六年制重点中学

高中微积分初步全一册

教学参考书

人民教育出版社

本书是在全日制十年制学校高中数学第四册教学参考书的基础上，根据《六年制重点中学高中数学课本微积分初步》编写的。本书由人民教育出版社组织编写，参加编写的有东北师范大学刘玉琏，长春市教育学院朱英民，吉林省教育学院孙涤寰、司徒植、李浩明等，并由孙涤寰校订。

六年制重点中学

高中微积分初步全一册(试用本)

教学参考书

吉林省教育学院编

*

人民教育出版社出版
北京出版社重印
北京市新华书店发行
北京第二新华印刷厂印刷

*

1984年12月第1版　1985年6月第1次印刷

书号 K7012·0724　定价 1.05 元

说　　明

本《教学参考书》是根据教育部颁发的《全日制六年制重点中学教学计划试行草案》的要求，按照六年制重点中学高中数学课本《微积分初步》的教学内容编写的，供教师使用．

微积分是人们认识客观世界中量的运动变化规律的一门科学，它的应用非常广泛，是进一步学习数学和其它自然科学以及一些社会科学的基础，是掌握现代生产技术所必需的基础知识．因此，在中学学习微积分初步知识，对于学生将来直接参加工作或进一步学习都是有益的．根据几年来的教学实践证明，在中学开设《微积分初步》这门课程，不仅是必要的，而且是可能的．

当然，由于受课时和学生数学基础以及接受能力的限制，在中学所讲微积分的内容、要求，与大学里的微积分要有所不同．中学只能讲微积分学的最基本、最常用和较简单的内容，不能在内容上求全，在理论上求严谨．因此，这本《微积分初步》只讲授一元微积分的基础知识，包括基本概念、基本运算方法和一些简单的应用；在注意知识的科学性和系统性的同时，又考虑到中学生的实际情况，在叙述方法上做了相应的改进，对于一些重要概念都力求从实际问题引入，定义的叙述较为通俗易懂；对于一些比较抽象，学生难以理解的概念，在不违反科学性的前提下，有的只给出直观描述，有的做了适当的简化；对于定理，有的给出了数学证明，有的证明较难、用到的知

识较多的定理，略而未证，但也着重分析定理的条件和结论，并给出几何直观解释.

本册教材总的教学目的要求是：理解极限、连续、导数、微分、不定积分和定积分等一元微积分学最基本、最重要的概念，熟练地计算初等函数的导数和较简单的积分，能用微积分的初步知识去解决一些有关实际问题；培养学生辩证唯物主义观点，提高逻辑思维、辩证思维能力和把实际问题转化为数学问题而加以解决的能力.

本册教材共五章，可分为三大部分：极限和连续；导数和微分及其应用；不定积分和定积分及其应用. 其内容安排，既注意到知识的系统性，又考虑到各部分知识之间的内在联系、逻辑关系. 极限概念是微积分的最重要、最基本的概念，它贯穿于整个微积分学的内容之中. 微积分学中几乎所有的基本概念，如连续、导数、定积分等都是由极限来定义的，求导数与求定积分的方法都是用极限的运算方法推导出来的. 因此，极限概念和运算法则是研究微积分全部内容的重要工具，是全部微积分的基础，所以把它安排在本册的第一章；导数和微分是组成微积分的主体内容之一. 微分的概念是在导数概念的基础上建立起来的，求微分与求导数的方法基本一致，所以教材把导数和微分安排在一章内讲授，重点是讲导数；导数的应用一章，是作为导数的直接应用而编排的，自然要放在导数与微分一章之后. 这一章的内容与以前学过的传统数学知识联系较为密切，可使一些较为烦难的传统内容得到简化，从而使学生认识到用导数处理一些传统内容以及解决一些有关实际问题，方法简便并具有一般性，进一步提高学

习微积分的积极性．因此，在导数与微分一章之后，单设一章《导数的应用》是必要的；不定积分和定积分也是微积分学的主体内容之一；不定积分是求函数的原函数问题，定积分是解决某种和的极限问题．求不定积分是求导数的逆运算，所以教材把不定积分安排在导数之后；求定积分要用到求不定积分，所以把定积分安排在不定积分之后．由于求不定积分要比求导数困难得多，因此不定积分与定积分教材中只选入一些较简单的积分法．

为了便于教师从学生实际出发，因材施教，使教学既有统一性又有灵活性，本书对一些内容标上 * 号作为选学内容，还配有数量较多的练习题、习题、复习参考题供选用．练习题，主要是用于巩固和理解基础知识，供课堂练习用；习题，以基本题为主，供课内外作业选用；复习参考题，分 A、B 两组，A 组题是按内容顺序安排的，主要供复习本章内容时选用．B 组题，综合性较强、灵活性较大，仅供学有余力的学生参考选用．

教师在进行《微积分初步》教学时，首先应注意把握其主要的目的要求，不宜过于追求内容上的完整、理论上的严谨，不要扩充教材．对于重要概念，一定要使学生理解其实质，弄清概念之间的联系和区别．对于主要定理，要着重使学生掌握它的条件、结论、几何解释和应用，有证明的可按教材给学生证明，没有证明的不必补充证明，带有 * 号的证明对于基础较差的班级也不必进行证明．对于公式、法则，要使学生了解推导方法，明确使用范围，要求学生牢记基本公式和基本法则，并能用它们熟练地进行有关运算；其次，应注意把微积分的教学与中学数学的传统内容结合起来，使其对已学过的初

等数学起到复习、巩固、提高的作用；再次，要注意理论联系实际，充分利用微积分中的辩证因素，培养学生的辩证唯物主义观点，提高学生用数学知识解决实际问题的能力.

本《教学参考书》每章的内容结构，大体分为四部分：教学要求；教材分析与教学建议；习题的答案、提示和解答；附录.

教学要求：按章（节）提出本章（节）的知识方面和思想教育方面的要求.

教材分析与教学建议：按章（节）说明教材内容的地位、作用以及各部分知识之间的联系、逻辑关系，指出本章（节）的重点、难点和关键，分条说明对教材内容的理解、提出教学建议，提出例题、习题的处理意见.

习题的答案、提示和解答：对教材中的练习题、习题、复习参考题都给出答案、提示或解答，较简单的题目一般只给出答案，较难的题目给出解答或提示.

附录：主要供教师参考. 其内容主要是教材中没给出证明的定理的证明、与教材内容有关的数学知识的引伸或提高的内容；与教材内容有关的数学史料，等等.

限于我们的水平，再加编写的时间仓促，错误或不妥之处肯定不少，敬请批评指正.

目　录

第一章 极 限

I 教学要求

1. 要求学生初步理解数列极限的定义($\varepsilon-N$ 定义)，并能应用数列极限的四则运算法则，计算一些简单的有理式的数列极限.

2. 借助函数的图象初步理解函数极限和函数连续的意义，并熟练地应用函数极限的四则运算法则和两个重要极限以及函数连续性，计算一些简单的函数极限.

3. 通过极限概念的教学，使学生初步理解极限的思想方法，从而了解有限与无限、近似与精确的辩证关系，培养学生的辩证唯物主义观点.

II 教材分析与教学建议

本章由极限与连续两部分组成．这两部分之间有着密切联系，前者是后者的基础.

极限是《微积分初步》这门课程的重要的基本概念和本章的重点．这是因为微积分中所有重要概念，如导数、定积分等，都是建立在极限概念的基础上．由于函数的自变量有不同的变化形式，相应地就有不同的极限．教材讲了三类极限，即数列极限和两类函数极限($x\to\infty$ 和 $x\to x_0$)．尽管这三类极限的形式不同，但是它们的思想是完全相同的.

教材严格讲授了数列极限定义($\varepsilon-N$ 定义).

教材讲授数列极限定义是采用由特殊到一般的方法. 首先,讨论特殊的数列(1)与(2)(见课本第1页), 根据数列(1)与(2)的图象与表格,对数列无限变化的稳定趋势进行了定性分析. 接着通过列表的方法, 对数列无限变化的稳定趋势进行了定量分析, 从而得到定量地描述特殊的数列(1)与(2)极限的方法. 其次,在对特殊的数列(2)分析的基础上, 抽象概括出一般数列极限的严格定义($\varepsilon-N$ 定义).

关于函数极限($x\to\infty$和 $x\to x_0$)的严格定义, 学生难于理解, 教材通过实例用直观描述的方法介绍了函数极限的定义和函数在一点的左右极限的定义. 从而降低了要求, 减少了教学时数,能及早进入微积分主体部分的学习.在函数极限的基础上, 给出了函数在一点和在一个区间上的连续定义. 直观地介绍了闭区间上连续函数的一个性质(最大值和最小值定理)以及连续函数的四则运算性质. 在介绍五种基本初等函数在它们各自的定义域上连续之后, 给出了复合函数的意义以及复合函数的连续性的定理, 进而得到了初等函数的连续性的结论. 我们所研究的函数主要是连续函数. 因此连续概念也是本课程的重点之一. 本章最后给出了两个重要极限. 它们之所以重要是因为求正弦函数和对数函数的导数时,分别要用到这两个极限.

本章的难点是数列极限的严格定义($\varepsilon-N$ 定义). 因为极限概念中含有"无限",必须使学生深刻理解"无限"的意义, 学生学好"极限"要突破两个难点: 第一个难点是对"无限"有个全面的正确的认识;第二个难点,要将"无限"定量的描述出

来，即用 $\varepsilon-N$ 的语言叙述出来．为了解决数列极限定义的这两个难点，对这部分教学提出以下三点建议：第一，结合数列的图象讲清“无限”的几何意义，使学生对数列极限获得丰富的感性知识，为进一步抽象概括数列极限的严格定义作好准备；第二，在讲清描述“无限”的辩证思想之后，结合数列的表格（第 3 页）与图象，着重阐明“无限趋近”和“n 无限增大”的意义及其二者之间的联系；第三，在讲特殊的数列极限时，注意从中概括、提炼数列极限本质特征，为一般的数列极限定义打好基础，在讲一般的数列极限时，注意随时用特殊的数列极限予以说明．可采用“特殊”与“一般”对比的方法，使“特殊”中有“一般”，“一般”中又有“特殊”．

本章教学时间约需 16 课时，具体分配如下（仅供参考）：

1.1	数列的极限	约 3 课时
1.2	数列极限的四则运算	约 2 课时
1.3	函数的极限	约 2 课时
1.4	函数极限的四则运算法则	约 2 课时
1.5	函数的连续性	约 3 课时
1.6	两个重要的极限	约 2 课时
小结和复习		约 2 课时

1.1 数列的极限

1．我们直观地看到了“数列无限趋近于一个常数”的几何意义．例如，数列(2)：$\left\{1-\frac{1}{2^n}\right\}$ 无限趋近于 1．这个 1 就是所谓数列 $\left\{1-\frac{1}{2^n}\right\}$ 的“极限”．如果不严格地处理极限理论，这

样直观给出数列极限定义也是可以的．但是，从严谨的极限理论来说，象这样直观描述性地给出数列极限定义是不行的．因为这里所说的“无限趋近”的意义不清楚，它只是对数列变化性态的一种形象的描述，即只是定性的说明，并非定量的定义．因此无法进行极限理论的严格论证．教材以数列(1)与数列(2)为例，应用列表的方法，回答了数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$无限趋近于0，数列$\left\{1-\frac{1}{2^n}\right\}$无限趋近于1的意义．

这里特别注意，在“趋近”之前添加“无限”二字，它的意义是：一方面，数列$\left\{1-\frac{1}{2^n}\right\}$趋近于1是在无限过程中进行的；另一方面，数列$\left\{1-\frac{1}{2^n}\right\}$不是一般地趋近于1，而是“无限”地趋近于1．例如，数列$\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$趋近于0，即$1+\frac{1}{n}$与0的距离越来越小，但是数列$\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$不是无限趋近于0，即$1+\frac{1}{n}$与0的距离不能无限趋近于0．因此，0不能是数列$\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$的极限．

2．何谓数列(2)无限趋近于1呢？即怎样定量地描述数列(2)无限趋近于1呢？也就是，怎样定量地描述$\left|\left(1-\frac{1}{2^n}\right)-1\right|=\frac{1}{2^n}$无限趋近于0呢？由教材第3页上的表格看到：

对预先指定的小数0.1，数列(2)中存在一项，即第3项，在这项后面的所有项，即第4项、第5项、第6项，等等，不等式

$$\left|\left(1-\frac{1}{2^4}\right)-1\right|=\frac{1}{2^4}<0.1,$$

$$\left|\left(1-\frac{1}{2^5}\right)-1\right|=\frac{1}{2^5}<0.1,$$

$$\left|\left(1-\frac{1}{2^6}\right)-1\right|=\frac{1}{2^6}<0.1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

都成立．以上的叙述可简述为·

对预先指定的小数 0.1，存在自然数 3（项号），当 $n>3$ 时，不等式

$$\left|\left(1-\frac{1}{2^n}\right)-1\right|=\frac{1}{2^n}<0.1$$

都成立．

同样，对预先指定的小数 0.001，存在自然数 9(项号)，当 $n>9$ 时，不等式

$$\left|\left(1-\frac{1}{2^n}\right)-1\right|=\frac{1}{2^n}<0.001$$

都成立．

因为要定量地描述数列 $\left\{1-\frac{1}{2^n}\right\}$ 无限地趋近于 1，所以仅对有限个小的正数能满足上述的不等式还不行，必须对“无论预先指定的多么小的正数 ε，总存在自然数 N，当 $n>N$ 时，不等式

$$\left|\left(1-\frac{1}{2^n}\right)-1\right|=\frac{1}{2^n}<\varepsilon$$

恒成立”才行．上述分析为给出数列极限的严格定义($\varepsilon-N$ 定义)打好基础．

3. 讲授一般数列$\{a_n\}$的极限是A(即$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$)的严格定义,可采用分析的方法,由定性到定量,由浅入深地进行.

(1) 数列$\{a_n\}$极限是A的描述性的定义是:

当自然数n无限增大时,数列$\{a_n\}$无限地趋近于A.

(2) 何谓数列$\{a_n\}$无限地趋近于A?就是$|a_n-A|$无限地趋近于0. 于是,可改述为:

当自然数n无限增大时,$|a_n-A|$无限地趋近于0.

(3) 何谓$|a_n-A|$无限趋近于0?就是$|a_n-A|$能任意小,并保持任意小. 于是,又可改述为:

当自然数n无限增大时,$|a_n-A|$能任意小,并保持任意小.

(4) 何谓$|a_n-A|$能任意小,并保持任意小?就是对预先指定的任意小的正数ε,从数列$\{a_n\}$的某项之后的所有项,有不等式$|a_n-A|<\varepsilon$恒成立. 于是,又可改述为:

对预先指定的任意小的正数ε,数列$\{a_n\}$总存在一项a_N,在这项a_N之后的所有项,即$a_{N+1}, a_{N+2}, a_{N+3}, \cdots$,不等式

$$|a_{N+1}-A|<\varepsilon,$$
$$|a_{N+2}-A|<\varepsilon,$$
$$|a_{N+3}-A|<\varepsilon,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

都成立.

(5) 将数列$\{a_n\}$中的项$a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \cdots$用它的自变量(即自然数)表示. 最后就得到了数列$\{a_n\}$极限是$A$的严格定义:

对预先指定的任意小的正数ε,总存在自然数N,当$n>$

N时，不等式

$$|a_n-A|<\varepsilon$$

恒成立.

4. 关于数列极限定义的几点说明：

(1) 数列$\{a_n\}$极限是A的定义共有四小段话. 前后两小段“对任意小的$\varepsilon>0$，…，不等式$|a_n-A|<\varepsilon$恒成立”，说明数列$\{a_n\}$无限地趋近于A. 正是因为正数ε具有任意性，不等式$|a_n-A|<\varepsilon$才表明数列$\{a_n\}$趋近于A的无限性. 中间两小段“总存在自然数N，当$n>N$时”说的是自然数，指的是数列$\{a_n\}$中对应的项，即“数列$\{a_n\}$中总存在一项a_N，在这项a_N以后的所有项$a_{N+1}, a_{N+2}, \cdots$”，不等式$|a_n-A|<\varepsilon(n>N)$都成立.

(2) 在数列$\{a_n\}$极限是A的定义中，ε必须具有绝对的任意性，这样不等式$|a_n-A|<\varepsilon$才能表明数列$\{a_n\}$无限地趋近于A. 但是，为了表明数列$\{a_n\}$无限地趋近于A的渐近过程的不同阶段，ε又必须具有相对的固定性，例如，$\varepsilon=0.1$，$\varepsilon=0.01$，$\varepsilon=0.003$，$\varepsilon=0.001$，等等. 显然，ε的绝对任意性是通过它自身无限多个相对固定性表现出来的. ε的绝对任意性与相对固定性深刻反映了极限概念中的近似与精确之间的辩证关系.

(3) 根据数列$\{a_n\}$的极限是A的定义，取定某个$\varepsilon_0>0$，总存在自然数N_0，当$n>N_0$时，不等式$|a_n-A|<\varepsilon_0$恒成立. 其中N_0并不是唯一的. 例如，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1$. 取定$\varepsilon_0=0.001$，存在自然数$N_0=9$，当$n>N_0=9$时，不等式$\left|\left(1-\frac{1}{2^n}\right)-1\right|$

<0.001 恒成立. 显然，对取定的 $\varepsilon_0=0.001$，取比 9 大的任意一个自然数都能起到 N_0 的作用. 例如,取 $N_0=20$, 当 $n>N_0=20$ 时,当然不等式

$$\left|\left(1-\frac{1}{2^n}\right)-1\right|<0.001$$

也恒成立.

一般情况,对任意小的 $\varepsilon>0$,总存在自然数N，当 $n>N$ 时,不等式 $|a_n-A|<\varepsilon$ 恒成立. 于是,当 $n>N_1(>N)$时，当然不等式 $|a_n-A|<\varepsilon$ 也恒成立. 由此可见，在数列极限定义中,"总存在自然数N"这段话，在于强调自然数N的存在性,而不在于自然数N的大小. 一般地, ε 越小,相应的N就越大,即所取的项越靠后. 因此,今后在数列极限的证明问题中,常取较大的自然数N.

(4) 如果 ε 是任意的正数，那么$\frac{\varepsilon}{2}$, 2ε, ε^2 等也都是任意的正数. 尽管它们在形式上与 ε 有差异，但是在本质上它们与 ε 起相同的作用,今后在数列极限的证明问题中,常应用与 ε 等价的其它形式，如$\frac{\varepsilon}{2}$, 2ε, ε^2 等.

(5)数列$\{a_n\}$是无穷数列,并且不是每一个无穷数列都有极限.

5. 证明数列$\{a_n\}$的极限是A. 根据数列极限定义,只须证明,对任意小的 $\varepsilon>0$,总存在自然数N,当 $n>N$时，不等式 $|a_n-A|<\varepsilon$ 恒成立.

我们分析数列极限定义的这四段话在证明过程的地位,"对任意小的 $\varepsilon>0$"是证题者开始给出的. 给出 ε 之后做什

么呢？要使不等式$|a_n-A|<\varepsilon$成立．这个不等式能否成立呢？那就在于是否存在自然数N，当$n>N$时，不等式恒成立．因此，任意给定$\varepsilon>0$之后，找N是证明这类数列极限的关键．怎样找N呢？因为要找的自然数N应具有性质：当$n>N$时，不等式$|a_n-A|<\varepsilon$恒成立．换句话说，N应是满足不等式$|a_n-A|<\varepsilon$的所有的n中较小者．于是，找N的方法是解不等式$|a_n-A|<\varepsilon$求n，其解是自然数集的无限子集，此数集中任意一个自然数都可取作为N，通常取较小者为N．

6．证明数列$\left\{1-\frac{1}{2^n}\right\}$的极限是1．

证明　对任意小的$\varepsilon>0$，解不等式

$$\left|\left(1-\frac{1}{2^n}\right)-1\right|=\frac{1}{2^n}<\varepsilon$$

或$2^n>\frac{1}{\varepsilon}$．不等式两端取常用对数，有

$$n\lg 2>\lg\frac{1}{\varepsilon} \qquad \text{或} \quad n>\frac{\lg\frac{1}{\varepsilon}}{\lg 2}.$$

设不超过$\dfrac{\lg\frac{1}{\varepsilon}}{\lg 2}$的最大整数是$N$（这个最大整数小于1时，可取$N=1$）．于是，对任意小的$\varepsilon>0$，总存在自然数$N$，当$n>N$时，不等式

$$\left|\left(1-\frac{1}{2^n}\right)-1\right|=\frac{1}{2^n}<\varepsilon$$

恒成立，即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1.$$

7. 任何常数数列

$$a, a, a\cdots, a, \cdots$$

的极限就是 a.

事实上,对任意小的 $\varepsilon>0$,任取自然数 N, 当 $n>N$ 时,不等式

$$|a_n-a|=|a-a|=0<\varepsilon$$

恒成立,即常数数列$\{a_n=a\}$的极限是 a.

反之,任意常数 a 都可看作是常数数列$\{a_n=a\}$的极限,即

$$\lim_{n\to\infty} a=a,$$

也就是,常数 a 的极限还是常数 a.

1.2 数列极限的四则运算

1. 两个数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$,它们对应项的和、差、积、商组成新的数列:

$\{a_n+b_n\}$叫做数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的和数列.

$\{a_n-b_n\}$叫做数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的差数列.

$\{a_nb_n\}$叫做数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的积数列.

$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$叫做数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的商数列($b_n\neq0$).

2. 教材只给出数列极限四则运算法则,没有给出证明.它们的证明见附录.

如果两个数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$都有极限,那么和数列$\{a_n+b_n\}$也有极限,且

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n.$$

这个定理可简述为,和数列的极限等于每个数列极限的