦即部分地说明了在有任意深度的切口时，应力集中对实际问题是重要的。

应当指出，本书对与精确理论和试验结果有关的计算原理未加着重说明。例如，不难发现，参数 a_0 值取自条件为 $1 + 2\sqrt{t/\rho} = 1 + a_0/\rho$ 等式左边是应力集中系数的数值，它是在解决很宽的具有半圆形切口平板的弹性理论问题时得到的；而等式右边则为按照本书的公式计算求得。当切口为圆角过渡时，在危险截面处的应力分布只有在用试验确定具有最大应力的轮廓上的点时才有可能得到。

最后，应当指出本书介绍的计算方法是简单的。书中介绍了许多具体的解决方法和大量的试验资料，这些资料使得从事研究应力集中的人们感到兴趣。

那些计算转动件在弯曲和拉伸时的应力的章节，其意义比较小，因为在这种情况下不可能估计应力状态的范围。

总的说来，若以评论的眼光看，本书将有助于进一步改进建立在精确理论结果和试验基础上的近似计算方法。

瓦加波夫

第一章 折綫形截面假設及其在复杂形状杆件計算中的应用

§1. 假設的基础

研究关于計算变截面的复杂形状杆件的应力問題是有实际意义的。С.В.謝联先(Серенсен)在他自己的一本著作中指出:大多数机械零件都具有复杂的几何形状,而对这样的零件进行計算时,如果应用材料力学的基本方法和公式,将会导致完全的錯誤[14]。

例如,在确定齿輪輪齿因弯曲而产生的应力时,根据平截面假設的公式:

$$\sigma = \frac{M}{I_x} y, \quad (1)$$

式中 σ ——应力;

M ——橫截面上的弯矩;

I_x ——軸向慣性矩;

y ——从中性层到所研究点的距离。

公式(1)在这种情况下不会得出正确的結果,因为,如果我们假定向法向应力 σ 成正比的相对伸长 ε , 在橫截面中是按直綫規律分布的話(图 1, a), 它也可以被得到的。

实际上,由于零件上半部和下半部輪廓具有曲率,截面中的应力分布規律将与直綫規律有所不同,它在輪廓表面各点上的应力将大于計算的(名义的)应力,而它的方向与輪廓相切,且不与截面垂直。因此在确定复杂形状零件中的最大应力时,需将根据材料力学公式求得的計算应力再乘上一个

应力集中系数 α_0 。此系数大于 1，等于应力集中区域上的最大应力与名义应力之比。

为了正确地选取应力集中系数值，必须要知道在类似形状零件中的真实应力。

按照本书所建议的方法，在很多情况下都能够足以精确地确定出复杂形状零件中的实际应力。此方法就是以非平面(折线形截面)假设为基础。根据这个假设，弹性物体在按照既定的规律变形时，其折线形截面不会发生畸变。

由研究证明，根据这个假设所求得的复杂形状零件中的应力与试验数据能很好地吻合。

折线形截面可按照如下规则作出：通过轮廓上已选定的 A 点(图 1, 6)，引轮廓面的法线 AD ，与杆件中心线相交于 D 点；然后从 D 点作对面的轮廓面的法线 DB (对棱形的杆件，根据作图，折线形截面 ADB 变为平面截面)。正如后面将阐述的，折线形截面假设也得出了沿 ADB 截面上应力分布的双曲线规律。这个规律已由阿范纳斯耶夫所发现和运用。在轮廓上，点 A 和 B (图 1, 6) 处法向应力的方向与杆件

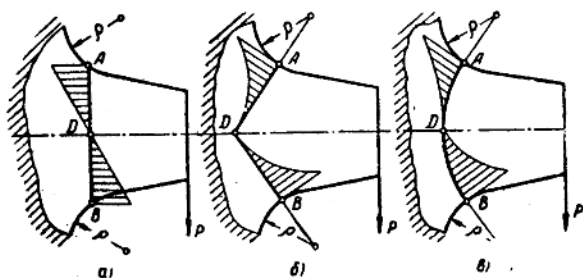


图 1 受弯曲时的法向应力图

a —按照平截面假设； b —按照折线形截面假设； c —按照圆柱形截面假设。

的輪廓面相切，所以这二个应力将为主应力。

在参考文献〔4〕和〔5〕中，研究了关于用圆柱形截面假设来确定复杂形状物体中的应力的可能性(图1, e)。

經研究証明，圆柱形截面假设在某些情况下，可以得到足够精确的结果(第四、五、六、七、八章)。

在旋轉体中，折綫形截面假设和圆柱形截面假设就变成了相应的圆锥形截面假设和球形截面假设。

§2. 对称曲面的平面杆件受弯曲时的应力

現在我們来确定在杆件的曲面上任意一点 A 上的应力 σ (图2)。杆件的左端固定，在右端受 P 力作用。通过 A 点，按照 §1 所述之規則作折綫形截面 ADB 。

从图2可得：

$$a = AD = DB = \frac{y}{\cos \alpha},$$

式中 a ——沿着法綫 AD 测量 A 点到杆件中心綫的距离；

y —— A 点的纵坐标；

α ——在 A 点与表面相切的切綫同杆件中心綫的夹角。

为了确定折綫形截面 ADB 上的应力，我們需做如下工作：在靠近輪廓上 A 点附近取 A_1 点，經過該点作第二个折綫形截面 $A_1D_1B_1$ (图3)。延长 AD 和 A_1D_1 两边，相交在輪廓的曲率中心 O 点，形成一用 $\Delta\alpha$ 表示的夹角。現在我們来研究一下纖維 KF 的情形，这纖維居于二个截面之間并且垂直于 AD 直綫。

P 力对 D 点的力矩为：

$$M = P \times OD = P(z + y \operatorname{tg} \alpha),$$

$$\sigma = \frac{u \Delta \gamma E'}{(\rho + a - u) \Delta \alpha} \quad (2)$$

由杆件右部的平衡条件可以写成①：

$$M = 2 \int_0^a \sigma b u du, \quad (3)$$

式中 b ——杆件的厚度；

bdu ——截面的单位面积。

把式(2)中的 σ 值代入方程(3)中，并且把不随 u 而变化的各数值提到积分符号外，得：

$$M = \frac{2 \Delta \gamma E b}{\Delta \alpha} \int_0^a \frac{u^2 du}{\rho + a - u},$$

从而

$$\frac{\Delta \gamma E}{\Delta \alpha} = \frac{M}{2b \int_0^a \frac{u^2 du}{\rho + a - u}}.$$

经过积分并将该值代入方程式(2)中得：

$$\sigma = \frac{Mu}{2b \left[(\rho + a)^2 \ln \left(\frac{\rho + a}{\rho} \right) - (\rho + a)a - \frac{a^2}{2} \right] (\rho + a - u)}. \quad (4)$$

用这个式子可以求出在折线形截面ADB中离D点距离为 u 的任何一点上的应力值。从这个式子可以看出：沿着折线形截面的AD边和DB边的应力 σ 是按照双曲线规律分布的。

我们引入下面一个符号：

$$N = (\rho + a)^2 \ln \left(\frac{\rho + a}{\rho} \right) - (\rho + a)a - \frac{a^2}{2}. \quad (5)$$

① 根据所采用的假设，非平面截面ADB同第二主应力的轨迹吻合。因此，截面中切向应力 $\tau_y = 0$ 并且外力矩 M 等于内力 $\sigma b u du$ 的力矩的总和。

于是，公式(4)可写成下列形式：

$$\sigma = \frac{Mu}{2bN(\rho + a - u)} \quad (6)$$

N 的大小表示折线形截面的几何特性，并由其参数来确定。

为了求出轮廓上 A 点(或 B 点)(图 3)处的截面上的最大应力，可在公式(6)中令 $u=a$ ，于是

$$\sigma_a = \frac{Ma}{2bN\rho} \quad (7)$$

我们发现，如果 A 点不在轮廓的凹部而在凸出的部分，那么在公式(4)~(7)中轮廓的曲率半径 ρ 将是负的。按照公式(6)作出的折线形截面 ADB 的应力图如图 2 所示。

折线形截面假设(以及圆柱形截面假设)不能应用于：

1) A 点是轮廓曲线为二段曲线的连接点，因为对这连接点能得到二个应力值，应力的将取决于连接两轮廓曲线段的点上的曲率半径的大小；在这样的点上，可以按照二个数值的算术平均数来近似地确定它的应力。

2) 如果杆件的凸出外形的曲率中心在杆件中心线的另一边上。

在有很深的切口的情況下，所研究的假设会得出较高的应力值。

上述的假设的缺点不是主要的，因为在轮廓的拐点和位于轮廓的凸出部分的点上，应力在任何时候也不会是最大的。而对零件的强度计算来说，重要的是能够确定出最大应力。至于谈到确定很深切口处的应力值问题，则所有基于把弹性体看作是密集的介质的理论方法，都给出了较高的应力值(等于无限大，因为在切口很深时 $\rho=0$)。为了求得较正确

的結果，涅依別爾〔11〕在研究深切口的时候，研究了顆粒的应力值，还引入了与此顆粒的大小有关而不等于零的半徑 ρ' 。很明显，要按照折綫形截面假設来解决确定深切口的应力問題时，应当采用这样的方法。

为了判断折綫形截面假設的正确性，在后面几章中，將比較用这个假設得出的理論結果和試驗数据。

第二章 用折綫形截面假設确定切口 和沟槽中的应力集中系数

§3. 两边带有切口的扁鋼的拉伸

我們来研究一下两边带有切口的扁鋼(图 4)。

首先，我們假定二切口相当淺，也即

$$2\sqrt{t\rho} < a, \quad (8)$$

式中 ρ ——切口的曲率半徑；

t ——切口的深度；

a ——在危險截面上扁鋼的一半寬度。

此时切口的影响不致涉及到扁鋼的整个寬度，它的影响限制在某一深度內，

$$a_0 = 2\sqrt{t\rho}. \quad (9)$$

切口深度影响的論証資料將在以后叙述。鉴于上面所述，折綫形截面 $AD'D''B$ 的斜边(图 4)同样应限制在 a_0 深度內。因此，折綫形截面的中間段 $D'D''$ 就垂直于杆件的中心綫(平面-折綫形截面)。通过位于切口底部的 A_1 点，作第二个折綫形截面 $A_1D'_1D''_1B_1$ ，按照第一章所述的作图規則，該

截面在这特殊情况下是一个平截面。假定所取的 A 点离 A_1 点很近。

在拉力 P 的作用下，扁钢要产生变形，并且截面 $A_1D_1'D_1''B_1$ 相对截面 $AD'D''B$ 位移到 $A_2D_2'D_2''B_2$ 位置。同时，纤维 KF (离扁钢中心线为 u) 也变形了 NF 。于是，它的相对伸长是

$$\varepsilon = \frac{NF}{FK} \quad (10)$$

由图 4 看出：

$$FK = \frac{D_1 D (\rho + a - u)}{\rho + a_0}$$

将 FK 代入 (10) 式，得

$$\varepsilon = \frac{NF(\rho + a_0)}{D_1 D (\rho + a - u)}$$

在所研究的纤维中的应力

$$\sigma = \varepsilon E = \frac{NF(\rho + a_0)E}{D_1 D (\rho + a - u)} \quad (11)$$

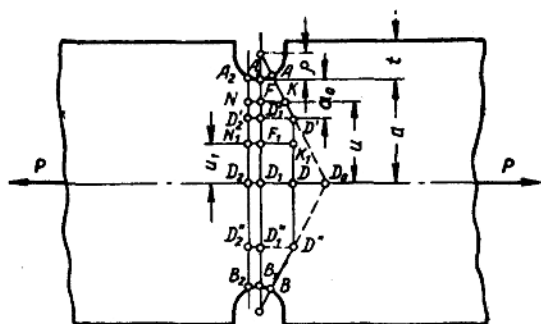


图 4 扁钢的各参数，折线形截面的几何形状及扁钢受拉伸时材料纤维的伸长的情形