

中国科技史专题讲座

徐锡祺

北京教育学院

一九九五·十

刘徽和祖冲之是我国古代两位杰出的数学家，其成就是多方面的，对圆周率的推算，是他们对数学的贡献之一。

圆周率，即直径与圆周之比，中国古代称之为“圆率”，现代国际通用“ π ”来代表。历来各国数学家都重视圆周率的计算，因为它的准确程度，是作为衡量一个国家数学发展水平的标志。

一、中国在东汉前对圆周率的计算

中国古代在一个相当长的时间里用的圆周率是“3”。‘周三径一’被称为“古率”。《九章算术》就是用这个古率来计算圆面积的。但它的误差较大，所以数学家们始终不断地在进行着探索。

公元1-5年司，刘徽(7-23年)为王莽造过一个铜质圆柱形标准量器，经研究这个量器使用的圆率是3.1547。

东汉张衡(78-139年)在《灵宪》一书里采用的圆率是2.1466(用 $\frac{230}{237}$ 来表示其近似值)。《九章算术》刘徽注认为张衡用的圆率“ $\pi \approx \sqrt{10} = 3.16$ ”

曹(228-266年)在《浑仪论说》取圆率是3.1556(用 $\frac{42}{45}$ 表其近似值)。

这几项圆率是怎样推算出来的，现在缺乏具体资料，无法进行更详细的说明。

二、魏晋时刘徽创“割圆术”

刘徽是我国数学史上一位非常伟大的数学家。遗憾的是，有关他活动的史料记载可以说没有，现在只知道他活动于曹魏和西晋时期，著有《九章算术注》和《海岛算经》。

魏陈留王景元四年(263年)刘徽注《九章算术》。在证明“半圆”

周半径相乘得积步(即圆面积)”这个公式时,发现“周三径一”不是圆周与直径的比值。为此刘徽提出要“更造密率”,否则“世传此法,莫肯精核;学者踵古,习其谬失。不有明据,辩之斯难。”

刘徽在解决这个问题时,给出了类似十五世纪西方牛顿、莱布尼兹创立的“积分法”。他认为当圆内接正多边形数无限增加时,其周长即愈益逼近圆周长,面积的极限为圆面积。割圆术不但奠定了计算圆周率的基础,也阐明了积分法计算长度面积的方法:用折线来逐步接近曲线,用多边形接近曲线所包围的图形。为此有的外国人称刘徽为“中国的牛顿”。

三、刘徽割圆的具体作法与计算

第一步,作圆内接正6边形

1. 为计算上的方便,刘徽以1尺为半径(r)作圆,计算以“忽”为单位。

古制: 1尺=10寸

1寸=10分

1分=10厘

1厘=10毫

1毫=10秒

1秒=10忽

故 1尺=1000000忽。

2. 作圆内接正6边形

$AB=OA=1$ 尺

用边长6尺

3. 先求 $\triangle AOB$ 的面积

$\triangle AOB$ 是一个等边三角形,

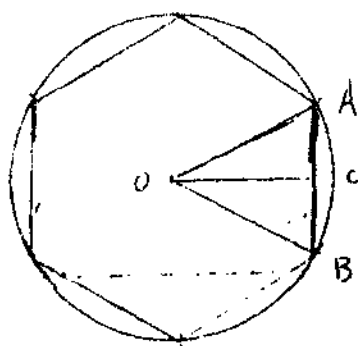


图1

作 $OC \perp AB$, $AC=BC=0.5$ 尺 (500000忽)

根据勾股定理 $b^2=c^2-a^2$ 求 OC 边长.

$$OC^2=OA^2-CA^2$$

$$OC=\sqrt{OA^2-CA^2}$$

$$=\sqrt{1^2-0.5^2}$$

$$=0.8660254 \text{ 尺 } (=866025 \frac{2}{3} \text{ 忽})$$

$$\text{三角形} \triangle OAB \text{ 面积} = \frac{1}{2} (AB \times OC)$$

$$= \frac{1}{2} (1 \times 0.8660254)$$

$$=0.4330127 \text{ 尺}^2$$

4. 求圆内接正6边形面积

正6边形是由6个正 $\triangle AOB$ 组成

$$\text{正6边形面积} = 0.4330127 \times 6$$

$$=2.5980762 \text{ 尺}^2$$

5. 如用圆内接正6边形面积来推算圆率, 则根据

$$\text{圆面积} = \text{圆周率} \times \text{半径}^2 \quad (S = \pi r^2)$$

$$\pi = \frac{S}{r^2} = \frac{2.5980762}{1^2} = 2.5980762$$

这就很清楚刘徽为什么“周三径一”不是圆周与直径之比, “周三者从其六觚(边)之环(周)长(耳)”的道理.

第二步: 在圆内接正6边形基础上作正12边形(见图2)

1. 延长 OC 与 $\widehat{AB}$ 相交于 D .

连 AD , D , $AD=BD$,

AD , BD 为 $\widehat{AB}$ 正12边形边长.

2. 求正12边形面积

已知 $OA=OB=1$ 尺

$$OD=BD$$

OD为公共边=1尺

$$\triangle AOD = \triangle BOD$$

$$\Rightarrow \triangle AOB = \triangle AOD + \triangle BOD$$

根据求三角形面积公式

$$\triangle AOD \text{ 面积} = \frac{1}{2} (OD \times CA)$$

$$\triangle BOD \text{ 面积} = \frac{1}{2} (OD \times CB)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \triangle AOB \text{ 面积} &= \frac{1}{2} (OD \times CA) + \frac{1}{2} (OD \times CB) \\ &= \frac{1}{2} [OD \times (CA + CB)] \end{aligned}$$

而 $CA + CB = AB = 1$ 尺

$$\Rightarrow \triangle AOB \text{ 面积} = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = 0.5 \text{ 尺}^2$$

正12边形面积是由6个 $\triangle AOB$ 组成

故正12边形面积 $= 0.5 \times 6 = 3 \text{ 尺}^2$

3. 求圆内接正12边形边长 看图二

已知, $\triangle AOC$ 中 $AC = 0.5$ 尺,

$$CD (\text{余径}) = OD - OC = 1 - 0.8660254 = 0.1339746 \text{ 尺}$$

根据勾股定理 $c^2 = a^2 + b^2$

$$AD^2 = AC^2 + CD^2$$

$$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{0.1339746^2 + 0.5^2} = 0.517638$$

参照上述方法, 刘徽又推算出圆内接正24边形、正48边形、正96边形的边长和正192边形的面积。正是通过这样不断的分割, 则边长越来越逼近圆周长, 正多边形的面积也越来越接近于圆面积, “割之弥细, 所失弥小。割之又割, 以至于不可割, 则与圆合体, 而无所失矣。”

四 微率 $\frac{\pi}{50}$ 的求得

在割圆过程中, 刘徽指出: “觚面 (边长) 之外, 犹有余径。以

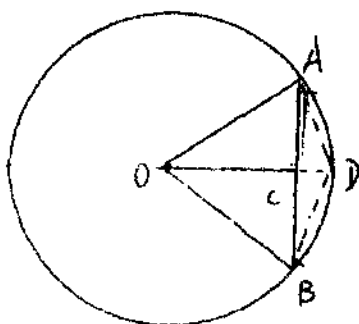


图 2

面乘余径，则算出弧表。若夫觚之细者，与圆合体则表无余径。表无余径，算不外出矣。”这段话的意思请看图三来说明，在图内接正多边形任意一边AB之外，尚有余径CD。以正多边形一边AB为底，余径CD为高所组成的矩形ABEF有一部分图形落在 $\widehat{AB}$ 之外（见横线条部分）， $\triangle AOB$ 面积与矩形ABEF的面积之和自算也就出 $\widehat{AB}$ 外即“算出弧表”。但当正多边形的边数无限倍增时，圆内接正多边形的每边长就会逐渐缩短，形成“觚之细者”。“觚之细者”势必与圆周重合。当正多边形之外再也没有余径的时候，矩形就不可能出现，其面积也就不可能超出圆面积了。根据这

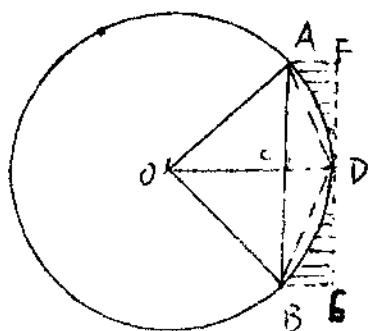


图3

个道理，刘徽推算正192边形的面积(S_{192})肯定小于圆面积(S)，但当正192边形面积加上它与正96边形面积(S_{96})的差就会大于圆面积。用公式来表示是：

$$S_{96} < S < S_{96} + (F_{96} - S_{96}) .$$

今算得正96边形面积(S_{96}) = $3.130 \left(\frac{584}{625} \right)$ 尺² (其部分在图三中为 $\triangle AOB$ 表示)
 正192边形面积(S_{192}) = $3.14 \frac{64}{625}$ (其部分在图中为四边形 $AODB$ 表示)
 两者积差(即差)是：

$$\begin{aligned} S_{192} - S_{96} &= 3.14 \frac{64}{625} - 3.130 \left(\frac{584}{625} \right) \\ &= \frac{105}{625} \text{ 尺}^2 \text{ (其部分为图三 } \triangle ABD) \end{aligned}$$

$$\triangle ABD = \triangle AFD + \triangle BED$$

$$\text{故 } \triangle AFD + \triangle BED = \frac{105}{625} \text{ 尺}^2$$

代入公式 $S_{n+1} < S < S_{n+1} + (S_{n+1} - S_n)$

$$3.14 \left(\frac{64}{625} \right) < S < 3.14 \left(\frac{64}{625} \right) + \left(\frac{105}{625} \right) \\ = 3.14 \left(\frac{64}{625} \right) < S < 3.14 \left(\frac{169}{625} \right)$$

正确的说，圆面积应在 $3.14 \left(\frac{64}{625} \right)$ 尺² 和 $3.14 \left(\frac{169}{625} \right)$ 尺² 之间，

根据圆面积 $S = \pi r^2$ ， $\pi = \frac{S}{r^2}$ 的公式，刘徽得出：

$$3.14 \left(\frac{64}{625} \right) < \pi < 3.14 \left(\frac{169}{625} \right)$$

圆周率准确的值应在 $3.14 \left(\frac{64}{625} \right)$ 与 $3.14 \left(\frac{169}{625} \right)$ 之间。舍弃不等式两端分数，取

$\pi = 3.14$ 。中国唐以前还没有小数这个概念，通常取其分数表示。

3.14的最佳渐近分数为 $\frac{157}{50}$ 。

对 $\frac{157}{50}$ 这个数值，刘徽并不满意，认为它还不够精确，后来他在验证刘徽的“律嘉量斛”时，将圆分割到正3072边形，得出

“径得一千二百五十，周得三千九百二十七”（即 $\frac{3927}{1250} = 3.1416$ ）

这个结果把圆周率精确到小数后3位。但为了计算上方便，在实际使用中他仍用 $\frac{157}{50}$ 这个数。后人为纪念刘徽，称 $\frac{157}{50}$ 为“徽术”或“徽率”。

刘徽计算的数值

分割次数	内接正多边形边数	面积 (尺 ²)	每边长 (尺)	周长 (尺)	积差 (尺 ²)
1	6	3.5880762	1.000000	6.000000	
2	12	3.000000	0.517638	6.211656	0.4619238
3	24	3.105828	0.381062	6.285248	0.105828
4	48	3.132624	0.309006	6.278688	0.036796
5	96	3.139344	0.065435	6.283048	0.006730
6	192	3.141024	0.032733	6.283216	0.001600

五、“祖率” $\frac{355}{113}$ 的求得

公元462年，我国南北朝时期大数学家祖冲之(429-500年)以刘徽推算的数值不精确，“就中更推其数”，把圆周率的精确度又向前推进了一步。

由于祖冲之的数学著作《缀术》早已失传，后人很难来叙述他的推算过程。目前保留下来的唯一史料是《隋书·律历志》上的记载：

“古之九数，圆周率三，圆径率一，其术疏舛(chuǎn)。自刘歆、张衡、刘徽、王蕃、皮延宗①之徒，各设新率，未臻折衷。宋末，南徐州(今镇江)从事史祖冲之更开密法，以圆径一亿为一丈，圆周盈数三丈一尺一分五厘九毫二秒七忽，不足(nù)数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽。正数在盈陷二限之间。密率，圆径一百一十三，圆周三百五十五。约率，圆径七，周二十二。”

以这段史料可知，祖冲之是以半径1丈来作圆，为计算方便，

①皮延宗(440年左右)，所推算的圆周率已失传。用比忽更小的单位——微，按“圆径一亿为一丈”(1丈=100000000微)。如果祖冲之也用刘徽创造的割圆术接着推算就可算得：

分割次数	内接正多边形边数	面积	每边长(丈)	周长(丈)	积差(丈 ²)
7	384	3.14159	0.01636224	6.28310016	0.0004224
8	768	3.1415940	0.0081812	6.2831616	0.0001076
9	1536	3.1415763	0.00409061	6.28317696	0.0000223
10	3072	3.141590	0.002045306	6.28318003	0.0000137
11	6144	3.141592	0.001022664	6.28318616	0.0000020
12	12288	3.1415926	0.00051133	6.28322304	0.00000051
13	24576	3.14159261			0.00000010

根据刘徽创立的不等式, 正24576边形面积要小于圆面积, 而正24576边形加上它与正12288边形的面积差又要大于圆面积, 即

$$S_{24576} < S < S_{24576} + (S_{24576} - S_{12288})$$

$$\text{得 } 3.14159261 < S < 3.14159261 + (3.14159261 - 3.14159251)$$

$$= 3.14159261 < S < 3.14159261 + 0.0000001$$

$$= 3.14159261 < S < 3.14159271$$

说明圆的实际面积是在3.1415926和3.1415927之间。

$$\text{从圆面积推算 } \pi, \pi = \frac{S}{r^2}$$

$$\text{故 } 3.1415926 < \pi < 3.1415927.$$

这就是史料所记的“盈数”和“朒数”, 祖冲之指出了圆周率正确值的误差范围应在盈朒二限之间~~盈朒~~。那么祖冲之推算出的圆周率用分数来表示确切地说是多少呢? 这~~盈朒~~就是祖冲之推算出的密率 $\frac{355}{113}$ 。

史料中说的圆周率约率 $\frac{22}{7}$, 是南北朝时期数学家何承天(370-447年)所创, 密率 $\frac{355}{113}$ 才是祖冲之所造。~~盈朒~~ $\frac{355}{113} = 3.1415929$ 比3.1415926要多出0.0000003, 因而 $\frac{355}{113}$ 这个数属于过剩近似值, 但它是分子、分母在1000以内表示圆最佳渐近分数, 用它来计算一个直径为10公里的圆的周长, 其误差还不到3毫米。又 $\frac{355}{113}$ 的分子、分母恰好是三个最小奇数1、3、5的重复依次排列(11, 33, 55)特别便于记忆。

对祖冲之这一密率, 唐代数学家李淳风曾给予高度评价。他在《九章算术注》里专门写下:“今者修撰, 博采(jù n)摭(zhī)诸家, 考其是非, 冲之为密。故显之于徽术之下, 冀学者之所裁焉。”元朝数学家赵友钦用与刘徽大致相同的方法割圆, 但从圆内接正方形算起, 顺次求出正8边形、正16边、正32边形……直至正16384边形

的面积，得出“径一百一十三而周圆三百五十五最为精密。”

六、祖率 $\frac{355}{113}$ 在世界数学史中的地位

祖冲之在当时只能用算筹计算的情况取得圆周率 $\frac{355}{113}$ ，将有效数字精确到七位数 (3.141592) 是一件非常了不起的成就。这个结果的取得，需从圆内接正6边形出发算到正24576边形，要把同一运算程序反复进行12次，每一运算程序又包括有加、减、乘、除以及开方等11个步骤，这至少要对九位数字反复进行130次以上复杂的计算，可见计算量之大，计算之艰辛，以及计算技能之高超。

祖冲之所求得的圆周率数值 $\frac{355}{113}$ ，远远走在当时世界的前列。

阿拉伯数学家阿尔·卡西 (AL-Kashi) 于1427年著《算术之钥》才得到 $\pi = 3.1415926535898732$ 。

法国数学家韦达 (Viète) 于1540-1603年才得到

$$3.1415926535 < \pi < 3.1415926537。$$

德国数学家奥托 (Valentinus otto) 于1573年得到 $\frac{355}{113}$ 这个近似数值。

荷兰数学家安托尼兹 (Adriaen Authouiszoon) 于1600年从 $3\left\{\frac{1}{10}\right\} < \pi < 3\left\{\frac{17}{100}\right\}$ 入手，将两个分数的分子分母各各相加得 $\pi = 3\left\{\frac{15+17}{100+170}\right\} = 3\left\{\frac{32}{270}\right\} = 3\left\{\frac{16}{135}\right\} = 3\left\{\frac{16}{113}\right\} = \frac{355}{113}$ 。

上述材料清楚地说明，西方人取得的精确数值均比祖冲之晚了千年左右。为纪念祖冲之的首创之功，1913年日本数学家三上义夫在《中日数学发展史》里建议，把 $\frac{355}{113}$ 定名为“祖率”。1960年3月，前苏联科学家在用世界各国历代科学文化名人的名字命名月球背面的环形山，圆谷时，祖冲之便其中之一。

为便于学生们了解割圆术的具体计算程序和数值，作表附录供参考。

单位(丈)

	割正6边形为正12边形	割正12边形为正24边形
半径 r (弦)	1	1
$a_n/2$ (勾)	0.5	0.258819
$\sqrt{r^2 - (a_n/2)^2}$ (股)	$\sqrt{1^2 - 0.5^2}$ =0.866254	$\sqrt{1^2 - 0.258819^2}$ =0.9659358
$r - \sqrt{r^2 - (a_n/2)^2}$ (小勾)	$1 - 0.866254$ =0.133746	$1 - 0.9659358$ =0.0340742
a_{2n} (小弦)	$\sqrt{0.133746^2 + 0.5^2}$ =0.517638	$\sqrt{0.0340742^2 + 0.258819^2}$ =0.261052
S_{2n}	3.1068280	3.132624

	割正24边形为正48边形	割正48边形为正96边形
半径 r (弦)	1	1
$a_n/2$ (勾)	0.130526	0.065403
$\sqrt{r^2 - (a_n/2)^2}$ (股)	$\sqrt{1^2 - 0.130526^2}$ =0.9914448	$\sqrt{1^2 - 0.065403^2}$ =0.9978589
$r - \sqrt{r^2 - (a_n/2)^2}$ (小勾)	$1 - 0.9914448$ =0.0085552	$1 - 0.9978589$ =0.0021411
a_{2n} (小弦)	$\sqrt{0.0085552^2 + 0.130526^2}$ =0.130826	$\sqrt{0.0021411^2 + 0.065403^2}$ =0.0655838
S_{2n}	3.139244	3.1410243

	割正96边形为正192边形	割正192边形为正384边形
半径 r (弦)	1	1
$a_n/2$ (勾)	0.032719	0.016361686
$\sqrt{r^2 - (a_n/2)^2}$ (股)	$\sqrt{1^2 - 0.032719^2}$ = 0.99946458	$\sqrt{1^2 - 0.016361686^2}$ = 0.9998661386
$r - \sqrt{r^2 - (a_n/2)^2}$ (小勾)	$1 - 0.99946458$ = 0.00053542	$1 - 0.9998661386$ = 0.0001338614
a_{2n} (小弦)	$\sqrt{0.00053542^2 + 0.032719^2}$ = 0.03272337	$\sqrt{0.00013386^2 + 0.01636169^2}$ = 0.01636724
S_{2n}	3.1414464	3.1415540

	割正384边形为正768边形	割正768边形为正1536边形
半径 r (弦)	1	1
$a_n/2$ (勾)	0.0081812	0.0040906
$\sqrt{r^2 - (a_n/2)^2}$ (股)	$\sqrt{1^2 - 0.0081812^2}$ = 0.999966634	$\sqrt{1^2 - 0.0040906^2}$ = 0.9999916334
$r - \sqrt{r^2 - (a_n/2)^2}$ (小勾)	$1 - 0.999966634$ = 0.000033366	$1 - 0.9999916334$ = 0.0000083666
a_{2n} (小弦)	$\sqrt{0.00003337^2 + 0.0081812^2}$ = 0.0081812	$\sqrt{0.00000837^2 + 0.0040906^2}$ = 0.00409061
S_{2n}	3.1416763	3.141590

	割正1636边形为正3072边形	割正3072边形为正6144边形
半径 r (弦)	1	1
$a_n/2$ (勾)	0.002045305	0.00102265305
$\sqrt{r^2 - (a_n/2)^2}$ (股)	$\sqrt{1^2 - 0.002045305^2}$ =0.99999791	$\sqrt{1^2 - 0.00102265305^2}$ =0.99999948
$r - \sqrt{r^2 - (a_n/2)^2}$ (小勾)	1-0.99999791 =0.00000209	1-0.99999948 =0.00000052
s_{2n} (小弦)	$\sqrt{0.00000209^2 + 0.002045305^2}$ =0.002045306	$\sqrt{0.00000052^2 + 0.00102265305^2}$ =0.001022654
S_{2n}	3.141592	3.14159261

	割正6144边形为12288边形
半径 r (弦)	1
$a_n/2$ (勾)	0.000511325
$\sqrt{r^2 - (a_n/2)^2}$ (股)	$\sqrt{1^2 - 0.000511325^2}$ =0.99999987
$r - \sqrt{r^2 - (a_n/2)^2}$ (小勾)	1-0.99999987=0.00000013
s_{2n} (小弦)	$\sqrt{0.00000013^2 + 0.000511325^2}$ =0.00051133
S_{2n}	3.14159261

$$S_{24576} = \frac{1}{7} 0.00051133 \times 12288 \times 1 = 3.14159261 \text{ 丈}^2$$

1. 古制

1丈=10尺=100寸=10000厘=100000毫

$$= 10000000 \text{ 秒} = 100000000 \text{ 忽} = 1000000000 \text{ 微}$$

2. 根据 $S_{2n} < S < S_{2n} + (S_{2n} - S_n)$

3. 14159261<S<3. 1415926+ (3. 14159261-3. 14159261)

3. 1415926<8<3. 1415927

$$r_{2n} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{a_1}{2}\right)^2} + \left(\frac{a_n}{2}\right)^2$$

$$S_{2n} = \frac{(2n-1) \cdot \frac{1}{2} \cdot (2n)}{2} = \frac{2n-1}{2} \cdot n$$