考研数学题库

线性代数习题集

（提高篇）

史荣昌　编著

机械工业出版社
China Machine Press

图书在版编目（CIP）数据

线性代数习题集（提高篇）/史荣昌编著. －北京：机械工业出版社，2002.4
（考研数学题库）
ISBN 7-111-10173-1

Ⅰ.线…　Ⅱ.史…　Ⅲ.线性代数-研究生-入学考试-习题　Ⅳ.0151.2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 020435 号

机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
责任编辑：马海宽
北京忠信诚胶印厂印刷 · 新华书店北京发行所发行
2002 年 4 月第 1 版第 1 次印刷
787mm×1092mm　1/16 · 11.75 印张

定　价：18.00 元

出版前言

由机械工业出版社华章教育会同北京大学数学学院等几所高校的名师策划、出版的考试数学系列丛书“考研题库”、“考研历年真题详解与考点分析”、“本科生题库”、“考研复习指导与典型例题分析”等共16本将陆续面世。这是为了帮助在校生和有志于攻读硕士学位的广大考生全面、系统地复习有关课程的内容，了解考研的最新信息而编写的一套题量较大、题型齐全、覆盖面广、难度及认知层次分布合理的系列丛书。本书的总体设计是在北京大学著名的命题专家指导下，根据教育部最新制定的“全国硕士研究生入学考试数学大纲”的有关要求，并结合作者多年来参加有关考试的命题、阅卷及辅导的经验而进行的。

本套丛书作者阵容强大

作者皆为北京大学、中国人民大学、北京理工大学、北方交通大学等多年从事数学基础教学以及参加过全国各地考研辅导的名师，具有丰富的教学经验，多次被评为各级优秀教师。他们所编写的教材、辅导书和讲授的课程在各校及历年参加研究生入学考试的考生中都有相当大的影响。

本套丛书体系明晰、内容精练

在“考研题库”中，包括《高等数学习题集(提高篇)》、《微积分习题集(提高篇)》、《线性代数习题集(提高篇)》、《概率论与数理统计习题集(提高篇)》四本。该系列题型丰富、数量充足、解析精辟，体现了作者们的专业素质，您不妨看看、练练。

在“考研历年真题详解与考点分析”中，也分为高等数学、微积分、线性代数、概率论与数理统计四本。该系列汇集考研的历年真题并有考点分析，使考生看后能紧密结合实战，安排复习详略。特色之处是没有按年代顺序，而是分门别类娓娓道来。

“复习指导与典型例题分析”同样分为四本。该系列注重基本概念、基本技能，是考试大纲的教材而非教学大纲的教材，为考生节省了时间。

“本科生题库”包括《高等数学习题集(基础篇)》、《微积分习题集(基础篇)》、《线性代数习题集(基础篇)》、《概率论与数理统计习题集(基础篇)》。该系列紧密结合教材，是本科生掌握基础知识、提高应用技巧的最佳工具书。

为了使学生通过一定数量题目的练习，便掌握解题方法与精髓，本书所选的题目打破过去习题集的形式，将题目分为填空题、多项选择题、解答题和证明题。

本系列丛书适合文、理科各个专业，特别是参加全国硕士研究生入学考试、自学考试及其他各类考试的需要，也适合各高等院校及成人高等专科教育各个专业教学辅导的需要。

我们相信，本系列丛书的出版，必将有助于广大在校生和有志于攻读硕士学位的考生开拓

思路,更好地理解和掌握有关的基本概念和基本的解题方法,培养逻辑推理能力及运用所学知识分析、解决实际问题的能力,并使得自己在这个过程中不断增强对考试的适应能力和通过考试的自信心,以便考出好成绩。

本系列丛书的出版要感谢为丛书提供资料的名师们,感谢他们付出的辛勤劳动。同时,欢迎广大师生就书中的问题提出不同见解。

机械工业出版社华章教育

2002年3月

目 录

第一章 行 列 式

一、考研内容简介

(一) 基本概念

由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的 n 阶行列式

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是一个计算公式,该公式是由 n^2 个元素 a_{ij} 的乘积构成的$n!$项和式.每一项都是 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$,这 n 个元素取自行列式中不同的行与不同的列,在全部 $n!$ 项中,带正号的项与带负号的项各占一半.

元素 a_{ij} 的余子式是指在行列式$\boldsymbol{D}$ 中划去第i 行与第j 列的元素后余下的$n-1$ 阶行列式 $\boldsymbol{M}_{ij}$,且称 $\boldsymbol{A}_{ij}=(-1)^{i+j}\boldsymbol{M}_{ij}$ 是元素a_{ij} 的代数余子式.不难看到下面两个行列式虽然不同,但是两个行列式中第 i 行各对应元素的余子式、代数余子式对应相等.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & a_{i-1\,2} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_{i+1\,1} & a_{i+1\,2} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & a_{i-1\,2} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ a_{i+1\,1} & a_{i+1\,2} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(二) 行列式的性质

(1) 行列式与其转置行列式相等.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(2) 互换行列式的两行(或列),行列式要改变符号.

(3) 行列式中某行(列)有公因子,可以提到行列式符号前;换一句话,一个数乘行列式等于用这个数乘以行列式中的任意一行(列).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(4) 拆行(列)性

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

此即行列式 $\boldsymbol{D}$ 可以按第 i 行拆成两个行列式 $\boldsymbol{D}_1$ 与 $\boldsymbol{D}_2$ 之和. $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{D}_1$ 与 $\boldsymbol{D}_2$ 三个行列式除第 i 行外,其余对应的行完全相同. $\boldsymbol{D}$ 中第 i 行的元素是 $\boldsymbol{D}_1$ 与 $\boldsymbol{D}_2$ 中第 i 行对应元素的和.相反地,并不是任何两个 n 阶行列式都能相加成一个行列式,只有当两个行列式除第 i 行外其余各行对应元素都相同时可以相加成一个行列式.上述叙述对列也有同样结论.

(5) 若行列式中有两行(列)完全相同,或有一行(列)的元素全为零,或有两行(列)的对应元素成比例,则行列式的值等于零.

(6) 把行列式的某一行(列)的元素遍乘一个数后加到另一行(列)的对应元素上去,行列式的值不变.

(三) 计算(化简)行列式的基本原则与常用技术

1. 计算(化简)行列式的基本原则

(1) 运用行列式性质把行列式化成特殊类型的行列式(上、下三角形行列式),爪型行列式(本章习题 1.14),准对角型行列式等.

(2) 运用行列式性质把某一行(列)化简,然后把行列式按该行(列)展开.

(3) 递推公式.

2. 计算(化简)行列式的一些常用方法

(1) 某一行(列)乘数加到其余各行(列)上去.

(2) 第 $n-1$ 行(列)乘数加到第 n 行(列)上,之后第 $n-2$ 行(列)乘数加到第 $n-1$ 行(列)上,之后继续下去.

(3) 各行(列)全加到某一行(列)上.

(4) 拆行(列)法.

(5) 加边法(把 n 阶行列式变成等值的 $n+1$ 阶行列式).

二、习　　题

(一) 填空题(1.1 ~ 1.9)

1.1 多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & x & 2 & 3x \\ 0 & 2x & -1 & x \\ 0 & 1 & -x & 2 \\ x & 1 & 0 & 3x \end{vmatrix}$ 中 x^3 的系数________.

1.2 代数方程 $\begin{vmatrix} 1+x & x & x \\ x & 2+x & x \\ x & x & 3+x \end{vmatrix}=0$ 的根 $x=$ ________.

1.3 设 $f(x)=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda-a_{33} & -a_{34} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & \lambda-a_{44} \end{vmatrix}$, 则 $f(x)$ 中 x^3 的系数是________.

1.4 已知四阶行列式 $\boldsymbol{D}$ 之值为 91,它的第 1 行元素依次为 $2,3,t+3,-5$,且第 1 行元素的余子式依次为 $\boldsymbol{M}_{11}=-1,\boldsymbol{M}_{12}=0,\boldsymbol{M}_{13}=6,\boldsymbol{M}_{14}=9$. 则 $t=$ ________.

1.5 已知四阶行列式

$$\boldsymbol{D}_4=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

设 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 表示 $\boldsymbol{D}_4$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式，$\boldsymbol{M}_{ij}$ 表示 $\boldsymbol{D}_4$ 中元素 a_{ij} 的余子式. 则 $2\boldsymbol{A}_{11}+3\boldsymbol{M}_{12}+2\boldsymbol{M}_{13}-\boldsymbol{A}_{14}=$ ________.

1.6 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=$ ________.

1.7 $\boldsymbol{D}_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ x & x & x & \cdots & x & 0 & 1 \\ x & x & x & \cdots & 0 & x & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ x & 0 & x & \cdots & x & x & 1 \\ 0 & x & x & \cdots & x & x & 1 \end{vmatrix}=$ ________.

1.8 $\boldsymbol{D}_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & n & \cdots & n & n \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{vmatrix}=$ ________.

1.9 已知 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3$ 分别为 k_1 阶，k_2 阶，k_3 阶矩阵，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} & & \boldsymbol{A}_1 \\ & \boldsymbol{A}_2 & \\ \boldsymbol{A}_3 & & \end{bmatrix}$，则 $|\boldsymbol{A}|=$ ________ $|\boldsymbol{A}_1||\boldsymbol{A}_2||\boldsymbol{A}_3|$.

(二) 计算题与证明题(1.10 ~ 1.22)

1.10 已知三阶行列式

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & y & x \end{vmatrix},$$

且 $$\boldsymbol{M}_{11}+\boldsymbol{M}_{12}-\boldsymbol{M}_{13}=3,\quad \boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{A}_{12}+\boldsymbol{A}_{13}=1.$$

其中 $\boldsymbol{M}_{ij}$ 是 $\boldsymbol{D}$ 中元素 a_{ij} 的余子式，$\boldsymbol{A}_{ij}=(-1)^{i+j}\boldsymbol{M}_{ij}$. 试求 $\boldsymbol{D}$ 之值.

1.11 设 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 1 & b \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0$，且 $\boldsymbol{M}_{11}+\boldsymbol{M}_{12}+\boldsymbol{M}_{13}=11$($\boldsymbol{M}_{ij}$ 是行列式中元素 a_{ij} 的余子式).

试求 a,b.

1.12 当 a,b 满足什么条件时,行列式

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}0&1&2&0&1\\2&0&0&3&0\\0&a&1&0&1\\1&0&0&b&0\\0&1&3&0&1\end{vmatrix}=0$$

1.13 计算五阶行列式

$$\boldsymbol{D}_5=\begin{vmatrix}1&1&1&0&0\\1&2&3&0&0\\0&1&1&1&1\\0&x_1&x_2&x_3&x_4\\0&x_1^2&x_2^2&x_3^2&x_4^2\end{vmatrix}.$$

1.14 计算爪型行列式

$$\boldsymbol{D}_n=\begin{vmatrix}x_1&a_2&a_3&\cdots&a_n\\b_2&x_2&0&\cdots&0\\b_3&0&x_3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\b_n&0&0&\cdots&x_n\end{vmatrix},\quad x_2x_3\cdots x_n\neq 0.$$

1.15 计算 n 阶三对角行列式

$$\boldsymbol{D}_n=\begin{vmatrix}1-a&a&0&\cdots&0&0\\-1&1-a&a&\cdots&0&0\\0&-1&1-a&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1-a&a\\0&0&0&\cdots&-1&1-a\end{vmatrix}.$$

1.16 计算 n 阶行列式

$$\boldsymbol{D}_n=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3&\cdots&a_{n-1}&a_n\\b_1&c_2&0&\cdots&0&0\\0&b_2&c_3&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&b_{n-1}&c_n\end{vmatrix}.$$

1.17 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

1.18 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix} \quad (x \neq a).$$

1.19 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & b & \cdots & b \\ a & x_2 & \cdots & b \\ a & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}.$$

1.20 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_2 & \cdots & 1+x_n \\ 1+x_1^2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_1^n & 1+x_2^n & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix}.$$

1.21 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

1.22 计算三对角行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}.$$

三、习题的解答与分析

(一) 填空题

1.1 答案是：-6.

分析 根据定义 $f(x)$ 中含有 x^3 的项只有一项，即

$$(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} = 1 \cdot 2x \cdot (-x) \cdot 3x = -6x^3.$$

若把 $f(x)$ 按第 1 列展开可得

$$f(x) = \begin{vmatrix} 2x & -1 & x \\ 1 & -x & 2 \\ 1 & 0 & 3x \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} x & 2 & 3x \\ 2x & -1 & x \\ 1 & -x & 2 \end{vmatrix}.$$

在第 1 个行列式中 x^3 项的系数是 -6，第 2 个行列式中无 x^2 项的系数(注意到行列式前还有 x 因子)，因此 $f(x)$ 中 x^3 项的系数为 -6.

1.2 答案是：$-\dfrac{6}{11}$.

分析 $\begin{vmatrix} 1+x & x & x \\ x & 2+x & x \\ x & x & 3+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+x & x & x \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ -1 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 11x = 0, \quad x = -\frac{6}{11}.$$

1.3 答案是：$-(a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44})$.

分析 将四阶行列式

$$f(x)=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & 0-a_{12} & 0-a_{13} & 0-a_{14}\\ 0-a_{21} & \lambda-a_{22} & 0-a_{23} & 0-a_{24}\\ 0-a_{31} & 0-a_{32} & \lambda-a_{33} & 0-a_{34}\\ 0-a_{41} & 0-a_{42} & 0-a_{43} & \lambda-a_{44}\end{vmatrix}$$

的每一列拆成两个行列式,四阶行列式可拆成 $2^4=16$ 个行列式,其中含有 λ^3 的行列式有如下四个

$$\begin{vmatrix}\lambda & 0 & 0 & -a_{14}\\ 0 & \lambda & 0 & -a_{24}\\ 0 & 0 & \lambda & -a_{34}\\ 0 & 0 & 0 & -a_{44}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\lambda & 0 & -a_{13} & 0\\ 0 & \lambda & -a_{23} & 0\\ 0 & 0 & -a_{33} & 0\\ 0 & 0 & -a_{43} & \lambda\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\lambda & -a_{12} & 0 & 0\\ 0 & -a_{22} & 0 & 0\\ 0 & -a_{32} & \lambda & 0\\ 0 & -a_{42} & 0 & \lambda\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-a_{11} & 0 & 0 & 0\\ -a_{21} & \lambda & 0 & 0\\ -a_{31} & 0 & \lambda & 0\\ -a_{41} & 0 & 0 & \lambda\end{vmatrix}$$

$$=-a_{44}\lambda^3-a_{33}\lambda^3-a_{22}\lambda^3-a_{11}\lambda^3=-(a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44})\lambda^3.$$

1.4 答案是:5.

分析 把行列式按第1行展开得

$$\begin{aligned}91&=2\cdot(-1)^{1+1}\boldsymbol{M}_{11}+3\cdot(-1)^{1+2}\boldsymbol{M}_{12}+(t+3)\cdot(-1)^{1+3}\boldsymbol{M}_{13}\\&\quad+(-5)(-1)^{1+4}\boldsymbol{M}_{14}\\&=6t+61,\\ t&=5.\end{aligned}$$

1.5 答案是:6.

分析 由于

$$2\boldsymbol{A}_{11}+3\boldsymbol{M}_{12}+2\boldsymbol{M}_{13}-\boldsymbol{A}_{14}=2\boldsymbol{A}_{11}-3\boldsymbol{A}_{12}+2\boldsymbol{A}_{13}-\boldsymbol{A}_{14},$$

并且

$$\boldsymbol{D}_4=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 1 & 0\\ 4 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}\quad 与\quad \boldsymbol{M}_4=\begin{vmatrix}2 & -3 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 1 & 0\\ 4 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

两个行列式的第1行元素的代数余子式对应相等,而右侧的行列式按第1行展开应为 $\boldsymbol{M}_4=2\boldsymbol{A}_{11}-3\boldsymbol{A}_{12}+2\boldsymbol{A}_{13}-\boldsymbol{A}_{14}$,所以

$$\begin{aligned}2\boldsymbol{A}_{11}+3\boldsymbol{M}_{12}+2\boldsymbol{M}_{13}-\boldsymbol{A}_{14}&=2\boldsymbol{A}_{11}-3\boldsymbol{A}_{12}+2\boldsymbol{A}_{13}-\boldsymbol{A}_{14}\\&=\begin{vmatrix}2 & -3 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 1 & 0\\ 4 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=6.\end{aligned}$$

1.6 答案是:$2-\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

分析　将行列式的第 2 列乘(−2)，第 3 列乘(−3)，……，第 n 列乘($-n$) 都加到第 1 列上去得一个上三角形行列式.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-2^2-3^2-\cdots-n^2 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1-2^2-3^2-\cdots-n^2 = 2-(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)$$

$$= 2-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

1.7　答案是：$(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(1-n)x^{n-2}$.

分析　将行列式的第 1 行乘($-x$) 分别加到第 $2,3,\cdots,n$ 行上去得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -x & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

将行列式的第 1 到第 $n-1$ 列都乘$\frac{1}{x}$后全加到第 n 列上去得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \frac{n-1}{x} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -x & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+2+\cdots+(n-1)} \begin{vmatrix} \frac{n-1}{x} & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -x \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+2+\cdots+(n-1)}(-x)^{n-1}\cdot\frac{n-1}{x}$$

$$= (-1)^{1+2+\cdots+(n-1)}(-1)^{n-1}\cdot(-1)(1-n)x^{n-2}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(1-n)x^{n-2}.$$

1.8　答案是：$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n$.

分析　注意到相邻两行元素之间的特点.

第 $n-1$ 行乘(-1) 加到第 n 行上，之后第 $n-2$ 行乘(-1) 加到第 $n-1$ 行，依次继续，最后第 1 行乘(-1) 加到第 2 行. 得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} n & n-1 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n.$$

1.9　答案是：$(-1)^{k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3}$.

分析

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \boldsymbol{A}_1 \\ 0 & \boldsymbol{A}_2 & 0 \\ \boldsymbol{A}_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{k_1(k_2+k_3)}\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{A}_2 \\ 0 & \boldsymbol{A}_3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{k_1(k_2+k_3)}(-1)^{k_2k_3}\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{A}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{A}_3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3}|\boldsymbol{A}_1||\boldsymbol{A}_2||\boldsymbol{A}_3|.$$

(二) 计算题与证明题

1.10　**解**　由定义知

$$\boldsymbol{M}_{11} = x-2y,\quad \boldsymbol{M}_{12} = x-4,\quad \boldsymbol{M}_{13} = y-2,$$

$$\boldsymbol{A}_{11} = \boldsymbol{M}_{11} = x-2y,\quad \boldsymbol{A}_{12} = -\boldsymbol{M}_{12} = 4-x,\quad \boldsymbol{A}_{13} = \boldsymbol{M}_{13} = y-2.$$

代入两已知等式得

$$(x-2y)+(x-4)-(y-2) = 3,$$

$$(x-2y)+(x-4)+(y-2) = 1.$$

解之得

$$x = 4,\quad y = 1.$$

因此
$$D=\begin{vmatrix}2&2&3\\1&1&2\\2&1&4\end{vmatrix}=1.$$

1.11 **解** 因
$$\begin{vmatrix}1&2&3\\a&1&b\\3&1&2\end{vmatrix}=-a+5b-7=0,$$
$$-a+5b-7=0, \tag{1}$$
$$M_{11}+M_{12}+M_{13}=\begin{vmatrix}1&b\\1&2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a&b\\3&2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a&1\\3&1\end{vmatrix}=3a-4b-1=11, \tag{2}$$
由式(1)与式(2)解之得
$$a=8,\quad b=3.$$

1.12 **分析** 计算行列式后就能得到 a,b 所满足的条件.

解
$$D=\begin{vmatrix}0&1&2&0&1\\2&0&0&3&0\\0&a&1&0&1\\1&0&0&b&0\\0&1&3&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&1&0&0\\0&0&0&2&3\\a&1&1&0&0\\0&0&0&1&b\\1&3&1&0&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2&1&0&0\\a&1&1&0&0\\1&3&1&0&0\\0&0&0&2&3\\0&0&0&1&b\end{vmatrix}$$
$$=-\begin{vmatrix}1&2&1\\a&1&1\\1&3&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}2&3\\1&b\end{vmatrix}=(1-a)(2b-3)=0.$$
因此 $a=1$ 或 $b=\dfrac{3}{2}$.

1.13 **分析** 按第1列展开.

解 先把行列式第1行乘(−1)加到第2行上去,再按第1列展开得
$$D_5=\begin{vmatrix}1&1&1&0&0\\0&1&2&0&0\\0&1&1&1&1\\0&x_1&x_2&x_3&x_4\\0&x_1^2&x_2^2&x_3^2&x_4^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&0&0\\1&1&1&1\\x_1&x_2&x_3&x_4\\x_1^2&x_2^2&x_3^2&x_4^2\end{vmatrix}.$$
按第1行展开得
$$D_5=\begin{vmatrix}1&1&1\\x_2&x_3&x_4\\x_2^2&x_3^2&x_4^2\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}1&1&1\\x_1&x_3&x_4\\x_1^2&x_3^2&x_4^2\end{vmatrix}.$$

由范德蒙行列式公式得

$$D_5 = (x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3) - 2(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_4 - x_3).$$

1.14 **分析** 先用行列式性质把 D_n 化成三角形行列式.

解 把第 2 列提取 x_2,第 3 列提取 x_3,……,第 n 列提取 x_n 到行列式前得

$$D_n = x_2x_3\cdots x_n\begin{vmatrix} x_1 & \frac{a_2}{x_2} & \frac{a_3}{x_3} & \cdots & \frac{a_n}{x_n} \\ b_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

第 2 列乘$(-b_2)$加到第 1 列上去,……,第 i 列乘$(-b_i)$加到第 1 列上去,…….

$$D_n = x_2x_3\cdots x_n\begin{vmatrix} x_1 - \sum\limits_{i=2}^{n}\frac{a_ib_i}{x_i} & \frac{a_2}{x_2} & \frac{a_3}{x_3} & \cdots & \frac{a_n}{x_n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = x_2x_3\cdots x_n\left(x_1 - \sum_{i=2}^{n}\frac{a_ib_i}{x_i}\right).$$

评注 若 $x_2, x_3, \cdots, x_n$ 中有一个为零计算更为简单,以 $x_2 = 0$ 为例.

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_3 & 0 & x_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第 2 行展开}} -b_2\begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n \\ 0 & x_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= -b_2a_2x_3x_4\cdots x_n.$$

1.15 **分析** 按第 1 列展开可得到递推公式.

解 **方法一** 根据第 2, 3, …, $n-1$ 行元素之和是零的特点.将第 2, 3, …, n 列全加到第 1 列上去后再按第 1 列展开.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a & 0 \\ -a & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a \end{vmatrix}$$