

十年制学校初中課本(試用本)

代数第二册教学参考书

人民教育出版社

十年制学校初中课本(试用本)

代数第二册教学参考书

北京市书刊出版业营业许可出字第2号

人民教育出版社编辑出版(北京景山东街)

新华书店发行

人民教育印刷厂印装

统一书号: K7012·1817 字数: 25 千

开本: 787×1092 毫米 1/32 印张: 1

1961年第一版 1962年第二版

第二版 1962年6月第一次印刷

北京: 1—11,360 册

定价 0.11 元

目 录

第五章 因式分解	1
第六章 分式	9
一 分式和分式的基本性质	10
二 分式的运算	14
三 分式方程	17
第七章 根式	20
一 方根	21
二 数的开平方	23
三 实数	25

第五章 因式分解

教材說明

(一) 因式分解是一种重要的恒等变换,在今后的学习中有广泛的应用,特别是在分式运算中,經常要用到。課本先通过算术中分数的約分和通分中需要分解因数的例题,类比說明学习因式分解的必要和因式分解的意义,并且指出它和乘法运算的关系。而后,研究了因式分解的三种基本方法:提取公因式法,分組分解法,应用公式分解法。由于有些二次三項式,利用十字相乘法进行分解比較方便,所以課本又单独介紹了十字相乘法。最后,讲解多項式因式分解的一般步骤。

(二) 本章的教学要求主要是:使学生了解因式分解的意义,掌握因式分解的基本方法,能够熟練地灵活运用各种方法进行因式分解。

(三) 本章教材的重点是因式分解的三种基本方法。

在今后的学习中,进行因式分解,主要是用上述三种基本方法或者是綜合应用这三种基本方法。为了使學生把这三种基本方法学好,課本对每一种基本方法都作了詳細的讲解。在通过例题得出每一种分解方法或公式之后,由易到难地用一些典型的例题說明每一种方法或每一个公式的具体应用,并且通过一定数量的练习,使學生逐步掌握这些方法。在學生掌握了这三种基本方法以后,又举例說明怎样綜合应用各种

方法来分解因式. 这里着重说明多项式因式分解的一般步骤, 培养学生灵活地运用各种方法的能力, 使学生能切实掌握这一重点教材, 为今后学习打下基础.

(四) 学好本章教材的关键在于理解因式分解的意义. 学好提取公因式法的关键在于掌握求各项公因式的方法; 学好分组分解法的关键在于理解各组中的对应项成比例; 学好应用公式分解法的关键在于掌握各个公式的特点和理解字母的广泛意义; 学好十字相乘法的关键在于理解二次项系数与常数项分成两对因数交叉相乘积的代数和等于一次项的系数.

1. 在分解因式的过程中, 学生容易发生象下面这样的错误: (1) 只分解多项式的一部分, 如 $x^3 - x^2 + x - 1 = x(x^2 - x + 1) - 1$; (2) 有的因式还可以分解而不分解, 如 $a^3 + a^2b - ab^2 - b^3 = a^2(a+b) - b^2(a+b) = (a+b)(a^2 - b^2)$. 发生这些错误的主要原因是没有真正理解因式分解的意义, 即因式分解必须是把一个多项式化成几个整式的积 (写成连乘的形式) 而不是代数和, 而且要分解到不能再分解为止, 因式分解才算最后完成. 学生真正理解了因式分解的这些意义, 就可能克服分解中的盲目性, 正确地进行因式分解. 为了抓住这个关键, 课本除了开始时就说明什么是因式分解外, 还特地指出它和乘法运算的关系, 并且除了分组分解法以外, 都从乘法导出因式分解的各种方法, 以加深学生对因式分解意义的了解. 至于分解到不能再分解为止, 这不是学生刚开始学习时所能理解的, 必须在掌握了一定的基本方法之后, 并且通过具体例题的演算, 才能逐步理解和掌握. 因此, 课本到讲完三

种基本方法后,在§5.4的例9、例12才讲解这类问题,然后在§5.6因式分解的一般步骤中明确提出了这一点,逐步培养学生判断分解后的每一个因式(指多项式)是否还能分解的能力. [“分解到不能再分解为止”的这个概念,是与数的概念密切相联系的.也就是说,是对某一范围内的数来说的.在本章中,由于数的概念尚未扩充到实数,所以是指在有理数的范围内而说的.例如 x^2-4 需要分解成 $(x+2)(x-2)$,而 x^2-5 就认为不能分解,但学过实数以后, x^2-5 就需要分解成 $(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$.]

2. 要提取公因式,必须首先找出各项的公因式. 所以掌握求各项公因式的方法是学习提取公因式法的关键. 为了使学生掌握住这一关键,课本在说明提取公因式的方法以后,就通过三个例题,把多项式里的每一项先写成公因式与另一个因式的乘积,使学生理解,从多项式各项中所提取的公因式,应当符合下面的两个条件: 第一,它的系数应当是已知多项式各项系数的最大公约数; 第二,每一个字母的指数应当是已知多项式各项中这个字母指数最小的一个.

3. 一个多项式能否应用分组分解法,决定于在把这个多项式分成若干组后,所分成各组的对应项成比例. 所以了解所分成的各组的对应项成比例这一点,是掌握分组分解法的关键. 为了抓住这个关键,课本首先通过例题,说明一个多项式可以分组分解,就需要分成的各组都能提取公因式(包括提出公因数1或-1),而且各组提出公因式以后,另一个因式是相同的. 这个条件也就是说,各组中的项数要相等,而且所分

成各組的对应項成比例. 由于学生在算术里已經学过比例, 指出这一点, 有助于他們更好地掌握分組分解法. 課本中以后所举的每个例题, 虽各有不同的要求, 但都是抓住这一个关键, 来判断这个多項式能否应用分組分解法来分解以及怎样进行分組.

4. 要判断一个比較复杂的多項式能否应用公式来进行分解, 学生往往感到困难. 其主要原因在于他們还没有深入掌握各个公式的特点, 以及沒有深入理解字母的广泛意义. 因此, 使学生掌握各个公式的特点并理解字母的广泛意义是掌握应用公式分解法的关键. 这样也就解决了学生学习因式分解中的一个难点. 为了抓住这一关键、解决这一难点, 首先, 課本把七个公式分成兩組来介紹. 一組是二項的, 包括平方差、立方和与立方差三个公式; 一組是三項或四項而分解后是二項式的乘方的, 包括二項式的平方与立方公式. 这样分类有助于学生从每个公式的項数、系数和指数上掌握它們的特点. 其次, 在导出每一类型公式以后, 都由簡到繁地配置了一定数量的例题, 并且通过对每一例题的具体分析, 即先看它的項数是属于那一組, 再看它的系数和指数是否符合于某一个公式, 而后把多項式化成合于公式特点的标准形式. 如 § 5.4 中的例 8, 就是先分析多項式 $49(2m-3n)^2-9(m+n)^2$ 后并把它写成 $[7(2m-3n)]^2-[3(m+n)]^2$ 的形式, 使学生易于看出它合于兩数平方差的公式, 而且体会到公式中的字母不仅可以表示一个数或單項式, 而且可以表示一个多項式. 最后, 通过練習, 使学生逐步掌握各个公式的特点和理解公式中字

母的广泛意义。

課本通过 §5.4 例 10 讲解两数平方差公式和二项式平方公式的综合应用时，介绍了因式分解中經常用到的配方法（沒有提出这一名称）。掌握配方法的关键在于根据一次項（对于主要字母来说）的系数写出一个合于完全平方的常数項，因此課本除了用配方法作一些因式分解的练习外，还用如例 11 类型的例题和习题，使学生掌握配方法的关键，为今后学习一元二次方程的求根公式、二次函数求极值等打下基础。

5. 十字相乘法，就在于找出二次項系数和常数項的各一对因数，这两对因数交叉相乘积的代数和要等于一次項的系数。理解这一点是掌握十字相乘法的关键。因此，課本首先通过例题，联系乘法讲清了这一点。而且先讲容易理解的二次項系数为 1 的例题（二次項系数为 1 的，并不需要用十字相乘法而可以直接由視察求得常数項的两个因数，課本用它来作为过渡，有助于学生理解和掌握十字相乘法），再讲較复杂的二次項系数不是 1 的例题。然后又通过例题，抓住这一点来说明如何根据所給多項式，把二次項系数和常数項分解成两对因数。

（五）本章教材的主要难点是綜合应用各种方法分解因式。此外，提取公因式法的难点是提出公因式后正确地求出另一个因式；分組分解法的难点是适当的分組；应用公式分解法的难点是掌握公式的特点和理解公式中字母的广泛意义；十字相乘法的难点是把二次項系数和常数項分解成两对合于条件的因数。

1. 如前所述,在实际解题中的因式分解,往往需要根据所給的多項式,灵活地选用或者綜合交錯地使用各种方法,这在初学因式分解的时候,是一个很大的困难.为了解决这个困难,課本在讲解各种方法的时候,不仅通过一定数量的例题讲清每一种方法和每一个公式的特征和关键,还注意到针对学生学习上的困难或容易发生的錯誤安排了一些例题.再通过练习,使学生了解和掌握应用这一种方法或者这一个公式来分解的多項式的特征,能够熟练地应用每一种方法或者每一个公式来分解比較简单的多項式的因式.在此基础上再出現用两种方法或者两种公式来分解的例题和习题,如§5.4例10、例12,习题二十九的第7、第8题等,逐步培养学生綜合应用各种方法的能力.“补充习题集”中第五章习题二十九第6题的(1)一(5)也属于这样一类的题目,可供教学中作补充、参考之用.在讲完三种基本方法之后,又通过例题归纳出多項式因式分解的一般步骤,給学生指出分解因式时的一条思路.在这个一般步骤中的第二条,指的是以下三种情形:第一、可直接应用公式或分組分解法来分解,如§5.6例1、例3;第二、先分組,并对各組分別应用公式(或部分組应用公式,部分組提取公因式)进行分解,然后对整个式子提出公因式,如习题三十一第8题的1、(3)、(4);第三、先分組,并对各組(或部分組)分別应用公式,然后对整个式子再应用公式,如§5.6例4、例5和习题二十九第9题.这三种情形中分組的目的,是为了提取公因式或者应用公式.

2. 在应用提取公因式法分解因式时,学生最容易发生如

下的一些錯誤：(1)忽略公因式的數字系數必須是最大公約數；(2)如果某一項與公因式完全相同時，在寫另一個因式時，容易忽略寫出這一項的1，發生如 $x^2 - xy + x = x(x - y)$ 的錯誤；(3)如果多項式的第一項是負號，當提出負的公因式以後，不注意到括號里各項的符號都應該變號，而發生如 $-ma + mb - mc = -m(a + b - c)$ 的錯誤；(4)對於需要經過變換後才能提取公因式的多項式，如 $x(a - b) - 3(b - a)$ 常因看不出它的公因式而不分解。發生這些錯誤的原因，主要是對提取公因式法還掌握得不牢，特別是提出公因式後另一個因式應該是什麼理解得不深。為了防止這些錯誤，課本在例題中作了安排。如例2、例3是針對錯誤(1)的，例3、例7和例6是分別針對錯誤(2)和(3)的，通過這三個例題，使學生進一步理解和掌握另一個因式應該是什麼和怎樣求這個因式的方法，即用提出的公因式去除已知多項式的各項，求出另一個因式，把它寫在括號內；也可以直接觀察多項式的每一項提出公因式後，余下的各是什麼因式，這些因式的代數和就是另一個因式。例7是幫助學生解決(4)的困難的。同樣，在習題里除了配置有以掌握提取公因式法的一般性題目外，還針對上述錯誤配置了各種題目。

3. 如前所述，分組分解法首先要掌握分成的各組的對應項必須成比例。此外，還要能夠熟練地進行項的交換和添括號。這些，就使學生感到分組分解法的困難。為了解決這個困難，課本採取分散難點的辦法安排了例題，使學生逐步掌握這個基本方法，前兩個例題已給分了組，例1只是把後兩項

添括号,例2添括号后各项要变号;例3、例4要先分组,但例3较容易,例4就要交换项后才能分组,而且添括号后要变号。

4. 应用公式分解的难点是掌握公式的特点和理解字母的广泛意义。关于这一点,已在(四)之4中谈过了。

5. 用十字相乘法分解因式就在于把二次项系数和常数项分解成两对合于条件的因数,这样的两对因数,就要通过交叉相乘的多次试验才能确定。这种多次试验,使得学生感到很难掌握。为了解决这个难点,课本先从二次项系数是1的简单情况入手,使学生初步掌握十字相乘的方法,然后再研究二次项系数不是1的情况。由于一般只在系数比较简单时才应用这种方法,所以课本中的例题和习题的系数也选择比较简单的,而且二次项系数都为正,通过不同例题的讲解,使学生能够切实掌握这种方法,特别是决定常数项两个因数符号的方法,即:(1)如果常数项为正,那么两个因数同号,而且与一次项系数的符号相同。(2)如果常数项符号为负,那么两个因数异号,当一次项系数为正时,交叉乘积绝对值大者为正;当一次项系数为负时,交叉乘积绝对值大者为负。(在二次项系数为1时,交叉乘积绝对值的大小,就是常数项两个因数绝对值的大小。)掌握了这个决定常数项两个因数符号的方法,就可以减少试验的次数。

(六) 本章教材的教学时间估计需要24课时左右。各部分所需时间,大致如下:

因式分解的意义、提取公因式法、分组

分解法..... 6 课时左右

应用公式分解法、十字相乘法·····	11 課时左右
多項式因式分解的步驟·····	6 課时左右
复习·····	2 課时左右

第六章 分式

(一)本章教材首先通过实际问题引进了分式的概念,并且根据有理数除法的法則总结出分式的符号变化法則;其次,把分数的基本性質推广到分式,說明分式約分、通分的方法;然后,在这个基础上,讲解分式的四則运算;最后,讲解可用一次方程解的分式方程.

(二)本章的教学要求主要是:

1. 使学生理解分式的意义和它的基本性質,能够熟練地进行分式的約分和通分;

2. 使学生掌握分式四則运算的法則,能够熟練地进行分式的运算;

3. 使学生了解分式方程的意义,掌握解分式方程的步驟,能够正确地、熟練地解分式方程、分式方程組和列出分式方程或分式方程組来解应用題.

(三)本章教材的重点是分式的四則运算.学好本章教材的关键在于能够熟練地进行約分和通分,以及正确地进行分式符号的变化.本章教材的主要难点是分式的四則混合运算和理解决产生增根的原因,对于这些内容,将在下面各单元教

材說明中詳細說明。

(四)本章教材的教學時間估計需要 22 課時左右。各部分所需的教學時間，大致如下：

I 分式和分式的基本性質	6 課時左右
II 分式的運算	8 課時左右
III 分式方程	5 課時左右
復習	3 課時左右

一 分式和分式的基本性質

教材說明

本單元教材先通過實際問題引進分式的概念；接着，講解在分式的等值變換中，關於分子分母和分式本身三個符號的變化法則；然後把分數的基本性質推廣到分式；最後，聯繫分數知識，講解約分和通分的方法。學習本單元教材，主要是為了給下一單元學習分式四則運算作好準備。

(一)本單元的教學要求主要是：

1. 使學生理解分式的意義，特別是字母取值的範圍，掌握分式的符號變化法則；

2. 使學生掌握分式的基本性質，能夠熟練地進行約分和通分。

(二)本單元教材的重點是約分和通分以及分式的意義。

1. 異分母分式的加減法必須先行通分；運算所得結果，

如果是分式，而它的分子和分母有公因式，还要进行約分化为最簡分式；分式相乘，如果各个分式的分子、分母之間有公因式时，也要先进行約分。所以約分和通分，是本单元教材的重点。为了突出这个重点，課本先分別联系分数，用对比的方式說明約分和通分的意义；接着，再分別通过例題，分成两种情形，归納出分式約分、通分的法則；然后又通过例題說明法則的应用，以加深学生对法則的理解和掌握。另外，还配备了一定数量的各种类型的习题，让学生練習，以达到能够熟練地进行約分和通分的要求。

2. 由于分式的基本性質，分式的符号变化法則等，都是从分式的意义推导出来的。同时，分式的意义也是今后理解分式方程的增根以及有理分函数的定义域等重要問題的基础。所以分式的意义也是本单元教材的一个重点。又分式与分数既有联系又有区别，由于有联系，所以学生易于接受分式的有关知識，但也容易使学生忽視分式的特点，以致理解不深，而发生种种錯誤。学生最易发生誤解的有以下三点：(1)分式是仅就分母中含有字母而言的，分式的值既可以是分数，也可以是正、負整数或零；(2)字母可以取任意的值，但不能使分母的值为零；(3)当分式中分子或分母是一个多項式的时候，在約分、通分以及符号变化等等值变形中，必須把整个多項式作为分子或分母来考虑，不能把多項式的某一项作为分子或分母来处理，換句話說，分式中的“分数綫”同时起着“括号”的作用。为了使学生能够透彻理解分式的意义，弄清楚分式和分数、分式和整式之間的联系与区别，課本开始先通过写出某

些实际问题的数量关系的代数式，指出这些代数式的分母里含有字母这个特点，引入了分式的概念，并注意划清它跟整式的区别。接着进一步从除法说明分式的意义，着重指出零不能做除数，因此字母所取的值就不应当使分母的值为零。为了使学主牢固地掌握这个内容，在习题三十二里配了2、3、4三个题目让学生练习。通过第4题的练习，还可以使学生认识到分式的值既可以是分数，也可以是整数；同时还为今后学习函数概念时难于理解的对应关系和定义域积累了感性知识。为了使学主掌握分式的分子、分母是多项式时的等值变形，课本特别注意在每一部分教材中多举这方面的例题。

(三)学好本单元教材的关键在于掌握分式的基本性质。

约分和通分的根据是分式的基本性质。只有学主掌握了分式的基本性质之后，才能正确地理解约分和通分的法则，从而才有可能牢固地掌握这些法则。否则，就经常要发生错误。例如，学主在约分和通分中，容易发生类似下面的一些错误：

$$\frac{a+x}{b+x} = \frac{a}{b}, \quad \frac{a+b}{a+b} = 0, \quad \frac{a+b}{a^2-b^2} = \frac{1+1}{a-b}, \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a}{bd} + \frac{c}{bd}$$

从这些错误来看，有的是把“约去”理解为“减去”，有的不是把“整个”分子、分母同除以代数式。造成这些错误的主要原因，是对分式的基本性质还没有真正的理解和掌握。为了抓住这个关键，课本先通过分数的具体例子，把分数的基本性质推广到分式。接着通过例题，企图突出说明基本性质中“分式的值不变”这一点，即必须用同一个不为零的代数式来“乘”或“除”分式的分子和分母，而不是“加”或“减”；如果分子、分母是多

項式或者去乘除的代數式是多項式，那麼應該依照多項式的乘除法演算，而不能僅乘除多項式的某一項。

(四)本單元教材的主要難點是分式的符號變化法則。

學生進行分式運算時，還容易在符號上發生類似下面的

一些錯誤：
$$\frac{-a-b}{a-b} = -\frac{a-b}{a-b}, \frac{a}{c+d} - \frac{b}{c-d} = \frac{ac-ad-bc+bd}{c^2-d^2},$$

把 $\frac{0-a}{a-b}$ 看作既約分式。產生這些錯誤的主要原因，在於他們

還沒有正確地掌握住分式的符號變化法則，不理解分式中“分數綫”同時起着“括號”的作用，當分子、分母是一個多項式時，不是明確地把整個多項式看作是分子、分母，因此在進行符號變化時，就不是從整個多項式考慮，而僅改變其中某一項的符號。為了解決這個難點，課本把分式的符號變化法則和分式基本性質這兩個內容分開來講，並且利用學生熟悉的有理數除法法則來說明分式、分子、分母符號的變化關係從而得出法則，然後再通過例題說明法則的應用。在例2中可使學生理解分子或分母是多項式時，要改變分子或分母的符號，必須同時改變分子或分母中每一項的符號。在習題二十二中第8、9、10題，都是這一類型的題目，使學生通過練習能牢固地掌握和正確處理分式運算中符號的變化。

參考資料

有關分式概念的問題。

(1) 從分式的定義：“分母里含有字母的代數式”可知判

断一个代数式是不是分式，唯一的标准就是分母中有没有变数字母。如代数式 $\frac{x-y}{a-b}$ ，如果 a, b, x, y 都是变数字母，那么它是一个分式，如果 a, b 是固定数值， x, y 是变数，那么它是一个整式。又如代数式 $\frac{(x^2+1)^2}{x^2+1}$ 虽然恒等于 x^2+1 ，但我们认为它是分式。

(2) $\frac{1}{x}, \frac{x-1}{(x-1)x}$ 这两个分式相等是有条件的。因为前者 x 可取 1，而后者不能。在简化分式时我们写出 $\frac{x-1}{x(x-1)} = \frac{1}{x}$ 是承认了在 $x \neq 0, 1$ 的条件下进行的。

二 分式的运算

教材说明

本单元教材是在学生掌握了分式约分通分的基础上，分别从分数四则运算的法则类推出分式四则运算的法则，结合分式的乘法，讲解了分式的乘方。然后，从同底数幂的相除与分式对比，引出了负整指数幂的意义和它的运算法则。引入了负整指数幂后，指数运算法则就由正整指数推广到整指数。因此，某些代数式(包括数)的书写与运算就可以简化。

(一)本单元的教学要求主要是：

1. 使学生掌握分式四则运算法则，能够熟练地进行分式运算；