

柯氏微積分學

1695

柯氏微積分學
上卷



乙酉學社叢書第一集

柯氏微積分學

上 卷

DIFFERENTIAL-UND INTEGRAL-RECHNUNG

BAND I
VON

R. COURANT

朱言鈞編譯

中華書局出版

* 印翻得不 · 權作著有 *

一九五二年一月三版

大學用書

柯氏微積分學(上卷)(全二冊)

◎定價人民幣三萬六千元

編譯者

朱

言

鈞

原書名 Differential und Integralrechnung
原作者 Richard Courant

出版者

上海河南中路二二一號
中華書局股份有限公司

印刷者

上海澳門路四七七號
中華書局上海印刷廠

發行者

三聯中華商務印書館聯合組織
中國圖書發行公司

各地分店

三聯商務印書館
中國圖書發行公司
聯開商中三
營明華聯
書書書書
店店館局店

總目編號(14528) (2起)印數2,001-3,000

原 序 要 旨

近年以來，微積分學課本之印行於世者，不可謂不多。然欲求一提綱鉤玄，引人入勝之作，使一讀之後，能瞭然於此學之影響及其應用之關係者，殊不易得。若專求理論之謹嚴而不問思想之起源，則初學見之，將茫然不知所措；或注意應用之例題而不講系統之聯繫，則易流於支離瑣碎之病。然則如何將基本與枝節問題加以應有之明辨，去其支蔓，明其精蘊，而後建立一完整之體系，俾會通於理論與應用之相應相倚，得左右逢源之樂；甚矣著述之難也。

本書係修訂前在德國荷廷根大學歷年之講稿而成；倉促從事，何敢自炫為理想之作。惟所敢自信者，此書之付印，在今日尚非贅事。就其所赴之目的及敘述之方式言之，似有其特殊之處，不僅材料之選擇與排次與眾不同而已。其最顯著者，為微分與積分學之混合編述，與一般之先論微分，後論積分者大異其旨。考微積之先後分論，實由於偶然之習慣，殊乏理論之根據，其結果使學者不能直捷觸及中心問題，即對於定積分、不定積分及導數之關係未能融會領悟，不可謂非憾事。自 Felix Klein 首創混合講述之法而風氣為之一變。今師其意以編本書；上卷所論，為一個自變數之函數問題，至二個以上自變數之理論及應用，擬留待下卷研討之；蓋採用是法以編課本者，前似未嘗見也。

近代數學所以能發生濃厚之美感者，要為推理方法之謹嚴。故立論必求符合謹嚴之最高標準，斯固然矣。雖然，管見所及，以為原始要

終，必追溯數學認識之本源而後可。考數學最後之所本，是否起自觀覺 (Anschauung)，爲一哲學問題，惟觀覺之有助於認識，則爲無可否認之事。因此之故，本書在不失謹嚴之條件下，擬力求觀覺之發揮與運用。凡基本概念與原理之闡明，必先求其淵源於觀覺之中；至其細密之分析，嚴正之證明，則列入每章之附錄中（初讀時可略去，俟感覺需要時細讀之）；凡此所爲，不特爲初學設想，蓋有深意存焉。

復次，本書所注意者，爲微積分學與應用問題之密切關係，晚近應用科學之昌明，固爲理論發展之結果，而應用問題之發生，常足以刺激理論之精進，其間互爲因果之關係，實爲科學發展之原動力。明乎是，乃可益見數學思想之優美與偉大，本書僅舉其大者要者，甚望讀者由此啓途，深思研尋，進窺此學之本原耳。

本書內容提要

本書根據 R. Courant 所著 Vorlesungen über Differential-und Integralrechnung 及最近出版之英譯本編譯而成，計分上下兩卷，此爲下卷，以多變數之函數作題材，觀極限問題之發展。先論偏導數及全微分，繼以重積分、線積分及面積分說明其間之關係及物理學中之應用。復就旁義積分之含參變數者與無盡級數作比較之研討，從而創造各種新式函數，大有引人入勝之感。最後應用全部原理以治複變數之函數，使微積分學得一完整之體系。國內理工大學採作教本，甚爲適宜。

柯氏微積分學

上 卷 目 次

原序要旨	(頁數)
第一章 實數、函數與極限	1
第一節 實數略說	1
1.1.1 有理數之特性	1
1.1.2 實數之連續性	3
1.1.3 實數之表達形式	5
第二節 函數概念	6
1.2.1 函數之定義	6
1.2.2 函數之圖示	8
1.2.3 逆函數	13
第三節 初等函數略論	14
1.3.1 有理函數	14
1.3.2 代數函數	15
1.3.3 三角函數	16
1.3.4 指數與對數函數	17
第四節 數序之極限	18
1.4.1 數序	18
1.4.2 極限舉例	21
1.4.3 極限之定義	27
1.4.4 Cauchy 收斂法	29

1.4.5	獨行數序之收斂條件	30
1.4.6	極限之運算	30
1.4.7	e 與 π	32
第五節	連續變數之極限	35
1.5.1	再論極限之定義	35
1.5.2	舉例	36
第六節	函數之連續性	38
1.6.1	連續性之定義	38
1.6.2	間斷點	40
1.6.3	關於連續函數之定理	42
第一章附錄		44
第一節	聚點原則及其應用	45
A1.1.1	聚點原則	45
A1.1.2	聚點與極限	46
A1.1.3	Cauchy 審斂法之證明	47
A1.1.4	有涯獨行數序之收斂性	47
A1.1.5	最大與最小聚點; 數集之上下涯	48
第二節	關於連續函數之定理	50
A1.2.1	連續函數之最大與最小值	50
A1.2.2	均勻連續性	51
A1.2.3	介值定理	52
A1.2.4	獨行連續函數之逆函數	53
A1.2.5	其他定理	54
第三節	再論初級函數	54
第二章	微積分學之基本概念與定理	58
第一節	定積分	58

2.1.1	面積問題	58
2.1.2	定積分之定義	59
2.1.3	舉例	61
第二節	導數	66
2.2.1	導數與切線	66
2.2.2	導數與速度	69
2.2.3	求導數舉例	70
2.2.4	函數之可導性與連續性	71
2.2.5	高重導數及其意義	73
2.2.6	導數之中值定理	74
2.2.7	何謂微分	77
第三節	不定積分之定義;微積分學之基本定理	79
2.3.1	何謂不定積分	79
2.3.2	不定積分之導數	80
2.3.3	原函數、不定積分之普遍定義	82
2.3.4	定積分之計算	85
2.3.5	舉例	86
第四節	繪圖求積分之法	87
第五節	再論積分與導數之關係	89
第六節	積分估值法	91
2.6.1	積分之中值定理	91
2.6.2	中值定理之應用	92
第二章附錄		95
第一節	定積分之存在定理	95
第二節	積分中值定理與導數中值定理之關係	96
第三章	初等函數之微積分學	98

第一節 求導數之法	98
3.1.1 簡法四則	98
3.1.2 有理函數之導數	100
3.1.3 三角函數之導數	100
第二節 不定積分之簡單求法	101
3.2.1 與導數公式相對峙之積分公式	101
3.2.2 最簡單函數之積分	101
第三節 逆函數及其導數	103
3.3.1 逆函數之導數	103
3.3.2 冪函數之逆函數	105
3.3.3 三角函數之逆函數	106
第四節 疊函數之導數	109
3.4.1 鏈導法	109
3.4.2 舉例	111
3.4.3 再論 x^x 之積分及導數	112
第五節 對數函數及其逆函數	113
3.5.1 對數函數之定義及其特性	113
3.5.2 對數函數之逆函數、指數函數	116
3.5.3 普遍指數函數 a^x 及冪函數 x^a	117
3.5.4 指數函數之另一形式	118
3.5.5 指數函數之應用	120
第六節 雙曲函數及其逆函數	125
3.6.1 雙曲函數之定義及其特性	125
3.6.2 雙曲函數之逆函數	127
3.6.3 論雙曲函數與三角函數之相似	128
第七節 函數之數量級	130

3.7.1 何謂數量級	130
3.7.2 指數及對數函數之數量級	131
3.7.3 函數在任何一點隣近之數量級	133
3.7.4 函數趨零之數量級	133
第三章附錄	135
第一節 特殊函數舉例	135
第二節 再論函數之可導性	137
第三節 求導數法雜論	138
A3.3.1 二項式定理之證明	138
A3.3.2 高重導數之公式	139
A3.3.3 再論鏈導法之應用	139
第四章 積分學理之研討	141
第一節 最初淺之積分	141
第二節 變數交替法之討論及其應用	143
4.2.1 交替公式	143
4.2.2 交替公式之另一證明	146
4.2.3 舉例	148
第三節 分部積分法	151
4.3.1 分部積分之公式	151
4.3.2 舉例	152
4.3.3 遞演公式	153
4.3.4 關於 π 之 Wallis 公式	154
第四節 有理函數之積分	156
4.4.1 有理函數之基本式	157
4.4.2 基本式之積分	157
4.4.3 有理函數之分解	158

第五節 函數之有理化	162
4.5.1 三角及雙曲函數之有理化	162
4.5.2 再論交替法	166
第六節 不能用初等函數表達之積分	167
4.6.1 以積分作函數之定義	167
4.6.2 總論求積分與求導數	169
第七節 積分概念之旁推	170
4.7.1 函數之有間斷點者	170
4.7.2 積分變程為無限者	172
4.7.3 Γ 函數	173
4.7.4 Dirichlet 與 Fresnel 積分	174
第四章附錄	177
積分之第二中值定理	177
第五章 微積分學之應用	179
第一節 莫大與莫小值問題	179
5.1.1 審莫大及莫小值之法	179
5.1.2 舉例	183
第二節 論曲線之方程式	187
5.2.1 圓坐標之應用	187
5.2.2 參變數方程式	188
5.2.3 論曲線之導數	191
5.2.4 論曲線之幾何性質	194
第三節 平面曲線略論	196
5.3.1 論面積之正負	196
5.3.2 面積之普遍公式	198
5.3.3 曲線之弧長	201

5.3.4 曲線之曲率	205
5.3.5 質量中心與曲線矩	207
5.3.6 轉成面之面積與體積	208
5.3.7 轉動慣量	209
5.3.8 舉例	210
第四節 力學中最簡單之問題	214
5.4.1 力學中之基本假設	214
5.4.2 舉例	215
5.4.3 功量概念之應用	223
第五章附錄	226
法包線之性質	226
第六章 函數之展開	230
第一節 近似表達法舉例	230
第二節 Taylor 定理	233
6.2.1 關於整有理函數之 Taylor 公式	233
6.2.2 關於任何函數之 Taylor 公式	234
6.2.3 餘項之估計	235
第三節 初等函數之展開	237
6.3.1 指數函數之展開	237
6.3.2 $\sin x, \cos x, \sinh x, \cosh x$ 之展開	238
6.3.3 二項式級數	239
第四節 Taylor 定理在幾何學中之應用	241
6.4.1 曲線之接觸	241
6.4.2 再論曲線之曲率圓	243
6.4.3 再論莫大與莫小值問題	244
第六章附錄	245

第一節 函數之不能展開者	245
第二節 e 爲無理數之證明	245
第三節 二項式級數收斂之證明	246
第四節 函數之零點與無限點, 所謂不定式	247
第五節 插值公式及其與 Taylor 公式之關係	250
第七章 近似算法略論	254
第一節 積分之近似算法	254
7.1.1 矩形替代法	254
7.1.2 梯形替代法	255
7.1.3 Simpson 法	255
7.1.4 舉例	256
7.1.5 誤差之估計	258
第二節 中值定理及 Taylor 定理之應用	259
7.2.1 誤差問題	259
7.2.2 π 之計算	262
7.2.3 對數之計算	263
第三節 求方程式之近似根	264
7.3.1 Newton 法	264
7.3.2 伴設法	265
7.3.3 疊代法	266
7.3.4 舉例	268
第七章附錄	269
Stirling 公式	269
第八章 無盡級數綱要	273
第一節 基本概念	273
8.1.1 收斂與發散	273

8.1.2 絕對收斂與相對收斂	275
8.1.3 級數項之易位	278
8.1.4 無盡級數之運算	280
第二節 絕對收斂之充分條件	281
8.2.1 比較檢驗法	281
8.2.2 與幾何級數相比較	282
8.2.3 與定積分相比較	284
第三節 函數組成之級數	286
8.3.1 論函數序與曲線族之極限	286
8.3.2 勻斂性	288
8.3.3 勻斂之條件	292
8.3.4 勻斂級數之特性	293
8.3.5 無盡級數之導數問題	295
第四節 冪級數	297
8.4.1 冪級數之收斂性	298
8.4.2 冪級數之積分與導數	299
8.4.3 冪級數之運算	300
8.4.4 用冪級數表達之唯一性	301
第五節 再論函數之展開	302
第六節 複變數函數理論一瞥	306
8.6.1 複數略說	306
8.6.2 冪級數之由複數組成者	308
8.6.3 關於複冪級數之一定理	309
第八章附錄	311
第一節 級數之相乘相除	311
A8.1.1 絕對收斂級數之相乘	311

A8.1.2	冪級數之相乘相除	312
第二節	關於指數函數之極限	313
A8.2.1	$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \rightarrow e^x$ 之句數性	313
A8.2.2	$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$ 之證明	314
第三節	無盡級數與勞義積分	315
第四節	無盡乘積	316
第五節	無盡級數舉例	318
A8.5.1	函數展開舉例	318
A8.5.2	級數中有 Bernoulli 數出現者	320
第九章	Fourier 級數淺論	323
第一節	論週期函數	323
9.1.1	週期函數之特性	323
9.1.2	諧振動之重疊	326
第二節	利用複數以表達振動之重疊	329
9.2.1	複數之應用	329
9.2.2	用複數以表達振動之重疊	331
9.2.3	一連加公式之推演	332
第三節	函數展開為 Fourier 級數之問題	333
9.3.1	Fourier 係數	333
9.3.2	Fourier 級數舉例	334
第四節	Fourier 級數之收斂性	340
9.4.1	所表函數按段光滑者	340
9.4.2	Fourier 級數收斂性之研討	344
第九章附錄		347
	Fourier 級數之積分	347

第十章 關於波動現象之微分方程式·····	349
第一節 物理學中之振動現象·····	349
10.1.1 力學中最簡單之振動·····	349
10.1.2 電振動·····	350
第二節 論自由振動·····	351
10.2.1 齊性微分方程式之解·····	351
10.2.2 開始條件之適應·····	353
第三節 論強迫振動·····	354
10.3.1 齊性與不齊性微分方程式之關係·····	354
10.3.2 不齊性微分方程式之解·····	355
10.3.3 表達共振現象之曲線·····	356
10.3.4 強迫振動之特性·····	358
10.3.5 記錄儀器之製造問題略論·····	360
定理及公式撮要·····	362
雜題·····	379
答案及提示·····	400