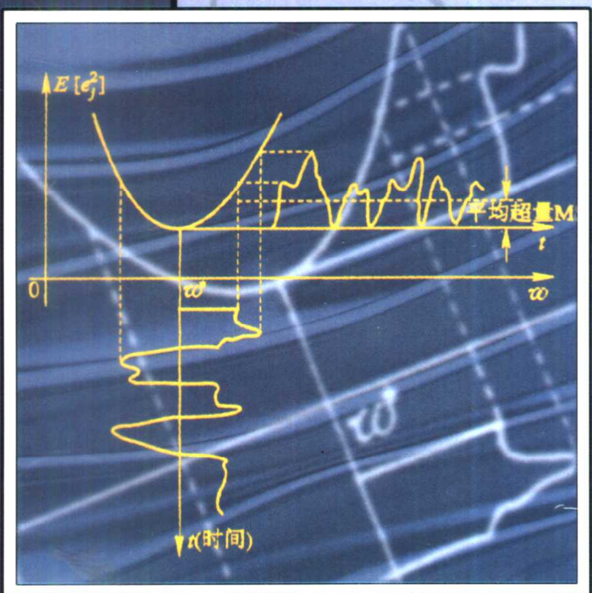
研究生系列教材

随机信号处理



陆光华 彭学愚
张林让 毛用才 编著

西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

研究生系列教材

随机信号处理

陆光华　彭学愚
张林让　毛用才　编著

西安电子科技大学出版社

2002

内 容 简 介

随机信号处理是信息科学技术中的一个重要分支。本书系统、深入地介绍了随机信号处理的各种理论和方法。内容主要包括平稳信号的离散随机信号、维纳滤波、卡尔曼滤波、自适应滤波、功率谱估计及专门研究非平稳随机信号的时频表示与时频分布等。

本书主要为学过"数字信号处理"课程的硕士研究生开设的"随机信号处理"课程所用。也适合于广大科技工作者自学与进修。

图书在版编目(CIP)数据

随机信号处理/陆光华，彭学愚等编著．
—西安：西安电子科技大学出版社，2002.10
研究生系列教材
ISBN 7-5606-1157-5
Ⅰ．随… Ⅱ．①陆… ②彭… Ⅲ．随机信号—信号处理—研究生—教材 Ⅳ．TN911.7

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 048487 号

策　　划　夏大平
责任编辑　杨宗周
出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)
电　　话　(029)8227828　　邮　编　710071
http://www.xduph.com　　E-mail：xdupfxb@pub.xaonline.com
经　　销　新华书店
印　　刷　陕西光大印务有限责任公司
版　　次　2002 年 10 月第 1 版　2002 年 10 月第 1 次印刷
开　　本　787 毫米×1092 毫米　1/16　印张 10.625
字　　数　242 千字
印　　数　1～4 000 册
定　　价　13.00 元
ISBN 7-5606-1157-5/TN・0208(课)

XDUP 1428001-1

前　　言

信号与信息处理学科是信息科学的重要组成部分。有些学者将其视为一个国家科学水平的标志性学科之一，从某种意义上讲，这也许并不为过。

在全面学习与研究了确定性信号处理的理论与方法之后，如何对随机信号进行系统和科学的分析及处理，显然具有更为重要的意义。因为确定性信号实际上只是随机信号的某种特例。当然，对随机信号而言，如从其统计量与时间之间的关系考虑，则尚有平稳信号与非平稳信号(或称时变信号)之分。

本书除第三章介绍的卡尔曼滤波器适用于非平稳信号以及第五章讨论的功率谱估计多少涉及一些非平稳信号的谱估计之外，主要论述平稳信号的分析与研究。随着一系列信号处理理论和实践的飞速发展，针对非平稳信号的现代信号处理技术得到了十分广泛的重视和应用。本书第六章侧重介绍了有关非平稳信号的基本处理理论与方法，可作为进一步掌握非平稳信号处理的基础。

随机信号处理是一门理论和技术发展十分迅速、应用非常广泛的前沿学科。使用本书时，应充分注重课程理论的系统性与实用性。由于本书涉及数字信号处理的诸多领域，而且包括目前的主要进展，因此在具体论述时，应尽量侧重基本概念、基本理论和基本方法的讨论。希望通过本书的学习，为日后进一步钻研有关学科或专题打下比较坚实的基础。

本书第一章由毛用才撰写，第二、六章由陆光华撰写，第三、四章由彭学愚撰写，第五章由张林让撰写，全书由陆光华统一增舍和斟酌定稿。

清华大学张贤达教授拨冗审阅了全稿，提出了不少宝贵意见，作者十分感激。

本书的出版得到了西安电子科技大学教材建设基金和研究生教材建设基金的资助，特表诚挚谢意。

限于时间与水平，不当及错误之处难以避免，诚请读者阅读时批评指正。

编著者

2002 年 8 月

目　录

第一章　离散随机信号 …… 1

1.1　引言 …… 1
1.2　离散时间随机信号的时域(统计)表示 …… 2
1.2.1　离散时间随机过程的概率分布 …… 3
1.2.2　离散时间随机过程的数字特征 …… 6
1.2.3　离散时间平稳过程相关序列与协方差序列的性质 …… 8
1.2.4　平稳序列的时间平均与遍历性 …… 11
1.3　离散时间随机信号的 z 域及频域(统计)表示 …… 14
1.3.1　$\gamma_{xx}(m)$与 $\phi_{xx}(m)$的 Z 变换及其收敛域 …… 14
1.3.2　平稳序列的谱分析 …… 15
1.3.3　功率谱密度 …… 18
1.3.4　谱密度的物理意义 …… 19
1.4　线性系统对随机信号的响应 …… 21
1.4.1　线性时不变系统对随机输入的响应 …… 22
1.4.2　系统输入、输出的互相关函数与互谱密度 …… 24

第二章　维纳(Wiener)滤波 …… 27

2.1　引言 …… 27
2.2　维纳滤波器的时域解 …… 28
2.3　维纳滤波器的 z 域解 …… 31
2.3.1　非因果维纳滤波器 …… 33
2.3.2　因果维纳滤波器 …… 36
2.4　维纳预测器 …… 39
2.4.1　预测的可能性 …… 40
2.4.2　预测器计算公式 …… 41
2.4.3　N 步纯预测器 …… 42
2.4.4　一步线性预测的时域计算公式 …… 46

第三章　卡尔曼(Kalman)滤波 …… 48

3.1　引言 …… 48
3.2　卡尔曼波滤器的信号模型——离散状态方程与量测方程 …… 48

3.3 卡尔曼滤波的算法…… 50
3.4 卡尔曼滤波与维纳滤波的关系…… 57

第四章 自适应滤波 …… 60

4.1 引言…… 60
4.2 自适应滤波器的基本概念…… 60
4.3 LMS 自适应滤波器 …… 62
4.3.1 最陡下降法原理…… 64
4.3.2 LMS 算法的收敛性质 …… 66
4.4 LMS 格型自适应滤波器 …… 73
4.5 RLS 自适应滤波器 …… 76
4.6 自适应滤波的应用…… 79
4.6.1 自适应噪声抵消器…… 79
4.6.2 自适应噪声抵消器作为陷波器的例子…… 82
4.6.3 天线阵列自适应旁瓣相消…… 85
4.6.4 自适应仿模(Adaptive Modeling)系统 …… 87
4.6.5 自适应逆滤波(逆仿模)系统…… 88
4.6.6 参考输入是延时 k 步的原始输入的自适应抵消器…… 90

第五章 功率谱估计 …… 93

5.1 引言…… 93
5.2 经典谱估计方法…… 94
5.2.1 相关图法…… 94
5.2.2 周期图法…… 96
5.3 谱估计的参数化模型方法 …… 102
5.4 自回归(AR)模型方法…… 104
5.4.1 AR 模型的 Yule-Walker 方法…… 104
5.4.2 AR 谱估计与线性预测谱估计等效 …… 105
5.4.3 最大熵谱估计及其与 AR 谱估计的等效性 …… 106
5.4.4 Levinson-Durbin 递推算法 …… 109
5.4.5 AR 模型阶数选择原则 …… 110
5.4.6 Burg 递推算法 …… 111
5.5 白噪声中正弦波频率的估计及谱估计的其它方法 …… 115
5.5.1 最大似然法 …… 115
5.5.2 Capon 谱估计方法 …… 118
5.5.3 特征分解频率估计 …… 121

第六章 时频表示与时频分布…… 128

6.1 引言 …… 128

6.2 几个基本概念 …… 128
6.2.1 解析信号与基带信号 …… 129
6.2.2 瞬时频率和群延迟 …… 132
6.2.3 不确定性原理 …… 133
6.3 短时傅里叶变换 …… 135
6.3.1 连续短时傅里叶变换 …… 135
6.3.2 短时傅里叶变换的基本性质 …… 137
6.3.3 离散短时傅里叶变换 …… 138
6.4 时频分布的基本理论 …… 139
6.4.1 信号的双线性变换和局部相关函数 …… 139
6.4.2 时频分布的基本特性要求 …… 141
6.4.3 时频分布的二次叠加原理 …… 143
6.5 模糊函数 …… 144
6.6 Cohen 类时频分布 …… 144
6.6.1 定义 …… 145
6.6.2 时频分布基本性质与核函数的关系 …… 146
6.6.3 Cohen 类的四种分布及其相互关系 …… 148
6.7 Wigner-Ville 分布 …… 149
6.7.1 数学性质 …… 149
6.7.2 基于 Wigner-Ville 分布的信号重构 …… 152
6.8 时频分布的性能评价及相应改进 …… 153
6.8.1 时频集聚性 …… 153
6.8.2 交叉项分析 …… 154
6.8.3 交叉项抑制 …… 155
参考文献 …… 158

第一章　离散随机信号

离散时间随机信号的分析方法及许多结果和连续时间随机信号有不少相似之处。因此，本章不准备将所有随机过程的问题再从头仔细讨论一遍，而主要是按离散时间的观点和方法，讨论在数字信号处理中将要用到的有关离散时间随机信号的基本特性。这些特性是学习后面各章内容必不可少的基础。

本章讨论的重点是离散时间随机信号的相关函数(相关序列)、协方差函数(协方差序列)和功率谱密度函数(简称功率谱)，以及离散时间随机信号经过时不变离散系统的输入、输出关系。

1.1　引　　言

与连续信号的情形相类似，离散时间信号(或序列)也有确定和随机信号之分。所谓确定性信号，就是其在每个时间点上的值可以用某个数字表达式或用图表惟一地确定的信号。对于这种离散时间的确定信号及其 Z 变换和傅里叶变换的表征，我们假定读者已经很熟悉，不需要再作更多讨论。本章将讨论离散时间的随机信号(即随机序列)的表征及有关问题。

定义　设已给概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$，Z 为整数集，若对每一整数 $n(n \in Z)$，均有定义在 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的一个随机变量 $x(\omega, n)(\omega \in \Omega)$ 与之对应，则称依赖于参数 n 的一列随机变量 $x(\omega, n)$ 为一离散时间随机过程或随机序列，记为 $\{x(\omega, n), \omega \in \Omega, n \in Z\}$，简记为 $\{x(n), n \in Z\}$ 或 $\{x_n\}$。随机序列有以下特点：

(1) 随机序列中任何一个点上的取值都是不能先验确定的随机变量。一个随机信号(或序列)是一个随机过程，在它的每个时间点上的取值都是随机的，可用一个随机变量表示。或者说，一个随机过程是由一个随机试验所产生的随机变量依时序组合而得到的序列。今后我们用 $\{x(n)\}$ 表示一个随机序列，而用 $x(n)$ 表示时间为 n 的点上的一个随机变量。显然，任何一个具体试验所得到的序列(例如，图 1.1 的序列 $x_1(n)$)都只能是随机序列的一个样本序列(或一个实现)。

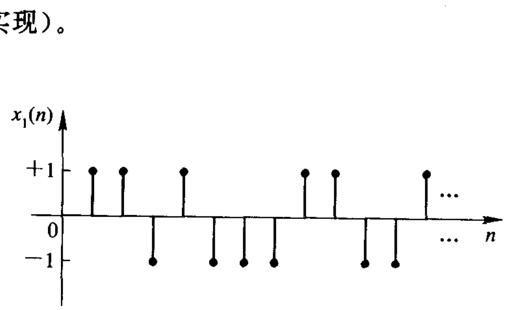


图 1.1　抛硬币得到的随机样本序列

(2) 随机序列可以用它的统计平均特性来表征。虽然由随机试验所得到的随机序列在任何 n 值点上的取值都是不能先验确定的，但是，这种先验不确定的过程中却含有确定的统计规律，即随机序列在各时间点上的随机变量取值是服从某种确定的概率分布的。因此，一个随机序列中的每一个随机变量都可以用确定的概率分布特性来统计地描述，或者，可以通过统计平均特性来统计地表征。因为统计平均特性反映了随机变量的概率分布特性，一个随机变量的各种统计平均特性是这个随机变量的各种函数按概率加权求平均的运算结果。例如，离散型随机变量 $x(n)$（一次幂）的数学期望 $E[x(n)]$ 为

$$E[x(n)] = \sum_i x_i p(x_i)$$

这里的 $p(x_i) = P(x(n) = x_i)$，$i = 1, 2, \cdots$，表示 $x(n)$ 取值为 x_i 的概率。它表示 $x(n)$ 的概率特性。

总之，一个随机变量的取值尽管是不能先验确知的，但我们可以用它取各种可能值的概率特性 $p(x_i)$ 或它的全部完整的统计平均特性 $E[f(x_n)]$，包括 $E[x_n]$，$E[x_n^2]$，$E[x_n^3]$，… 来表征。它们分别从不同侧面描述了 x_n 的取值特性。

一个随机序列在每个时刻 n 处的取值都是随机变量，但这个随机序列并不是把各种随机试验产生的随机变量任意地放在一起随意编序排列而成的。我们所遇到的随机序列常常是在一个作随机运动的系统中某一端口上所观测到的采样数据依照时序排列构成的时间序列，它在各时间点上的取值之间，往往还前后相互影响。这种相互影响是由系统的各种惯性所决定的。相互影响的统计特性可由描述此序列各时间点取值的多维概率特性来表征。因此，对于一个随机序列，不仅需要知道它在各个 n 值点上的取值特性，还需要知道它在各个不同点间取值的相互关联性(波及性)。这就不仅需要用一维而且需要用它的多维统计平均特性来表征。

(3) 平稳随机信号的能量化表示。一随机信号各频率的能量称为功率谱密度(简称功率谱)。一个平稳的随机信号的功率谱是确定的，因此，功率谱可以统计表征一个随机过程的谱特性。我们将会知道，一个信号的功率谱是这个信号的自相关函数的傅里叶变换。功率谱和自相关函数是一个傅里叶变换对，它们相互惟一地确定，它们都是信号的一种(二维)统计平均表征，分别从不同域的侧面表征着一个随机过程的最本质的性质。因此，对于一个观测到的随机信号，重要的是确定它的功率谱密度函数和自相关函数。

综上所述，对于离散随机信号的概念和表征问题，有：

(1) 一个随机信号在各时间点上的取值以及在不同点上取值之间的相互关联性只能用概率特性或统计平均特性来表征，它的确定值是无法先验表达的。

(2) 一个平稳随机信号在各频率点上能量的取值可以用功率谱密度函数与自相关函数统计描述。

1.2 离散时间随机信号的时域(统计)表示

一个信号 $x(n)$，如果它在每个时刻的取值都是确定的(可用数学表达式或图表示，例如图 1.2 所示)，那么，该信号就称为确定性信号。

如上节所述，对于一个随机信号，虽然我们不能确知它在每个时刻的取值情况，但可

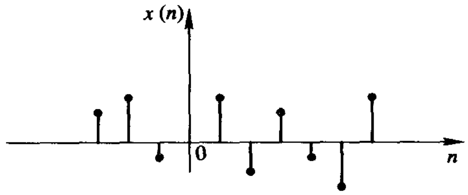


图 1.2　确定性信号(每个时刻的值都确知的信号)

以从统计平均的观点来认识和分析它，即可以知道它在每个时刻可能的取值情况的概率规律性，以及在各时间点上取值的关联性。因此，如果已完整知道了它的概率分布(包括一维和多维概率分布)，我们就认为对这个随机信号在统计意义上已充分了解或已作明白描述了。因此，对于随机信号，我们需要了解和研究它的一维概率分布和二维概率分布等有限维概率分布。

随机过程的各种数字特征分别从各个侧面间接地反映了随机过程的概率分布特性。例如，前面提到的离散型时间序列的统计平均值 $E[x_n]\left(=\sum_i x_i p(x_i)\right)$ 就反映了信号取值的分布特性。下面，我们将分别讨论离散时间随机信号的有限维概率分布及数字特征。

1.2.1　离散时间随机过程的概率分布

为了便于后面引用有关符号，让我们重温一下概率分布函数，并且在处理中主要以信号为离散时间随机过程来考虑。

离散时间随机过程 $\{x(n),\ n\in Z\}$ 是随 n 而变化的随机序列，因为随机变量是用概率分布来描述的，故随机序列 $\{x(n),\ n\in Z\}$ 也可用其概率分布来描述。一个随机变量 $x(n)$ 的一维概率分布函数为

$$P_x(x,\ n) = P[x(n) \leqslant x],\qquad -\infty < x < +\infty \tag{1-1}$$

如果 $x(n)$ 是连续型随机变量，且 $P_x(x,\ n)$ 关于 x 可导，则其概率分布可用概率密度函数 $p_x(x,\ n)$ 表示，并且在 $p_x(x,\ n)$ 的连续点处，有

$$p_x(x,\ n) = \frac{\mathrm{d}P_x(x,\ n)}{\mathrm{d}x}$$

或

$$P_x(x,\ n) = \int_{-\infty}^{x} p_x(x,\ n)\,\mathrm{d}x,\qquad -\infty < x < +\infty \tag{1-2}$$

这里的 $p_x(x,\ n)\,\mathrm{d}x$ 表示 $x(n)$ 取值在 x 到 $x+\mathrm{d}x$ 范围内的微概率。

如果 $x(n)$ 的取值是离散的，设 $x(n)$ 的所有可能的取值为 $a_1,\ a_2,\ \cdots$，则可用分布律(也称概率质量函数) $p_x(a_i,\ n)$ 表示，有

$$p_x(a_i,\ n) = P[x(n) = a_i],\qquad i = 1,\ 2,\ \cdots \tag{1-3}$$

此时的 $p_x(a_i,\ n)$ 代表 $x(n)$ 取某一值 a_i 的概率。对于一个随机变量，已知它的概率分布，就可认为在统计意义下充分了解了或已明白描述了该随机变量。

如果我们要描述一个随机过程中的两个时间点 (n_1 与 n_2) 上的随机变量 $x(n_1)$ 和 $x(n_2)$ 之间的关系，那么我们可以用二维联合概率分布函数来描述，这时

$$P_x(x_1,\ n_1;\ x_2,\ n_2) = P[x(n_1) \leqslant x_1,\ x(n_2) \leqslant x_2] \tag{1-4}$$

它表示 $x(n_1) \leqslant x_1$，同时 $x(n_2) \leqslant x_2$ 的联合概率。

如果这两个随机变量构成二维连续型随机变量，那么，我们也可以利用二维联合概率密度 $p_x(x_1, n_1; x_2, n_2)$ 来表达。如果 $p_x(x_1, n_1; x_2, n_2)$ 关于 x_1，x_2 的二阶混合偏导数存在，则有

$$p_x(x_1, n_1; x_2, n_2) = \frac{\partial^2 P_x(x_1, n_1; x_2, n_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \tag{1-5}$$

$$P_x(x_1, n_1; x_2, n_2) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} p_x(x_1, n_1; x_2, n_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2, \quad -\infty < x_1, x_2 < +\infty$$

$p_x(x_1, n_1; x_2, n_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2$ 表示 $x(n_1)$ 在 x_1 到 $x_1 + \mathrm{d}x_1$，同时 $x(n_2)$ 在 x_2 到 $x_2 + \mathrm{d}x_2$ 的矩形区域内取值的二阶微联合概率。

对于二维离散型随机变量，可用二维联合分布律(概率质量函数)表示：

$$p_x(a_i, n_1; b_j, n_2) = P[x(n_1) = x_1, x(n_2) = x_2] \tag{1-6}$$

它代表 $x(n_1)$ 取值 x_1，同时 $x(n_2)$ 取值 x_2 的联合概率。

从随机变量 $x(n_1)$ 与 $x(n_2)$ 的二维联合概率密度可求得 $x(n_1)$ 与 $x(n_2)$ 的一维概率密度(边缘概率密度函数)：

$$\left.\begin{aligned} p_x(x_1, n_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_x(x_1, n_1; x_2, n_2)\,\mathrm{d}x_2, \quad -\infty < x_1 < +\infty \\ p_x(x_2, n_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_x(x_1, n_1; x_2, n_2)\mathrm{d}x_1, \quad -\infty < x_2 < +\infty \end{aligned}\right\} \tag{1-7}$$

另外，由贝叶斯(Bayes)公式有

$$\left.\begin{aligned} & p_x(x_1, n_1; x_2, n_2) = p_x(x_2, n_2) \cdot p_{x(n_1)|x(n_2)}(x_1/x_2) \\ \text{或}\quad & p_x(x_1, n_1; x_2, n_2) = p_x(x_1, n_1) \cdot p_{x(n_2)|x(n_1)}(x_2/x_1) \end{aligned}\right\} \tag{1-8}$$

其中 $p_{x(n_1)|x(n_2)}(x_1/x_2)$ 代表 $x(n_2)$ 已取 x_2 值后，$x(n_1)$ 取 x_1 值的条件概率密度函数，$p_{x(n_2)|x(n_1)}(x_2/x_1)$ 代表 $x(n_1)$ 取 x_1 值后，$x(n_2)$ 的取 x_2 值的条件概率密度函数。条件概率密度函数说明了随机变量 $x(n_1)$ 与 $x(n_2)$ 之间的相关性。利用二维联合概率密度函数可以惟一确定一维概率密度函数，而且可以惟一确定条件概率密度函数。尤其是，当随机变量 $x(n_1)$ 与 $x(n_2)$ 的取值互不影响时，将有

$$\left.\begin{aligned} p_{x(n_1)|x(n_2)}(x_1/x_2) &= p_x(x_1, n_1) \\ p_{x(n_2)|x(n_1)}(x_2/x_1) &= p_x(x_2, n_2) \end{aligned}\right\} \tag{1-9}$$

于是，$x(n_1)$ 与 $x(n_2)$ 彼此独立时有

$$p_x(x_1, n_1; x_2, n_2) = p_x(x_1, n_1) \cdot p_x(x_2, n_2) \tag{1-10}$$

对于一个一般意义下的离散时间随机过程(或随机信号)，需要用到所有各时间点上的随机变量的多维联合概率分布。设 n_1，n_2，…，n_N 为 N 个任意整数，则 N 个随机变量 $x(n_1)$，$x(n_2)$，…，$x(n_N)$ 的 N 维联合分布函数

$$P_x(x_1, n_1; x_2, n_2; \cdots; x_N, n_N) = P[x(n_1) \leqslant x_1, x(n_2) \leqslant x_2, \cdots, x(n_N) \leqslant x_N] \tag{1-11}$$

为随机序列 $\{x(n), n \in Z\}$ 的 N 维分布函数。若$[x(n_1), x(n_2), \cdots, x(n_N)]$为 N 维连续型随机向量，且 $P_x(x_1, n_1; x_2, n_2; \cdots; x_N, n_N)$ 关于 x_1，x_2，…，x_N 的 N 阶混合偏导数存在，则有

$$p_x(x_1, n_1; x_2, n_2; \cdots; x_N, n_N) = \frac{\partial^N P_x(x_1, n_1; x_2, n_2; \cdots; x_N, n_N)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_N} \tag{1-12}$$

$p_x(x_1, n_1; x_2, n_2; \cdots; x_N, n_N)$ 称为随机序列 $\{x(n), n \in Z\}$ 的 N 维联合概率密度。而且，正像二维概率密度蕴涵一维概率密度一样，我们也可以从一个 N 维概率密度求得所有低于 N 维的概率密度。但对于一个概率特性不随时间推移而变化的平稳随机过程，用它的二维联合概率分布已可充分描述其统计特性。

如果一个离散时间随机过程的有限维分布不随时间的平移而改变，即对任意 $N \geqslant 1$，$n_1, n_2, \cdots, n_N \in Z$ 和整数K，有

$$P_x(x_1, n_1+K; x_2, n_2+K; \cdots; x_N, n_N+K) = P_x(x_1, n_1; x_2, n_2; \cdots; x_N, n_N) \tag{1-13}$$

则称之为严平稳的随机序列.

既然严平稳随机序列的概率特性不随时间的平移而变化，因此有

$$p_x(x, n) = p_x(x, n+k) = p_x(x, 0) = p_x(x) = p_1(x) \tag{1-14}$$

即各时间点上的一维概率特性相同(今后一维概率特性统一用脚标 1 表示)，也即平稳随机序列的一维概率特性与时间无关。同样地，它的二维概率密度为(当 $k=-n_1$ 时)

$$\begin{aligned} p_x(x_1, n_1; x_2, n_2) &= p_x(x_1, n_1+k; x_2, n_2+k) \\ &= p_x(x_1, 0; x_2, n_2-n_1) \\ &= p_2(x_1, x_2; m) \end{aligned} \tag{1-15}$$

即平稳随机序列的二维概率特性只与两点间的时间差 $m = n_2 - n_1$ 有关，与时间的起始点无关；任何在时间轴上相隔相同距离 m 的两点的两个随机变量的二维联合概率密度均相同。例如，在图 1.3 中 a、b 两点间的联合概率密度与 c、d 两点以及 e、f 两点间的联合概率密度均相同。(今后二维概率特性用脚标 2 表示)。而各不同点间的相互关系都可以包括在同一二维概率密度随 m 变化的关系之中。于是，对于平稳随机序列，只需用二维概率密度 $p_2(x_1, x_2, m)$ 即能在统计意义上作充分描述。

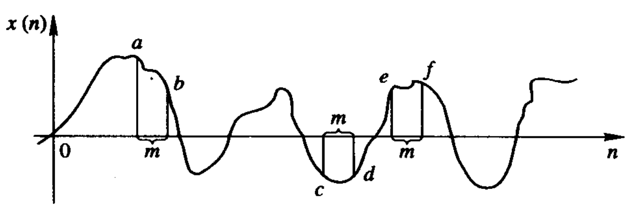


图 1.3　平稳随机过程的二维概率特性只与两点之间的时间差 m 有关

必须指出，对于两个随机过程，即使所有时间点上的一维概率特性相同，如果它们在不同时间点上取值之间的相关性(波及性)不同，它们的样本体现形式也会不同。图 1.4 列出了一对例子。图中的(a)与(b)分别表示两个随机过程的样本。即使在所有时间点上它们的一维概率分布相同，但图(a)的前后相关弱，图(b)的前后相关强，这使得图(a)与图(b)的表现形式很不相同(图(a)变化快；图(b)变化慢)。因此，对于一个随机过程，需要用多维联合概率特性来描述，而对于平稳随机过程，则需要用二维联合概率分布才能作充分表征。今后如不特别说明，所讨论的随机信号均认为是平稳随机序列。

图 1.4 相关性对随机过程的影响

(a) 前后相关弱；(b) 前后相关强

由于自相关函数是二维概率特性的"泛函"，因此，当二维概率特性与基准点无关，而只与时间差 m 有关时，自相关函数必与 n 无关而只与 m 有关，但逆关系一般并不成立。因此，我们称二维概率特性与基准点无关而只与 m 有关的随机序列为严(或狭义)平稳随机序列，而称自相关函数只与 m 有关而与 n 无关的随机序列为宽(或广义)平稳随机序列。今后我们所提到的平稳随机过程(序列)如不特别说明，均指宽平稳随机序列。

设 $\{x(n)\}$ 和 $\{y(n)\}$ 为两个随机序列，对于任意的自然数 N 和 M 及相应的任意 $N+M$ 个整数 $n_1, n_2, \cdots, n_N; m_1, m_2, \cdots, m_M$，则 $N+M$ 个随机变量 $x(n_1), x(n_2), \cdots, x(n_N); y(m_1), y(m_2), \cdots, y(m_M)$ 的联合分布函数

$$\begin{aligned}&P_{xy}(x_1, n_1; x_2, n_2; \cdots; x_N, n_N; y_1, m_1; y_2, m_2; \cdots; y_M, m_M)\\&= P[x(n_1) \leqslant x_1, x(n_2) \leqslant x_2, \cdots, x(n_N) \leqslant x_N; y(m_1) \leqslant y_1,\\&\quad y(m_2) \leqslant y_2, \cdots, y(m_M) \leqslant y_M]\end{aligned} \tag{1-16}$$

称为 $\{x(n)\}$ 和 $\{y(n)\}$ 的 $N+M$ 维联合分布函数。若 $P_{xy}(x_1, n_1; x_2, n_2; \cdots; x_N, n_N; y_1, m_1; y_2, m_2; \cdots; y_M, m_M)$ 关于 $x_1, x_2, \cdots, x_N, y_1, y_2, \cdots, y_M$ 的 $N+M$ 阶混合偏导数存在，则 $\{x(n)\}$ 和 $\{y(n)\}$ 的 $N+M$ 维联合概率密度函数为：

$$\begin{aligned}&p_{xy}(x_1, n_1; x_2, n_2; \cdots; x_N, n_N; y_1, m_1; y_2, m_2; \cdots; y_M, m_M)\\&= \frac{\partial^{N+M} P_{xy}(x_1, n_1; x_2, n_2; \cdots; x_N, n_N; y_1, m_1; y_2, m_2; \cdots; y_M, m_M)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_N \partial y_1 \partial y_2 \cdots \partial y_M}\end{aligned} \tag{1-17}$$

若有

$$\begin{aligned}&P_{xy}(x_1, n_1; x_2, n_2; \cdots; x_N, n_N; y_1, m_1; y_2, m_2; \cdots; y_M, m_M)\\&= P_x(x_1, n_1; x_2, n_2; \cdots; x_N, n_N)\, P_y(y_1, m_1; y_2, m_2; \cdots; y_M, m_M)\end{aligned} \tag{1-18}$$

或

$$\begin{aligned}&p_{xy}(x_1, n_1; x_2, n_2; \cdots; x_N, n_N; y_1, m_1; y_2, m_2; \cdots; y_M, m_M)\\&= p_x(x_1, n_1; x_2, n_2; \cdots; x_N, n_N)\, p_y(y_1, m_1; y_2, m_2; \cdots; y_M, m_M)\end{aligned} \tag{1-19}$$

则称随机序列 $\{x(n)\}$ 和 $\{y(n)\}$ 是相互独立的。

若随机序列 $\{x(n)\}$ 和 $\{y(n)\}$ 的联合概率分布不随时间的平移而改变，且与起始时间无关，则称这两个随机序列 $\{x(n)\}$ 和 $\{y(n)\}$ 为联合严平稳的或严平稳相依的随机序列。

1.2.2 离散时间随机过程的数字特征

前面讨论的概率分布可以在统计意义上充分描述一个随机序列，但在实际问题中，要

得到一个随机过程各点上的随机变量的分布函数是很困难的，而且，在很多实践中，往往只需要知道概率分布的某些特征量就足以描绘这个过程了。均值、方差与自相关函数就是其中最主要的数字特征。当我们已经知道随机过程的分布函数的形式(例如，高斯分布、泊松分布或均匀分布等)时，又往往只要知道它的某些特征量，就已充分说明它的概率分布了。例如，对于高斯分布形式，只要知道它的均值 m_x 与方差 σ_x^2 这两个特征量，就等于完全说明了它的概率密度函数，这是因为高斯分布的概率密度函数为

$$p_x(x,\ n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}\exp\left(-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right) \tag{1 - 20}$$

这些特征量的性质及其定义的详细解释，在先行概率论课程中已作过讨论。离散时间系统和连续时间系统在这方面是完全类同的，所以在这里只简单地叙述一下定义，以统一数学符号的表达形式，为后面的应用做好准备。

1）数学期望(均值)

随机变量 $x(n)$ 的均值(用 $m_x(n)$ 表示）定义为

$$m_x(n) = E[x(n)] \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x p_1(x)\mathrm{d}x \tag{1 - 21}$$

如果 $x(n)$ 是电压或电流，$E[x(n)]$ 可理解为第 n 点上电压或电流的直流分量。

2）均方值

随机变量 $x(n)$ 的均方值定义为 $|x(n)|^2$的期望

$$E[|x(n)|^2] \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} |x|^2 p_1(x)\ \mathrm{d}x \tag{1 - 22}$$

如果随机变量 $x(n)$ 是电压或电流，$E[|x(n)|^2]$ 可理解为在第 n 点上这个电压或电流在 1 Ω 电阻上的平均功率。

3）方差

随机变量 $x(n)$ 的方差(用 $\sigma_x^2(n)$ 表示）定义为$[x(n)-E(x(n))]$ 的均方值，即

$$\sigma_x^2(n) \triangleq E\{|x(n)-E(x(n))|^2\} = E\{|x(n)-m_x(n)|^2\} \tag{1 - 23}$$

如果 $x(n)$ 是电压或电流，$\sigma_x^2(n)$ 可理解为电压或电流的起伏分量(已除去直流分量）在 1 Ω 电阻上耗散的平均功率。利用式(1 - 23)容易证明

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_x^2(n) = E[|x(n)|^2] - |m_x^2(n)| \\ \text{或}\quad &E[|x(n)|^2] = \sigma_x^2(n) + |m_x^2(n)| \end{aligned}\right\} \tag{1 - 24}$$

即，平均功率＝交流功率＋直流功率。

以上三个特征量仅与一维概率密度 $p_1(x)$ 有关。对于平稳随机过程，其一维概率密度与时间无关，故一个平稳随机序列的 $m_x(n)$、$E[|x(n)|^2]$、$\sigma_x^2(n)$ 均是与时间 n 无关的常数，可以将变量 n 去掉(今后我们将用 m_x 与 σ_x^2 分别表示 $m_x(n)$ 与 $\sigma_x^2(n)$)。

与二维概率分布有关的统计特性主要有自相关函数和自协方差函数。

4）自相关函数

一个平稳随机序列中两个时间点上的随机变量 $x(n_1)$ 与 $x(n_2)$ 之间的自相关函数(用 $\phi_{xx}(m)$ 表示）定义为

$$\begin{aligned}\phi_{xx}(m) &\triangleq E[x^*(n_1)x(n_2)] = E[x^*(n)x(n+m)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1^* x_2 p_2(x_1,\ x_2;\ m)\ \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\end{aligned} \tag{1 - 25}$$

这里 $m=n_2-n_1$ 为时移差。把随机变量 $x^*(n_1)$ 与 $x(n_2)$ 相乘，就意味着把它们中间的共性成分进行了相乘。因为共性成分的相乘永远是带确定符号关系的，而对实信号来说非共性成分相乘随机地“有正有负”，平均来讲趋于相互“抵消”。因此，自相关函数能把 $x^*(n_1)$ 与 $x(n_2)$ 中的共性成分提取出来，它是随机信号 $\{x(n)\}$ 在 n_1 点与 n_2 点间的波及性的指标。

5）自协方差函数

一个平稳随机序列的协方差函数(用 $\gamma_{xx}(m)$ 表示）定义为

$$\gamma_{xx}(m) \triangleq E[(x(n)-m_x)^*(x(n+m)-m_x)] \tag{1-26}$$

自相关函数与自协方差函数是衡量随机序列在不同时刻上的随机变量之间的相关性的物理量。利用式(1-26)可以看出 $\gamma_{xx}(m)$ 与 $\phi_{xx}(m)$ 之间有如下关系：

$$\gamma_{xx}(m)=\phi_{xx}(m)-|m_x|^2 \tag{1-27}$$

对于平稳随机序列，m_x 为一常数，因此 $\gamma_{xx}(m)$ 与 $\phi_{xx}(m)$ 只相差一个常数 $|m_x|^2$，它们之间并无本质的差别。

由式(1-25)、(1-26)及(1-27)可见，相关函数决定于二维概率分布 $p_2(x_1, x_2; m)$。对于平稳随机序列，二维概率分布仅与时间差 m 有关，而与起始时间无关，因此相关函数也只与 m 有关。前面已经指出，二维概率分布可以充分表达一个平稳随机序列的统计特性，因为它不仅蕴涵了相关性，也蕴涵了一维概率分布。由二维概率分布决定的相关函数，显然也有同样的性质，它不仅表达了相关性，也隐含了一维特征量。因此自相关函数 $\phi_{xx}(m)$ 或自协方差函数 $\gamma_{xx}(m)$ 是表征一个随机过程的最重要的统计特性。

以上讨论了一个随机序列在不同时刻的两个随机变量之间的相关程度的两种量度。对于两个平稳随机过程 $\{x(n)\}$ 和 $\{y(n)\}$ 的随机变量间的相关性，则可以用互相关函数和互协方差函数来描述。

6）互相关函数

$$\phi_{xy}(m)=E[x^*(n_1)y(n_2)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x^*yp_{xy}(x, y; m)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{1-28}$$

7）互协方差函数

$$\gamma_{xy}(m)=E[(x(n_1)-m_x)^*(y(n_2)-m_y)]=\phi_{xy}(m)-m_x^*m_y \tag{1-29}$$

1.2.3 离散时间平稳过程相关序列与协方差序列的性质

两个实的、平稳相关的平稳随机序列 $\{x(n)\}$ 和 $\{y(n)\}$ 中的 $\{x(n)\}$ 的自相关、自协方差及两序列间的互相关和互协方差序列分别定义为

$$\phi_{xx}(m)=E[x(n)x(n+m)] \tag{1-30}$$

$$\gamma_{xx}(m)=E[(x(n)-m_x)(x(n+m)-m_x)] \tag{1-31}$$

$$\phi_{xy}(m)=E[x(n)y(n+m)] \tag{1-32}$$

$$\gamma_{xy}(m)=E[(x(n)-m_x)(y(n+m)-m_y)] \tag{1-33}$$

它们具有下列性质(其中大部分性质均可从以上四个定义式(1-30)～(1-33)导出)。

性质 1

$$\begin{aligned}\gamma_{xx}(m)&=\phi_{xx}(m)-m_x^2\\ \gamma_{xy}(m)&=\phi_{xy}(m)-m_xm_y\end{aligned} \tag{1-34}$$

当 $m_x=0$ 时，相关序列和协方差序列相等

$$\gamma_{xx}(m) = \phi_{xx}(m)$$
$$\gamma_{xy}(m) = \phi_{xy}(m)$$

性质 2

$$\left.\begin{aligned} \phi_{xx}(0) &= E[x^2(n)] = \text{均方值} \\ \gamma_{xx}(0) &= \phi_{xx}(0) - m_x^2 = E[x^2(n)] - m_x^2 = \sigma_x^2 = \text{方差} \end{aligned}\right\} \tag{1-35}$$

性质 3 $\phi_{xx}(m)$ 和 $\gamma_{xx}(m)$ 都是偶函数，即

$$\left.\begin{aligned} \phi_{xx}(m) &= \phi_{xx}(-m) \\ \gamma_{xx}(m) &= \gamma_{xx}(-m) \end{aligned}\right\} \tag{1-36}$$

这是因为 $\phi_{xx}(m) = E[x(n)x(n+m)]E[x(n+m)x(n)] = \phi_{xx}(-m)$

性质 4

$$\left.\begin{aligned} \phi_{xy}(m) &= \phi_{yx}(-m) \\ \gamma_{xy}(m) &= \gamma_{yx}(-m) \end{aligned}\right\} \tag{1-37}$$

这是由于

$$\phi_{xy}(m) = E[x(n)y(n+m)] = E[y(n+m)x(n)] = \phi_{yx}(-m)$$

性质 5

$$\left.\begin{aligned} |\phi_{xx}(m)| &\leqslant \phi_{xx}(0) \\ |\gamma_{xx}(m)| &\leqslant \gamma_{xx}(0) \end{aligned}\right\} \tag{1-38}$$

这是因为

$$E[x(n) \pm x(n+m)]^2 \geqslant 0$$
$$E[x^2(n) \pm 2x(n)x(n+m) + x^2(n+m)] \geqslant 0$$

又因 $\{x(n)\}$ 是平稳随机过程，故

$$E[x^2(n)] = E[x^2(n+m)] = \phi_{xx}(0)$$

代入上面的不等式，可得

$$2\phi_{xx}(0) \pm 2\phi_{xx}(m) \geqslant 0$$

所以 $$\phi_{xx}(0) \geqslant |\phi_{xx}(m)|$$

而 $\gamma_{xx}(m)$ 与 $\phi_{xx}(m)$ 只差一常数 m_x^2，故有相仿的性质(取 $y(n) = x(n) - m_x$，仿以上证明即可)。

性质 6 如果 $y(n) = x(n-m)$，则

$$\left.\begin{aligned} \phi_{yy}(m) &= \phi_{xx}(m) \\ \gamma_{yy}(m) &= \gamma_{xx}(m) \end{aligned}\right\} \tag{1-39}$$

这是由于平稳性带来的。

性质 7 对于实际上遇到的许多随机序列，m 愈大则相关性愈小，当 m 趋于无穷大时，可认为不相关。事实上，若平稳随机序列 $\{x(n)\}$ 中不含有任何周期分量，则有

$$\begin{cases} \lim\limits_{m\to\infty} \phi_{xx}(m) = E[x(n)x(n+m)] = E[x(n)]E[x(n+m)] = m_x^2 \\ \lim\limits_{m\to\infty} \gamma_{xx}(m) = \lim\limits_{m\to\infty} \phi_{xx}(m) - m_x^2 = 0 \\ \lim\limits_{m\to\infty} \phi_{xy}(m) = m_x m_y \\ \lim\limits_{m\to\infty} \gamma_{xy}(m) = 0 \end{cases} \tag{1-40}$$

由以上性质 2、3、5 和性质 7 可得到图 1.5 的有关表示。图中 $\gamma_{xx}(m)$ 与 $\phi_{xx}(m)$ 除相差一个常量 m_x^2 外，其它特性相同。

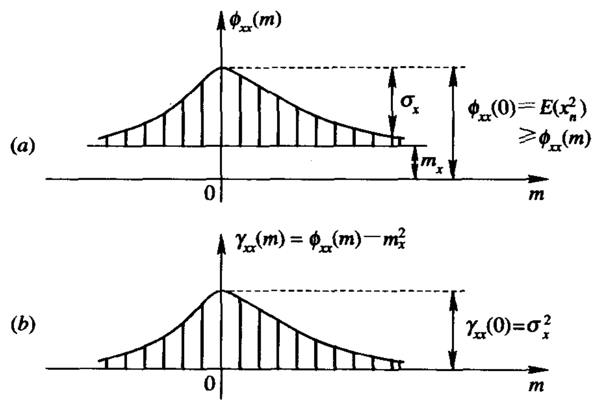


图 1.5　相关函数的特性

(a) $\phi_{xx}(m)$ 的特性；(b) $\gamma_{xx}(m)$ 的特性

$\phi_{xx}(m)$ 是一个随机过程 $\{x(n)\}$ 的最主要的统计表征，它不仅说明了相关性，并且隐含了 m_x、σ_x^2、$E[x^2(n)]$ 等主要特征量，例如：

$$\left.\begin{aligned} &E[x^2(n)] = \phi_{xx}(0) \\ &m_x^2 = \phi_{xx}(\infty) \\ &\sigma_x^2 = E[x^2(n)] - m_x^2 = \phi_{xx}(0) - \phi_{xx}(\infty) \end{aligned}\right\} \tag{1-41}$$

因此，对于一个平稳随机过程，只要知道它的自相关函数 $\phi_{xx}(m)$，就等于知道了该随机过程的所有主要特征量。故对于一个随机序列的统计描述，可以由这个随机序列的自相关函数来高度概括。

对于多维随机向量

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{1-42}$$

则其均值向量为

$$E[\boldsymbol{X}] = \begin{bmatrix} E[x_1] \\ E[x_2] \\ \vdots \\ E[x_n] \end{bmatrix} \tag{1-43}$$

其自协方差阵定义为

$$\mathrm{cov}[\boldsymbol{X}] = E\{[\boldsymbol{X} - E(\boldsymbol{X})][\boldsymbol{X} - E(\boldsymbol{X})]^{\mathrm{T}}\} \tag{1-44}$$

它是一个 $N \times N$ 的方阵，并且是一个非负定阵，其中 T 代表矩阵的转置。

如果随机变量 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 均为随机向量，则其互协方差阵定义为

$$\mathrm{cov}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = E\{[\boldsymbol{X} - E(\boldsymbol{X})][\boldsymbol{Y} - E(\boldsymbol{Y})]^{\mathrm{T}}\} \tag{1-45}$$

如果随机变量 $\boldsymbol{X}$、$\boldsymbol{Y}$ 不是向量，而是复数，则式(1-44)、(1-45)中的转置符号应改为共轭