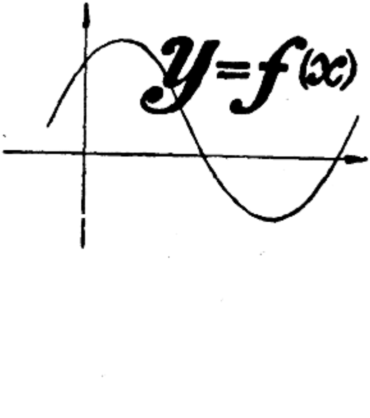
十年制学校实験用課本

（全日制）

中学数学

第五册



十年制学校实验用课本
（全日制）

中 学 数 学

第五册

北京师范大学数学系
普通教育研究室 编

北京市书刊出版业营业许可证出字第二号
人民教育出版社出版（北京景山东街）
新华书店发行
人民教育印刷厂印装

统一书号：K 7012·1474 字数：90 千
开本：787×1092 毫米 1/32 印张：4[illegible]
1961 年第一版
第一版 1962 年 1 月第一次印刷
北京：1—200 册

定价 0.23 元

本册内容和說明

中学数学共分六册，本书是第五册，供十年制学校九年級使用.

本书的內容共分三章: (一)极坐标(二)参数方程(三)平面向量与复数.

由于学生已有知識水平的限制，在这一册中我們只介紹上述內容的最基本的方面. 虽然篇幅不多，然而它們却是进一步学习数学和物理等知識的常用的重要工具. 因此希望教师在教学过程中、在学生可能接受的条件下，注意使学生充分地認識到这点，从而使它們自覺地去掌握这些最基本的概念和方法，熟練有关的各种运算.

下面我們对各章的內容作一簡单的說明.

第一章极坐标，目的是要使学生了解平面上的点的位置除了用直角坐标来确定以外，还可以用极坐标来确定. 正是因为这样，我們就可能根据点的运动規律，找出这个点运动时的极坐标方程，并作出这方程所表示的曲綫. 在了解这点的基础上，初步說明了极坐标和直角坐标的內在联系，使学生能掌握它們的互相轉化的方法. 至于极坐标的某些的应用，因为比較困难，所以課本中作为附录，仅供教学时参考.

第二章参数方程，不仅要求学生掌握参数方程的概念，同时要求学生了解参数的实际意义，从而能够在較簡单的問題中根据不同的情况来选擇参数. 因此，在教学过程中，教师需要結合具体的例子詳細地說明参数的选擇方法.

第三章平面向量与复数，重点是搞清这些知識中的基本概念和熟練有关的运算.

平面向量这一节，基本概念是向量和向量的射影，要注意向量和有向綫段的区别和联系. 但要清楚地掌握向量的射影，又必須弄清有向綫段的大小. 在求向量的射影时，特别要注意符号的确定.

复数的应用相当广泛，为了更結合实际，更便于解决实际問题，課本中直接用向量来引入复数. 用这种方法来引入，还有助于加深学生对复数的了解，克服学生中認为复数抽象，不易掌握的困难.

在搞清概念的同时，必須使学生熟練地掌握它的运算. 在运算中，应該特别注意虛单位 i 的运算法則.

至于复数的应用，由于学生知識的限制，只能举一些例子来加以說明. 其目的，一方面是通过具体的例子使学生进一步理解引入复数的必要；另一方面，也是更重要的一方面是希望通过这些例子的介紹，使学生能更进一步了解利用复数这一工具来研究各种实际問題的思想方法.

諾模图（算图）是一种常用的計算图表，課本中着重介紹了它的构造原理和使用方法. 考慮到各地条件的不同，因此作为附录. 使用本书时，可根据具体情况，决定取舍.

前　　言

在党的总路綫、大跃进、人民公社三面紅旗的照耀下，我国普通教育事业有了巨大的跃进。1960 年北京师范大学数学系师生，在党的領导下，深入到工厂、人民公社、学校、科学研究机关等进行了調查。根据“适当縮短年限，适当提高程度，适当控制学时，适当增加劳动”的精神，于 1960 年 4 月編出了一套九年一貫制(全日制)学校数学課試用教材，并开始在北京几个学校进行了試驗。从同年暑假开始，又根据試驗的經驗并学习了全国各地区各兄弟单位編写的新教材的优点，把这套教材改編成現在这套十年制(全日制)学校实驗用数学教材。

这套数学教材的編写尽量遵循以下五点要求：

一、教材內容要为社会主义服务，为发展农业以及現代化工业生产和現代科学技术服务。

二、教材內容要保証学生巩固掌握数学基础知識，并获得良好的思維能力、空間想象力、解决实际問題的能力以及計算、測量、繪制的能力等必要的基本訓練。

三、应該以运动变化、相互联系的观点，充分揭露数学知識的內在联系，以加强数学課的科学性与系統性。为此，十年制普通学校的数学教学体系的安排：以函数为綱，尽量作到数与形相結合，概念、計算、作图、測量相結合是比較合适的。

四、教材內容要貫徹理論与实际相結合的精神。增加联系实际的知識，尽量作到概念由实际引入，問題从实际需要提出。

从实际中吸取解决問題的方法，加深知識的实际应用，密切与相邻学科的联系，以及課內外的配合等。

五、教材的分量与难易程度要适合学生实际接受能力与訊識发展的过程，注意循序渐进。

这套教材沒有經过充分的試驗。因此在使用时还需要从学生已有知識基础、接受程度以及教师的实际情况出发，灵活地应用。要保証对基础知識部分有足够的时間进行系統的講解、練习、复习与巩固。如果时間不够可以删去各册中的附录以及带 * 号部分，如果时間有較多的富裕时，可以增加微积分学的最初步知識。

在編写和修改过程中，我們得到了許多单位热情的帮助，給我們提了許多宝貴的意見。特别是在中国数学会及北京数学会召开的北京数学工作者、数学教育工作者数学教学改革座談会上对本教材的进一步修改提出了許多宝貴的意見；人民教育出版社对我們具体編写工作給予許多方面的巨大帮助，并直接参加了本教材的修改工作；黑龙江、吉林、辽宁、浙江、四川、广西等省教育厅分别組織了有經驗的数学教育工作者对本教材进行了仔細訊真的审查，提出了許多宝貴的意見。这些都对我們帮助很大，在这里表示衷心感謝。

由于时間仓促，調查研究工作作得还很不够，試驗的时間还不长，一定还存在許多缺点和錯誤，我們热情希望教师和讀者提出意見，使本教材不断地得到修改、补充，使之日益完善。

北京师范大学数学系普通教育研究室

1961 年 4 月

目　录

第一章　极坐标

§1. 极坐标的建立

确定平面上点的位置的方法，不只直角坐标一种，在实地测量时，为了确定目标位置，还常用方位角和距离．例如，天津在北京的正东偏南 50°，距北京 108 公里．这种用角度和距离来确定平面上点的位置的方法，叫极坐标法．

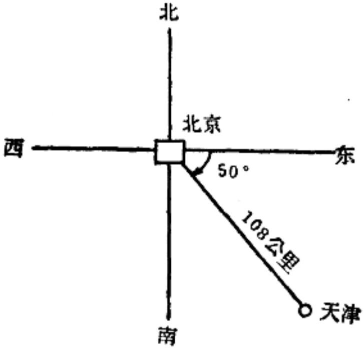


图　1.1

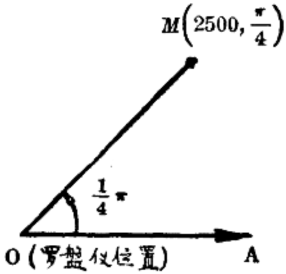


图　1.2

在平面上取一点 O 称为极点，从 O 引射綫 OA 称为极軸，再选定一个长度单位；若 M 为平面上任意点，設 $OM=r$，称 r 为极徑；OM 与 OA 軸的夹角 θ 称为极角，则 M 点可用 r、θ 两个数来表示，r、θ 就叫做 M 点的极坐标，記作 (r, θ)（θ 以弧度作单位）．例如我們用罗盘仪測量目标——高山时，由罗盘仪讀出目标在正南方向偏东 45°，測量仪所在的地方和目标距离为 2500 米，高山的位置就是以 $\left(2500, \frac{\pi}{4}\right)$ 为极坐标的一个点（如图 1.2）．

这里极角 θ 的正負与三角函数中的規定相同．以极軸为始边，逆时針方向为正，順时針方向为負，显然由 OA 到 OM 是逆时針方向，θ 取正 $\frac{\pi}{4}$.

极徑 r 的正負規定如下：若 M 点在极角的終边上，則 r 为正，若 M 点在极角的終边的相反方向的射綫上則 r 为負．

例 在极坐标紙中指出下列各点．

$$M_1\left(8, \frac{\pi}{3}\right);\ M_2\left(-8, \frac{\pi}{3}\right);\ M_3\left(8, -\frac{\pi}{3}\right);\ M_4\left(8, \frac{4\pi}{3}\right);$$

$$M_5\left(8, \frac{4\pi}{3}\right);\ M_6\left(8, \frac{301}{3}\pi\right);\ M_7\left(8, -\frac{301}{3}\pi\right).$$

用极坐标紙描点很方便，这种紙画有通过极点的許多射綫，容易作出 θ，又画有以极点为中心的許多圓，容易作出 r．根据給定的坐标，就可以将点描出(图 1.3)

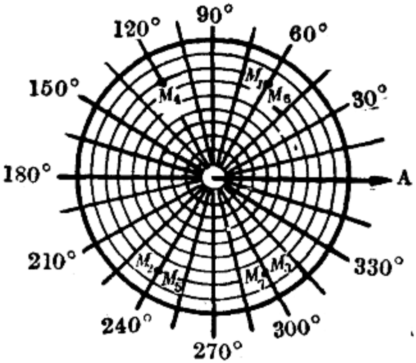


图 1.3

由此可以看出在极坐标里，任意一对实数 (r, θ) 可以决定平面上一点的位置；但平面上一点的极坐标可有无数对，如

$\left(8,\frac{\pi}{3}\right)$, $\left(8,\frac{301}{3}\pi\right)$…都是 M_1 点的极坐标; $\left(-8,\frac{\pi}{3}\right)$, $\left(8,\frac{4\pi}{3}\right)$…都是 M_2 点的极坐标.

特别地,极点 O 的极徑是零,极角不定,可取任意值,所以极点的极坐标可以表示为 (O,O) 或者 (O,θ) (θ 为任意值).

在实际中,极坐标很有用,在軍事部門常常用极坐标来确定射击目标的位置. 例如海軍用左舷多少度,距离多少鏈(1 鏈 =182.88 米)来确定敌艦的位置. 极坐标不仅是确定目标位置的一种方法,同时,用极坐标来研究某些有关方向的問題时,比用直角坐标也較为方便.

§2. 极坐标方程及作图

一. 极坐标方程.

我們已經知道了点的极坐标, 下面我們将根据图形建立极坐标方程. 最簡单的图形是以极点为圓心的圓, 圓上任意一点的极坐标滿足方程 $r=a$(a 是常数, 也就是圓的半徑, θ 取任意值), 反过来, 滿足方程 $r=a$ 的任意一对实数 (r,θ) 都是圓上点的极坐标(图 1.4)

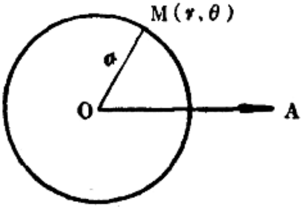


图 1.4

同样方程 $\theta=\alpha$(α 是常数, r 任意)代表与极軸成定角 α 的直線(1.5)

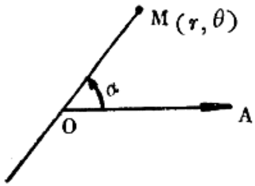


图 1.5

在极坐标系中曲綫可用含变量 r, θ 的方程来表示，如果曲綫上任何一点的极坐标 (r,θ) 都滿足方程 $f(r,\theta)=0$ 并且反之，以滿足方程的任何一对数 r,θ 为坐标的点都在曲綫上. 那么，方程 $f(r,\theta)=0$ 就称为該曲綫的极坐标方程. 我們可以根据已知曲綫上动点运动的条件建立这个曲綫的极坐标方程.

例 已知动点到一定点所連綫段之长和这綫段与过該定点的一定射綫所夹角之比是一常数 k, $(k>0)$ 求动点的軌迹方程.

解: 根据已知条件，可以定点 O 为极点，过定点的定射綫 OA 为极軸建立极坐标系.

設动点 P 的坐标是 (r,θ).

則动点 P 到定点 O 所联綫段的长就是 r, 这綫段与定射綫所夹的角就是 θ, 根据动点运动的条件，得动点的軌迹方程是:

$$\frac{r}{\theta}=k$$

即 $$r=k\theta. \qquad (k>0).$$

二. 极坐标方程的作图:

要作出极坐标方程 $F(r,\theta)=0$ 所表示的曲綫，通常可以用 θ 来表示 r 即使 $r=f(\theta)$，再給 θ 几个値，求出 r 的各个对应値. 然后在坐标平面上描出这些坐标所表示的点，最后将这些点用平滑的曲綫連接起来.

例 1. 作出方程 $r=k\theta$ 的曲綫.

解: 列出 r,θ 的对应数値表.

θ	$-\frac{9}{4}\pi$	-2π	$-\frac{7}{4}\pi$	$-\frac{3}{2}\pi$	$-\frac{5}{4}\pi$	$-\pi$	$-\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0
r	$-\frac{9K}{4}\pi$	$-2K\pi$	$-\frac{7K}{4}\pi$	$-\frac{3K}{2}\pi$	$-\frac{5K}{4}\pi$	$-K\pi$	$-\frac{3K}{4}\pi$	$-\frac{K}{2}\pi$	$-\frac{K}{4}\pi$	0
θ	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	2π	$\frac{9}{4}\pi$	…
r	$\frac{K}{4}\pi$	$\frac{K}{2}\pi$	$\frac{3K}{4}\pi$	$K\pi$	$\frac{5K}{4}\pi$	$\frac{3K}{2}\pi$	$\frac{7K}{4}\pi$	$2K\pi$	$\frac{9K}{4}\pi$	…

作出各点并用平滑曲綫把它們連接起来，即得所求作的曲綫(图 1.6)

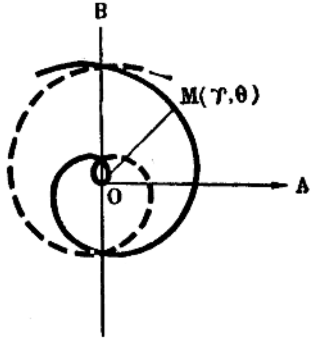


图 1.6

由图中看出曲綫是关于过极点O而与极軸垂直的直綫$OB\left(\text{即 } \theta=\frac{\pi}{2}\right)$是对称的. 在直角坐标系里我們曾經利用曲綫关于 x 軸, y 軸及原点的对称性，使描图更方便. 在极坐标系里，我們同样也可考慮这三种对称性.

由例 1 的数値表中可以看出点(r, θ)关于OB对称的点是$(-r, -\theta)$，或$(r, \pi-\theta)$. 同时我們也很容易得到点(r, θ)关于极軸对称的点是

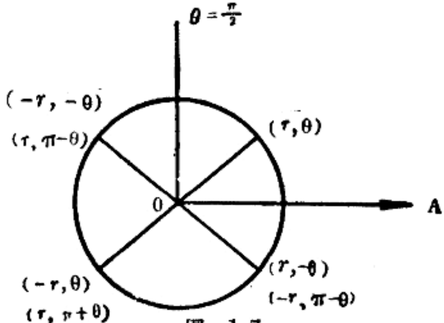


图 1.7

$(r,-\theta)$或$(-r,\pi-\theta)$. 点(r,θ)关于极点对称的点是$(-r,\theta)$或$(r,\pi+\theta)$.

因此，若用$(-r,-\theta)$或$(r,\pi-\theta)$代替原方程中的(r,θ)而方程不改变，则其所表示的曲綫是关于直綫OB对称的.

若用$(r,-\theta)$或$(-r,\pi-\theta)$代替原方程中的(r,θ)而方程不改变，则其所表示的曲綫是关于极軸对称的.

若用$(-r,\theta)$或$(r,\pi+\theta)$代替原方程中的(r,θ)而方程不改变，则其所表示的曲綫是关于极点对称的.

为了作图的方便与准确，在列表描图以前可对方程所表示的曲綫作适当的討論.

例如作方程$r=k\theta(k>0)$的曲綫.

解： 1. 討論

1) 当$\theta=0$时，$r=0$. 所以曲綫經过极点.

2) 用$(-r,-\theta)$代替原方程中之(r,θ)原方程不改变，∴曲綫关于$\theta=\dfrac{\pi}{2}$对称.

3) 当θ由第一象限起不断增加时，r的值也随θ的值成正比例地增加，曲綫离极点越来越远.

2. 列表：取θ的某些正值，按所給的方程$r=k\theta$作出对应的r值，列表如下：

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	3π	……
r	0	$\frac{\pi}{4}K$	$\frac{\pi}{2}K$	πK	$\frac{3}{2}\pi K$	$2\pi K$	$3\pi K$	……

3. 描点作图：按表中所列的对应数值描点并繪图，作出如

图 1.6 中的实綫. 再根据曲綫关于 $\theta=\frac{\pi}{2}$的对称性, 繪出当θ为負值时的曲綫, 即图中的虛綫. 这曲綫称为**阿基米德螺綫**. 阿基米德螺綫上的点, 是同时进行勻速圓周运动和勻速直綫运动的. 在車床上加工圓形零件时, 由于卡头里装有阿基米德螺綫型的零件做等速运动,把零件卡住,这样就能保証零件的中心和机器轉动軸一致.

例 2. 作出方程 $r=a(1-\cos\theta)$所表示的曲綫.

解: 1. 討論

1) 当$\theta=0$时, $r=0$. 所以曲綫經过极点.

2) 用$(r, -\theta)$代替(r, θ),因 $\cos\theta=\cos(-\theta)$,所以方程不改变,曲綫关于极軸对称.

3) 当θ在第一象限变动时, $\cos\theta$ 由 1 变到 O, r 则由 O 逐漸增大到 a, θ 繼續变化增加到 π, r 得最大值 $2a$. 当θ由π逐漸增加时, r 反而逐漸縮小, $\theta=2\pi$, r 达最小值 O. 如让θ由2π繼續增加,曲綫又依θ由O到2π的軌迹运动, 因此这曲綫是封閉的.

2. 列表:取θ某些正值,按所給方程$r=a(1-\cos\theta)$求出对应的r值列表如下:

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	0	$0.13a$	$0.5a$	a	$1.5a$	$1.9a$	$2a$

3. 描点,作图:按表中所列的对应数値, 描点, 幷根据对称性作出方程所表示的曲綫.

方程 $r=a(1-\cos\theta)$所表示的曲綫称为心形綫.

某些自动化的机械凸輪的輪廓，常用心形綫. 这样能使与它接触的物体自动的作往返运动.

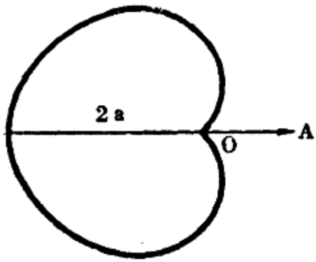


图 1.8

例 3. 作出方程 $r^2=a^2\cos 2\theta$ 所表示的曲綫

1. 討論

1) 当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，$r=0$. 曲綫經过极点

2) 用 $(-r,\theta)$ 代替原方程中之 (r,θ)，原方程不改变，∴曲綫关于极点对称. 用 $(-r,-\theta)$，$(r,-\theta)$ 分别代替 (r,θ) 原方程也不变，所以曲綫关于极軸和 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 都对称.

3) 将方程化簡得 $r=\pm\sqrt{\cos 2\theta}$，因为根号內不能取負值，所以 $\cos 2\theta\geqslant 0$，則 $-\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$，我們給出 θ 的一个值就可以得到 r 的两个絕对值相等，一个在終边上，一个在 θ 的終边的相反方向的射綫上的点，并且当 $\theta=0$ 和 π 时，r 取最大值 $|a|$，所以曲綫是封閉曲綫.

2. 列表:

θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
r	$\pm a$	$\pm 0.93a$	$\pm 0.7a$	0

3. 描点作圖. 按表中所列的数值描点，并根据对称性作出方程 $r^2=a^2\cos 2\theta$ 所表示的曲綫，这曲綫叫双紐綫.

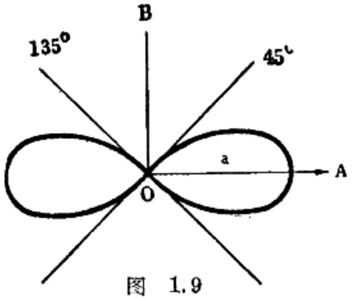


图 1.9

§3. 极坐标与直角坐标的关系

我們引进了极坐标的概念，并且知道了极坐标方程的建立与作图. 在实际应用中，为了方便有时要把直角坐标方程化为极坐标方程，也有时要把极坐标方程化为直角坐标方程. 所以必須掌握它們間的互化关系.

如图 1.10 我們先选定直角坐标系 XOY，然后把极坐标系的极点与直角坐标的原点重合，并取 OX 作为极軸. 設平面上任一点 M 的直角坐标为 (x, y)，极坐标为 (r, θ)，从图上可以看到:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \tag{1}$$

我們来証明公式(1):

1. 若 $r=0$，则公式(1)显然成立.

2. 若 $r>0$，根据三角函数的定义则有

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{r} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{r} \end{cases}$$

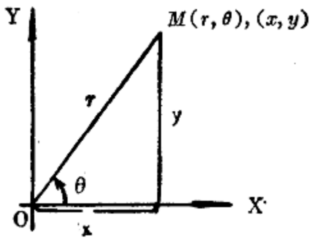


图 1.10