高等院校适用教材

高等数学难题解题方法选讲

孙洪祥　王晓红　编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高等院校适用教材

高等数学难题解题方法选讲

孙洪祥　王晓红　编

王玉孝　审

机械工业出版社

本书有别于普通的高等数学辅导书，收录的题目较难，归类为 28 个专题，其内容随着高等数学课程的进展而逐步深入。书中所选题目是编者十年教学经验的积累，其中许多题目具有很强的代表性。这里只给出题目的答案及简单提示，并没有给出详细的解题过程，而对解题方法的叙述也很简单，目的是给读者或使用本书的老师留有较大的发挥空间。另外，本书还汇集了北京市大学生（非数学专业）数学竞赛第十二届（2000 年）至第十四届（2002 年）的试题，并给出了较详细的参考答案。

本书可以作为高等数学的提高课程“高等数学解题方法”的教材，或作为学生参加高等数学竞赛的参考书，也可作为高等数学教师日常教学的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学难题解题方法选讲/孙洪祥，王晓红编．—北京：机械工业出版社，2003.6

高等院校适用教材

ISBN 7-111-12070-1

Ⅰ．高…　Ⅱ．①孙…②王…　Ⅲ．高等数学－高等学校－解题
Ⅳ．013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 033604 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
责任编辑：刘小慧　版式设计：霍永明　责任校对：李秋荣
封面设计：饶　薇　责任印制：路　琳
北京机工印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行
2003 年 6 月第 1 版第 1 次印刷
787mm×1092mm 1/16·11.75 印张·287 千字
定价：17.00 元

前　言

高等数学是一门重要的基础课程，它的作用至少体现在两个方面：其一，高等数学是后继课程的工具及语言；其二，高等数学是提高学生逻辑思维能力的重要手段。为了加强高等数学的教学，许多高等院校为学生开设了类似高等数学解题方法的课程。这类课程以讲授解题方法和典型例题为主，也适当补充一些基本定理。多年的教学实践表明，高等数学解题方法这类课程对加强学生的数学基础起到了重要作用。

本书的第一作者孙洪祥在北京邮电大学开设高等数学解题方法课程已十年，具有丰富的教学经验。本书是在孙洪祥的讲稿的基础上编写而成的，本书的第二作者王晓红给出了所选题目的答案及简单提示。

《高等数学难题解题方法选讲》有别于普通的高等数学辅导书，本书收录的题目较难，并分解为二十八个专题进行归类，其内容随着高等数学课程的进展而逐步深入。书中所选题目是编者十年讲授高等数学解题方法课程经验的积累，其中许多题目具有很强的代表性。通过对这些专题及典型题目的学习与理解，可以提高学生分析问题、解决问题的能力，可以更深入地理解相关的基本概念、基本知识、基本方法，同时也可以掌握一些高等数学课程中不常见但很重要的定理及方法。本书只给出题目的答案及简单提示，没有给出详细的解题过程，并且对解题方法的叙述也很简单，其目的是给读者或把本书当教材的老师留有较大的发挥空间。

本书可以作为高等数学的提高课程“高等数学解题方法”的讲义，该课可作为选修课，分上下两个学期，每学期 34 课时。

另外，本书还汇集了北京市大学生（非数学专业）数学竞赛第十二届至第十四届（2000 年至 2002 年）的试题，并给出了较详细的参考答案。本书可作为学生参加高等数学竞赛的参考书，也可作为高等数学教师日常教学的参考书。

王玉孝教授仔细审阅了本书的初稿，并提出了许多宝贵的修改意见，同时提供了北京市大学生（非数学专业）数学竞赛第十二届至第十四届的试题及参考答案，在此深表感谢。还要感谢北京航空航天大学李心灿教授、北方交通大学季文铎教授的帮助与支持，感谢北京邮电大学理学院数学部各位老师多年来的帮助和协作，感谢北京市大学生（非数学专业）数学竞赛命题组的各位专家的辛勤工作。

由于编者水平有限，书中必有很多不尽人意之处，请读者批评指正。

编者

2003 年 2 月

目　录

第一部分

解题方法选讲

第一讲　用定义求数列的极限

1. 下列说法可否作为"数列 x_n 以 l 为极限"的定义？

(1) $\forall\ \varepsilon\in(0,1)$，$\exists\ A$(实数)，使得当 $n>A$ 时，$|x_n-l|\leqslant\varepsilon$.

(2) $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N$(正整数)，使得当 $n>N$ 时，$|x_n-l|\leqslant k\sqrt{\varepsilon}$，其中 k 为正常数.

(3) $\exists\ N>0$，$\forall\ \varepsilon>0$，使得当 $n>N$ 时，$|x_n-l|<\varepsilon$.

(4) $\forall\ N$(正整数)，$\exists\ \varepsilon>0$，使得当 $n>N$ 时，$|x_n-l|<\varepsilon$.

(5) 对于任意正整数 m，存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，$|x_n-l|<\frac{1}{2^m}$.

(6) $\forall\ \varepsilon>0$，集合 $\{n\,|\,x_n\notin(l-\varepsilon,l+\varepsilon)\}$ 为有限集.

(7) $\forall\ \varepsilon>0$，集合 $\{n\,|\,x_n\in(l-\varepsilon,l+\varepsilon)\}$ 为无限集.

2. 下列说法可否作为"数列 x_n 不以 l 为极限"的定义？

(1) $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N$(正整数)，使得当 $n>N$ 时，$|x_n-l|\geqslant\varepsilon$.

(2) $\exists\ \varepsilon_0>0$，$\forall\ N$(正整数)，$\exists\ n>N$，$|x_n-l|\geqslant\varepsilon_0$.

(3) $\exists\ \varepsilon_0>0$，使集合 $\{n\,\|\,x_n-l|\geqslant\varepsilon_0\}$ 为无限集.

(4) $\exists\ \varepsilon_0>0$，使集合 $\{n\,|\,x_n\in(l-\varepsilon_0,l+\varepsilon_0)\}$ 为有限集.

3. 设 $x_n\leqslant a\leqslant y_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$，证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$.

4. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}=a$.

5. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_1y_n+\cdots+x_ny_1}{n}=ab$.

6. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$，证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{n}=0$.

7. 设 $a>0$，证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

8. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

9. 证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$.

10. 证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$.

11. 证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=0$.

12. 证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$，$(a>1)$.

13. 证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$.

14. Stolz 定理一：设数列 $\{a_n\}$ 趋于 0，数列 $\{b_n\}$ 递减趋于 0，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n+1}}{b_n-b_{n+1}}$ 存在或等于

$+\infty$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$存在或等于$+\infty$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n+1}}{b_n-b_{n+1}}$.

15. Stolz 定理二：设数列$\{b_n\}$严格递增趋于$+\infty$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$存在或等于$+\infty$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$存在或等于$+\infty$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$.

16. Stolz 定理之推论：

(1) 设$x_n>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a>0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=a$.

(2) 设$x_n>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=a$.

(3) 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}=a$.

17. 设数列$\{S_n\}$，定义其算术平均值为

$\sigma_n=\frac{S_0+S_1+\cdots+S_n}{n+1}$，令$a_n=S_n-S_{n-1}$，证明：当$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=\alpha$，则$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\alpha$.

18. 设$A_n=a_1+\cdots+a_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=A$，数列$\{P_n\}$为单调增的正数列，且趋于$+\infty$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P_1a_1+\cdots+P_na_n}{P_n}=0$.

19. 设$S_n=\frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln C_n^k$，求$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$.

20. 设$x_1\in(0,1)$，$x_{n+1}=x_n(1-x_n)$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=1$.

第二讲　数列极限的计算方法

一、利用单调有界定理求极限

1. 设 $x_1>-6$，$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求之.

2. 设 $x_1=\sqrt{a}$，$x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求之.

3. 设 $x_1=1$，$x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{1+x_n}$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求之.

4. 设 $x_1>0$，$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)$，其中 $a>0$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求之.

5. 设 $x_1>1$，$x_{n+1}=\dfrac{1}{1+x_n}$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

6. 证明 $x_n=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{n}}}}$ 收敛.

7. 设 $H_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}(H_n-\ln n)$ 存在.

8. 设 $a>0$，$S_1=\ln a$，$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\ln(a-S_k)$，试证：(1) $a-S_n\geqslant 1$；(2) $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在，并求之.

9. 设 $x_n>0$，$x_{n+1}+\dfrac{1}{x_n}<2$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

10. 设 $x_n>0$，$x_n+\dfrac{4}{x_{n+1}^2}<3$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

11. 设 $x_1=a>0$，$y_1=b>a$，$x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}$，$y_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$、$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 存在且相等.

12. 设 $0<a_1<b_1$，$a_{n+1}=\dfrac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$，$b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$、$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 存在且相等.

13. 设 $x_n=\cos x_{n-1}$，$n\geqslant 1$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

二、利用夹逼定理求极限

1. 设 $a\geqslant 0$，$x_n=\sqrt[n]{[a[a\cdots[a]\cdots]]}$（$n$ 层取整函数$[\cdot]$），求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

2. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}\right)=\mathrm{e}$.

3. 设 $a_k>0$，$k=1,2,\cdots,m$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+\cdots+a_m^n}$.

4. 设 $0<\alpha<1$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}((n+1)^\alpha-n^\alpha)$.

5. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(n^k+1)^{-\frac{1}{k}}$.

6. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2+n+k}$.

三、利用初等变形及重要极限求极限

1. 设 $|x|<1$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})$.

2. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

3. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}$.

4. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1+a+\cdots+a^n}{n}\right)^n$，其中 $|a|<1$.

5. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\arctan(n-\ln n\cdot\sin n)$.

6. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{2\cdot 3}\right)\left(1-\dfrac{2}{3\cdot 4}\right)\cdots\left(1-\dfrac{2}{n(n+1)}\right)$.

7. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.

8. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sin(\ln(n+1))-\sin(\ln n))$.

9. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$.

10. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}(e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\cdots+e^{\frac{n}{n}})$.

11. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{1+\cdots+k}$.

12. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+3)!}$.

13. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{n}\right)$.

14. 设 $(1+\sqrt{3})^n=a_n+b_n\sqrt{3}$，其中 a_n,b_n 为正整数，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$.

15. 设 $|a_0|<1$，$a_n=\sqrt{\dfrac{1+a_{n-1}}{2}}$，求：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}4^n(1-a_n)$；(2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_1a_2\cdots a_n$.

16. 求数列 $x_n=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ 的极限.

17. $\forall\ x>0$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ 的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{x_n}-1)=\ln x$.

18. 设 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 为正数列，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n^n=a>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n^n=b>0$，又设 p、q 为非负数，$p+q=1$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}(pa_n+qb_n)^n=a^pb^q$.

四、利用数列极限与函数极限的关系求极限

1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right]^n$，其中 $a>0,b>0$.

2. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\tan\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

第三讲　函数极限的简单求法

一、初等变形法求极限

1. 分子、分母有理化法

(1) 求 $\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}, a>0.$

(2) 求 $\lim\limits_{x\to-\infty}x[\sqrt{x^2+100}+x].$

(3) 设 $\sum\limits_{k=1}^{n}c_k=0$，$n$ 为正整数，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}c_k\sqrt{1+x^2+k}$.

2. 通过裂项使所求极限化为多个可求极限法

(1) 求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$.

(2) 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^{x^2}-b^{x^2}}{(a^x-b^x)^2}, (a,b>0)$.

(3) 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$.

(4) 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\ln(1+x)}$.

3. 三角公式法

(1) 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}\sin x}{x^3}$.

(2) 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x\cos2x\cos3x}{1-\cos x}$.

(3) 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(a+x)\tan(a-x)-\tan^2a}{x^2}$.

4. 提取因式法

(1) 求 $\lim\limits_{x\to0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$.

(2) 求 $\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{2^x+3^x}{5}\right)^{\frac{1}{x}}$.

(3) 求 $\lim\limits_{\alpha\to\beta}\dfrac{e^\alpha-e^\beta}{\alpha-\beta}$.

5. 变量替换法

(1) 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x)$.

(2) 求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$，其中 n 为正整数.

(3) 求$\lim\limits_{x\to 0}x\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

(4) 求$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)$.

(5) 求$\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$.

6. 取 $e^{\ln}$法

(1) 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^x-1}{x^2}$.

(2) 求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-1}{x-1}$.

(3) 求$\lim\limits_{x\to +0}x^x$.

(4) 求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$,

$a_i>0, i=1,2\cdots n, n$ 为正整数.

二、利用等价无穷小求极限

1. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$.

2. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin^2x+e^x)-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x}$.

3. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$.

4. 求$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-(\sin x)^{\alpha+\beta}}{\sqrt{(1-\sin^\alpha x)(1-\sin^\beta x)}}$, $\alpha,\beta>0$.

5. 求$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[k]{(x+a_1)\cdots(x+a_k)}-x\right)$, k 为正整数.

三、利用重要极限求极限

1. 求$\lim\limits_{x\to +0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$.

2. 求$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$.

3. 求$\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\cot\pi x}$.

4. 求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

5. 求$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$.

6. 求$\lim\limits_{x\to +\infty}[(x+2)\ln(x+2)-2(x+1)\ln(x+1)+x\ln x]$.

7. 求$\lim\limits_{x\to +0}\left\{\ln(x\ln a)\cdot\ln\left[\dfrac{\ln ax}{\ln\left(\dfrac{x}{a}\right)}\right]\right\}$, $a>1$.

四、利用导数定义求极限

1. 设 $f'(0)$存在, $f(0)=0$, 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{\tan 5x^2}$.

2. 设 $f'(0)$、$g'(0)$存在，$f(0)=g(0)$，求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-g(-x)}{x}$.

3. 设 $f(x)$三次可微，$f(2)=1$，$f'(2)=3$，$f''(2)=5$，$f'''(2)=7$，求

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)+f'(x)+f''(x)-9}{x-2}$$

4. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2+\tan x)^{10}-(2-\sin x)^{10}}{\sin x}$.

5. 设 $f'(a)$存在，$f(a)\neq 0$，求$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n$.

6. 设 $f'(x_0)$存在，$a_n<x_0<b_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=x_0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=x_0$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}=f'(x_0)$.

五、利用洛必达法则求极限

1. 求$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}\right]^{\frac{1}{x}}$.

2. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(a_1x)\cos(a_2x)\cdots\cos(a_nx)}{x^2}$.

3. 求$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right]^{\frac{1}{x}}$，其中 $a_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$，n 为正整数.

4. 求$\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right]$，其中 m，n 为正整数.

5. 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\tan x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

6. 求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

7. 求$\lim\limits_{x\to 0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$.

8. 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$.

9. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}$.

10. 求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x-x\ln a}{b^x-x\ln b}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

11. 设 $f(x)$在 $x=a$ 的某邻域内有连续的二阶导数，且 $f'(a)\neq 0$，求

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{f(x)-f(a)}-\frac{1}{(x-a)f'(a)}\right)$$

12. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有二阶导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，$f''(0)=4$，求$\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$.

13. 设 $f(x)$在 $x=0$ 的某邻域内有二阶导数，求证

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right]=\frac{f''(x)}{2}$$

第四讲　函数的连续性

一、函数的连续性问题

1. 讨论 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(e^n+x^n)}{n}$，$x>0$ 的连续性.

2. 讨论 $f(x)=\lim\limits_{m\to\infty}[\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n(m!\ \pi x)]$的连续性.

3. 证明黎曼函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n} & 当\ x=\dfrac{m}{n},(m,n)=1\\ 0 & 当\ x\ 为无理数\end{cases}$在有理数点处不连续，在无理数点处连续.

4. 设 $f(x)$、$g(x)$连续，证明 $h(x)=\max\{f(x),g(x)\}$连续.

二、间断点问题

1. 讨论下列函数的间断点：

(1)$y=x[x]$.

(2) $y=\dfrac{1}{1-\exp\left(\dfrac{x}{1-x}\right)}$.

(3) $y=\begin{cases}\dfrac{x(x+2)}{\sin\pi x} & x<0\\ \dfrac{x}{x^2-1} & x\geqslant 0\end{cases}$.

2. 设 $f(x)$为连续奇函数，$f(x)$不恒为 0，在 0 点可导，问 $x=0$ 为$\dfrac{f(x)}{x}$的何种间断点.

三、与连续函数的性质有关的问题

1. 求定义在$(-\infty,+\infty)$上满足 $f(x^2)=f(x)$的所有连续函数.

2. 设 $\varphi(x)$、$\psi(x)$为连续周期函数，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[\varphi(x)-\psi(x)]=0$，证明 $\varphi(x)\equiv\psi(x)$.

3. 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，$0<a<c<d<b$，证明$\exists\ \xi\in[a,b]$，使

$$(a+b)f(\xi)=af(c)+bf(d)$$

4. 设 $f(x)$在(a,b)内连续，$x_i\in(a,b)$，$i=1,2,\cdots n$，n 为正整数，证明$\exists\ \xi\in(a,b)$，使

$$f(\xi)=[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)]/n$$

5. 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，且存在数列$\{x_n\}$，$x_n\in[a,b]$，使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=A$，证明$\exists\ \xi\in[a,b]$，使 $f(\xi)=A$.

6. 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内达到最大值、最小值，则$\exists\ x_1,x_2\in(a,b)$，使得 $f(x_1)=f(x_2)$.

7. 在$(-\infty,+\infty)$上不存在连续函数 $f(x)$，使得对于任意的 c，方程 $f(x)=c$ 均有且恰有两个解.

8. 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，且 $f(f(x))=x$，证明$\exists\ \xi$，使 $f(\xi)=\xi$.

9. 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，且值域也是$[a,b]$，证明$\exists\ \xi\in[a,b]$，使 $f(\xi)=\xi$.

10. 设 $f(x)$在$[0,n]$上连续($n\geqslant 2$ 自然数)，$f(0)=f(n)$，证明$\exists\ \xi\in[0,n-1]$，使 $f(\xi)=f(\xi+1)$.

11. 证明方程$\frac{a_1}{x-\lambda_1}+\frac{a_2}{x-\lambda_2}+\frac{a_3}{x-\lambda_3}=0$.$(\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3,a_1,a_2,a_3>0)$在$(\lambda_1,\lambda_2)$和$(\lambda_2,\lambda_3)$内分别仅有一个根.

12. 证明奇数阶多项式至少有一个实根.

13. 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，且 $f(a)=f(b)=0,f'(a)f'(b)>0$，证明在(a,b)内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=0$.

14. 设 $f_n(x)=x^n+x$，(1) 证$\forall\ n\geqslant 1,f_n(x)=1$ 在区间$\left[\frac{1}{2},1\right]$上有且仅有一实根 a_n；(2) 证$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，并求之.

15. 设 $f_n(x)=x+x^2+\cdots+x^n(n=2,3,\cdots)$，(1) 证$\forall\ n\geqslant 1,f_n(x)=1$ 在区间$[0,+\infty)$上有且仅有一实根 a_n；(2) 证$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，并求之.

16. 设 $f(x)$满足(1) $a\leqslant f(x)\leqslant b$；(2) $\exists\ k\in(0,1),\forall\ x,y\in[a,b],|f(x)-f(y)|\leqslant k|x-y|$，设 $x_1\in[a,b]$，定义序列$\{x_n\}$：$x_{n+1}=f(x_n)$，证明$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ 存在，记为 α，且 $\alpha=f(\alpha)$.

17. 设 $f(x)$满足(1)$a\leqslant f(x)\leqslant b$；(2) $\forall\ x,y\in[a,b],|f(x)-f(y)|<|x-y|$，设 $x_1\in[a,b]$，定义序列$\{x_n\}$：$x_{n+1}=\frac{1}{2}[x_n+f(x_n)]$，证明$\lim\limits_{n\to-\infty}x_n$ 存在，记为 α，且 $\alpha=f(\alpha)$.

第五讲　导数的计算方法

一、思考题

1. 下列说法是否正确？

(1) 若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则在 x_0 的某邻域有界.

(2) 若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则在 x_0 的某邻域连续.

(3) 若 $f(x)$ 在 x_0 处右(左)可导，则在 x_0 右(左)连续.

2. 设 $h(x)=\begin{cases} f(x) & x\in(x_0-\delta,x_0) \\ g(x) & x\in[x_0,x_0+\delta) \end{cases}$ 在下列情形能否断定 $h(x)$ 在 x_0 可导？

(1) $f(x)$、$g(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内有定义，且 $f'(x_0)=g'(x_0)$.

(2) $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 内可导，$g(x)$ 在 $(x_0,x_0+\delta)$ 内可导，极限 $\lim\limits_{x\to x_0-0}f'(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0+0}g'(x)$ 存在且相等.

二、分段函数的定义求导法

1. 讨论 $f(x)=\begin{cases} (x-2)^{\alpha}\arctan\dfrac{1}{x-2} & x\neq 2 \\ 0 & x=2 \end{cases}$ 在分段点的连续性及可导性，其中 α 为常数.

2. 讨论 $f(x)=|\ln|x||$ 的可导性.

3. 设 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续，分别讨论函数 $f(x)=(x-a)\varphi(x)$，$g(x)=|x-a|\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处是否可导.

4. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有定义，且 $\forall\, x$，有 $f(x+1)=2f(x)$，而当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=x(1-x^2)$，讨论 $f(x)$ 在 0 点的可导性.

5. 设对于任意的 $0<\alpha,\beta<1$，$\alpha+\beta=1$，及固定的 $f(x)$ 定义域内的两点 $x_1<x_2$，满足 $f(\alpha x_1+\beta x_2)\leqslant\alpha f(x_1)+\beta f(x_2)$，且 $f(x)$ 在点 x_1,x_2 处可导，证明 $f'(x_1)\leqslant\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant f'(x_2)$.

6. 研究函数 $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ 的各阶可导性.

三、利用变形方法求导

1. 设 $y=\log_x^{\sin x}+x^{\frac{1}{x}}+\dfrac{5^{3x}}{2^x}$，求 y'.

2. 设 $y=x^{a^x}+a^{x^x}+x^{x^a}$，求 y'.

3. 设 $f(t)=\left(\tan\dfrac{\pi t}{4}-1\right)\left(\tan\dfrac{\pi t^2}{4}-2\right)\cdots\left(\tan\dfrac{\pi t^{100}}{4}-100\right)$，求 $f'(1)$.

4. 设 $y=\dfrac{3}{2}(1-\sqrt[3]{1+x^2})^2+3\ln(1+\sqrt[3]{1+x^2})$，求 y'.