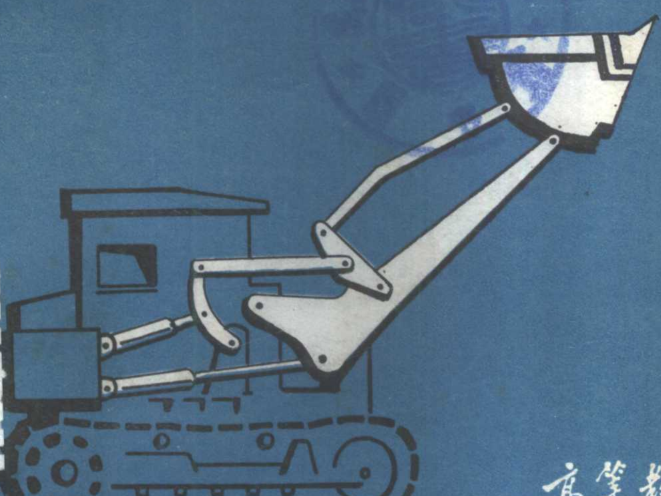
高等学校教材

理论力学

下册

（第二版）

华东水利学院工程力学教研室
《理论力学》编写组编



高等教育出版社

高等学校教材

理论力学

下册

（第二版）

华东水利学院工程力学教研室
《理论力学》编写组编

高等教育出版社

本版是根据四年多的教学实践和兄弟院校的意见，参照1980年审订的《理论力学教学大纲》(草案)(120学时)，在第一版的基础上修改、补充而成。

本版与第一版相比，其内容和讲述方法都有不少改变，较为显著的有：(1)适当提高了起点，压缩了某些与数学、物理的重复内容；(2)调整并增加了一些内容，能适应较多的专业；(3)加强了与工程实际的结合；(4)掉换并增加了不少习题。

本版仍分上、下两册。上册为静力学、运动学，并有矢量运算作为附录；下册为动力学。书中带*的内容，可根据专业需要，酌情取舍。

本版可作为高等学校工科土建、水利类等多学时用教材，也可供其它专业以及职工大学等教学参考。

高等学校教材

理论力学

下册

(第二版)

华东水利学院工程力学教研室

《理论力学》编写组编

高等教育出版社出版

新华书店上海发行所发行

上海新华印刷厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 12.875 字数 307,000

1979年3月第1版

1985年5月第2版 1985年5月第1次印刷

印数 00.001—31,000

书号 15010·0624 定价 2.95元

目　　录

第三篇　动　力　学

绪言 ………………………………………………………………………… 1

第十四章　动力学基本定律　质点运动微分方程 ………………… 3

§14-1　牛顿运动定律　惯性坐标系 ……………………………… 3

§14-2　单位制和量纲 ……………………………………………… 5

§14-3　质点运动微分方程 ………………………………………… 7

§14-4　质点在非惯性坐标系中的运动 …………………………20

习题 …………………………………………………………………29

第十五章　质心运动定理　动量定理 ……………………………39

§15-1　质点系的质心　质心运动定理 …………………………39

§15-2　质点及质点系的动量 ……………………………………46

§15-3　动量定理 ……………………………………………………48

*§15-4　变质量质点运动微分方程 ………………………………56

习题 …………………………………………………………………64

第十六章　转动惯量 ………………………………………………75

§16-1　转动惯量的一般公式 ……………………………………75

§16-2　平行轴定理 …………………………………………………78

§16-3　惯性积与惯性主轴 ………………………………………81

*§16-4　转轴公式　惯性椭球 ……………………………………83

习题 …………………………………………………………………87

第十七章　动量矩定理 ……………………………………………92

§17-1　质点及质点系的动量矩 …………………………………93

§17-2　动量矩定理 …………………………………………………97

§17-3　刚体定轴转动微分方程 …………………………………107

§17-4　相对于质心的动量矩定理　刚体平面运动微分方程 ………112

*§17-5　关于动量矩定理的补充知识 ……………………………121

*§17-6　质点在有心力作用下的运动 ……124

*§17-7　回转仪近似理论 ……131

习题 ……134

第十八章　动能定理 ……149

§18-1　功与功率 ……150

§18-2　质点及质点系的动能 ……160

§18-3　动能定理 ……162

§18-4　势力场和势能 ……173

§18-5　机械能守恒定理 ……177

§18-6　普遍定理的综合应用 ……179

习题 ……184

第十九章　达兰贝尔原理 ……201

§19-1　达兰贝尔原理 ……201

§19-2　达兰贝尔原理在刚体动力学中的应用 ……206

§19-3　非对称转动刚体的轴承动反力 ……213

习题 ……216

第二十章　虚位移原理　动力学普遍方程 ……229

§20-1　约束及约束方程 ……229

§20-2　自由度　广义坐标 ……232

§20-3　虚位移 ……234

§20-4　理想约束 ……237

§20-5　虚位移原理 ……239

§20-6　动力学普遍方程 ……249

习题 ……252

***第二十一章　分析力学基础** ……265

§21-1　广义力　以广义力表示的质点系平衡条件 ……265

§21-2　保守系统平衡的稳定性 ……269

§21-3　拉格朗日方程 ……275

§21-4　拉格朗日方程的第一积分 ……282

习题 ……286

第二十二章　微振动理论基础 ……294

§22-1　单自由度系统的自由振动 ……………………………………294
§22-2　单自由度系统的衰减振动 ……………………………………301
§22-3　单自由度系统的强迫振动 ……………………………………310
*§22-4　减振与隔振简述 …………………………………………………323
*§22-5　两个自由度系统的自由振动 ………………………………326
*§22-6　两个自由度系统的强迫振动 ………………………………336
*§22-7　两个自由度系统的振动的矩阵表示法 ……………………340
习题 ………………………………………………………………………343
第二十三章　碰撞 ……………………………………………………………355
§23-1　碰撞现象　瞬时力 …………………………………………………355
§23-2　基本假设与基本理论 ………………………………………………357
§23-3　两物体的对心碰撞 …………………………………………………359
§23-4　碰撞对定轴转动刚体及平面运动刚体的作用 ………………366
习题 ………………………………………………………………………374
附录一　若干均质刚体的转动惯量及回转半径 ……………………379
附录二　惯性主轴的确定 ……………………………………………………381
习题答案 ……………………………………………………………………384

第三篇　动　力　学

绪　言

在静力学里，我们研究了物体在力的作用下保持平衡的条件；但是，如果作用于物体的力不满足平衡条件，则物体将如何运动？静力学不能回答这个问题。

在运动学里，我们从几何学的观点研究了物体的运动，就是说，只研究物体怎样运动；但是，物体为什么会这样运动？运动学则不能回答。

上述问题将由动力学来回答。动力学研究物体的运动与作用于物体的力之间的关系，从而建立物体机械运动的普遍规律。

平衡是机械运动的特殊情形，因而静力学中研究的平衡问题，可以看作是动力学问题的特例。另一方面，静力学中力、力矩、力偶等基本概念及有关的理论，力系的简化等，又是学习动力学的必需知识。至于运动学，则更是学习动力学所不可缺少的基础。可以说，静力学和运动学都只研究物体机械运动的一个方面，而动力学则把两方面结合了起来。

随着生产的发展，工程技术中提出的动力学问题愈来愈多。机器和机械设计中的均衡问题、振动问题、动反力问题等，固不必说，属于动力学问题；就是在土建、水利工程的结构物的设计中，也愈益需要考虑动力学方面的问题，如动力荷载的作用、振动、抗震等；在许多尖端科学技术中，如人造地球卫星和宇宙火箭的发射和运行等，更包含着许多动力学问题。虽然我们不可能在理论力学

中讨论这些专门问题，但理论力学中的动力学基本理论，却是研究这些问题的必需基础。于此可见，掌握动力学基本理论，至为重要。

第十四章　动力学基本定律
质点运动微分方程

§14-1　牛顿运动定律　惯性坐标系

动力学的基本定律是牛顿在其《自然哲学之数学原理》一书中提出的三个定律，即通称的牛顿运动定律。这几个定律是：

第一定律　任何物体，如不受外力作用，将保持静止或作匀速直线运动。

第二定律　质点受到外力作用时，所产生的加速度的大小与力的大小成正比，而与质点的质量成反比，加速度的方向与力的方向相同。这一定律可用熟知的数学公式表示为

$$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}, \tag{a}$$

其中m为质点的质量，而$\boldsymbol{F}=\sum\boldsymbol{F}_i$是作用于质点的所有的力的合力。

第三定律即作用与反作用定律　两物体间相互作用的力（作用力与反作用力）同时存在，大小相等，作用线相同而指向相反。

不受外力作用时，物体将保持静止的或匀速直线运动的状态，这是物体的属性，这种属性称为惯性。所以第一定律也称惯性定律，而匀速直线运动也称惯性运动。

由式(a)可见，设以相等的力作用于不同的质点，则质量m愈大的质点所产生的加速度a愈小，即愈不容易改变其运动状态，这就表示，质点的质量愈大，它的惯性也愈大。所以，质点的质量是它的惯性的量度。

在古典力学里，一个物体的质量m被看作是一个常量，不因为

物体的运动状态不同而改变。但是，根据相对论力学，物体的质量将随运动速度而变①。不过，只有当物体运动的速度可与光速相比时，变化才显著。在古典力学里，所考察的物体的运动速度都远远小于光速，因而将物体的质量看作常量足够精确。

任一物体的质量 m 与它的重量 P 之间存在着如下关系

$$P=mg \text{ 或 } m=\frac{P}{g},$$

其中 g 是重力加速度。

应当注意，质量与重量是两个不同的概念。一个物体的质量是一定的，而它的重量则随着它在地面上的位置而变，因为地面上各地的 g 值不同——平地与高山不同，纬度 φ 不同的地区也不同。考虑到纬度的变化，国际上采用公式

$$g=9.7803(1+0.005288\sin^2\varphi-0.000006\sin^2 2\varphi)\mathrm{m/s^2}$$

来计算海拔为零处的 g 值。如要求很高，可通过实测来确定 g 值。在我国首都北京($\varphi\doteq 40°$)，根据实测结果，$g=9.8012\mathrm{m/s^2}$，与由公式算得者很接近。在本书中，为了计算简便，取 $g=9.80\mathrm{m/s^2}$。

作用与反作用定律对于研究质点系的动力学问题具有重要意义。因为第二定律是就一个质点而言的，而我们将要考察的问题，大量的是关于质点系的。要将根据第二定律建立起来的质点动力学的理论推广应用于质点系，就必须利用作用与反作用定律。

在运动学里曾指出，同一个物体，对于不同的坐标系来说，运动情况是不同的。于是就产生了这样的问题：牛顿定律里所说的

① 根据相对论力学，物体以速度 v 在一参考系内运动时，它的质量与速度的关系是

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

其中 m_0 是物体相对于参考系处于静止状态时的质量(称为静止质量)，$\beta=v/c$，而 c 是光速。

静止或运动，速度和加速度，是对什么坐标系来说的？

牛顿在提出各定律之前，先引进了"绝对空间"的概念。所谓"绝对空间"，是与物质无关的、绝对不动的空间。按照牛顿的意见，他提出的定律只适用于质点在"绝对空间"内的运动，即质点在绝对静止的坐标系内的运动。当然，"绝对空间"是不存在的，宇宙间根本找不到绝对静止不动的坐标系。但牛顿引进"绝对空间"这一概念，就清楚地告诉我们：牛顿定律并不是对任何坐标系都适用，而只适用于某种坐标系。

适用牛顿定律的坐标系称为**惯性坐标系**。既然不可能找到绝对静止不动的坐标系，那末，什么样的坐标系可以作为惯性坐标系呢？只有靠观察和实验来验证。

实践结果证明，在绝大多数工程问题中，可取固结于地球的坐标系为惯性坐标系。只是对于某些必须考虑地球自转的影响的问题（如由地球自转而引起的河流冲刷，落体对铅直线的偏离等）才选取以地心为原点而三个轴指向三个"恒星"的坐标系作为惯性坐标系，即所谓地心坐标系。在天文计算中，则取日心坐标系，即，以太阳中心为坐标原点，三个坐标轴指向三个"恒星"。后面还将证明，凡是相对于惯性坐标系作匀速直线运动的坐标系，也是惯性坐标系（见§14-4）。在以后的论述中，如果没有特别指明，则所有运动都是对惯性坐标系而言的。并且约定，物体在惯性坐标系中的运动称为绝对运动，还习惯地将惯性坐标系称为固定坐标系或静坐标系，以区别于某些需要考虑其运动的坐标系。在实际问题中，除少数特别指明者外，都以固结于地球的坐标系为惯性坐标系。

§14-2 单位制和量纲

力学中有许多物理量，每个物理量都必须用一适当的单位来量度。由于某些物理量之间具有一定的关系，因而并不是每个物

理量的单位都是可以任意规定的。在许多物理量中，我们以某几个量作为**基本量**，它们的单位称为**基本单位**；其它量的单位都可由基本单位导出，称为**导出单位**，而那些量也相应地称为**导出量**。

选取不同的基本单位，就形成不同的单位制。本书采用国际单位制(SI)，以长度、时间和质量为基本量，它们的单位米(m)、秒(s)、千克(公斤，kg)为基本单位；其它量均为导出量，它们的单位则是导出单位。目前工程上也常用工程单位制，以长度、时间和力为基本量，单位是米(m)、秒(s)、公斤力(kgf)。

在国际单位制中，力是导出量，等于质量与加速度的乘积。设一个力使1千克质量产生1米/秒^{2}的加速度，则该力的大小为1牛顿，代号为牛(N)，即

$$1\text{N}=1\text{kg}\times 1\text{m/s}^2=1\text{kg}\cdot\text{m/s}^2.$$

在工程单位制中，质量是导出量，质量的单位是$\text{kgf}\cdot\text{s}^2/\text{m}$，这一单位并无特殊名称，通常就称为工程质量单位。

某些量在国际单位制和工程单位制中的单位之间的换算关系见上册附录二。

无论采用哪种单位制，导出量都可用几个基本量的组合表示出来。表示某一物理量是由哪几个基本量按什么规律组成的式子，称为该物理量的量纲或因次①。在国际单位制中，长度、时间和质量是基本量，它们的量纲分别用$[L]$、$[T]$、$[M]$表示，其它量的量纲都可表示为这三个量纲的函数。例如，速度的量纲是$[v]=[L][T]^{-1}$，加速度的量纲是$[a]=[L][T]^{-2}$，而力的量纲是$[F]=[M][L]\cdot[T]^{-2}$。

对于工程单位制，各个量的量纲可以类似地得到。

应当注意，量纲与单位是两个不同的概念。一个物理量的量

---

① 有的把这种式子称为量纲式，而把基本量的指数称为量纲。

纲是一定的，但它的大小却可用不同的单位来量度。例如长度的量纲是[L]，但可用米、毫米、千米（公里）等作为量度长度的单位；时间的量纲是[T]，单位则可用秒、分、小时等；质量的量纲是[M]，却可用千克、克等作为单位。相似地，速度单位可以是米/秒、公里/小时等；而力的单位可以是牛、千牛等。

知道一个物理量的量纲，就不难确定它的单位并进行单位换算。例如，速度的量纲是$[L][T]^{-1}$，如长度以米计，时间以秒计，则速度的单位是米/秒，而 $1\text{米/秒}=1\left[\dfrac{\text{千米}}{1000}\right]\left[\dfrac{\text{小时}}{3600}\right]^{-1}=3.6$千米/小时。

物理量的量纲还有一个重要作用，就是检验力学方程的正确性。因为在同一个方程中，各项的量纲必须相同（在作数字计算时，还必须单位相同）。虽然一个方程的各项的量纲相同时，并不能判定该方程是否正确；但如一个方程的各项的量纲不尽相同，则可以断定该方程必然是错误的。

§ 14-3　质点运动微分方程

设有一质点 M，质量为 m，作用于该质点的所有的力的合力为 $\boldsymbol{F}=\sum\boldsymbol{F}_i$，如图 14-1。命质点的加速度为 $\boldsymbol{a}$，则

$$m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}. \qquad (14\text{-}1)$$

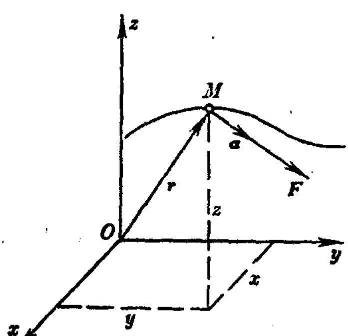


图 14-1

由运动学已知，当用质点M对于坐标原点O的矢径 $\boldsymbol{r}$ 来表明它的位置时，质点的加速度是

$$\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2},$$

其中 $\boldsymbol{v}$ 是质点的速度。于是方程

(14-1)可改写为

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{F} \quad 或 \quad m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{F}. \tag{14-2}$$

这就是矢量形式的质点运动微分方程。

过原点 O 取直角坐标系 $Oxyz$，将方程(14-2)投影到各坐标轴上，就得到直角坐标形式的质点运动微分方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2}=Z; \tag{14-3}$$

其中 X、Y、Z 为作用于质点的各力在 x、y、z 轴上的投影之和。

如果质点作平面曲线运动，取运动平面为 Oxy 平面，则方程(14-3)成为

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y, \ Z=0. \tag{14-4}$$

如果质点作直线运动，取 x 轴沿路径直线，则方程(14-3)成为

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X, \ Y=0, \ Z=0. \tag{14-5}$$

设已知质点运动的轨迹曲线(图 14-2)，以轨迹曲线上质点所在处为原点，取自然轴系 $\boldsymbol{\tau}$、$\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{b}$，将方程(14-1)投影到自然轴系上，有

$$ma_\tau=F_\tau, \ ma_n=F_n, \ ma_b=F_b.$$

但
$$a_\tau=\frac{d^2s}{dt^2}, \quad a_n=\frac{v^2}{\rho};$$

而加速度在 b 方向上的投影 $a_b=0$，于是

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=F_\tau, \ m\frac{v^2}{\rho}=F_n, \quad F_b=0. \tag{14-6}$$

这就是自然轴系形式的质点运动微分方程。

当质点作平面曲线运动时，如采用极坐标表示法(图14-3)，则

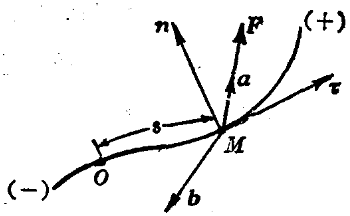


图 14-2

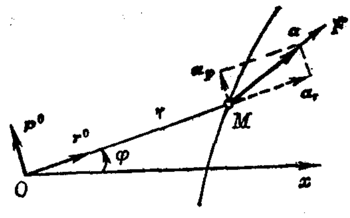


图 14-3

质点的加速度为[公式(8-39)]

$$\boldsymbol{a}=(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{r}^0+(r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi})\boldsymbol{p}^0.$$

其中 $\boldsymbol{r}^0$ 及 $\boldsymbol{p}^0$ 分别为沿径向及横向的单位矢量。代入方程(14-1)，并将方程两边投影到 $\boldsymbol{r}^0$ 及 $\boldsymbol{p}^0$ 方向，就得到

$$m(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)=F_r,\ \ m(r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi})=F_p. \qquad (14\text{-}7)$$

自然，所有的力在垂直于曲线平面方向如 z 轴上的投影之和必须等于零，即 $F_z=0$。

可以看出：

① 设已知质点的运动规律，须求质点所受的力，则不难用微分法求得解答。

② 设已知作用于质点的力，须求质点的运动规律，则归结为求解运动微分方程。在一般情况下，作用于质点的力可能是时间、质点的位置坐标、速度的函数，只有当函数关系较简单时，才能求得微分方程的精确解；如果函数关系复杂，求解将非常困难，有时只能满足于求出近似解。此外，求解微分方程时将出现积分常数，这些积分常数，须根据质点运动的初条件即初速度和初位置坐标来决定，所以，对于这一类问题，除了作用于质点的力以外，还必须知道质点运动的初条件，才能完全确定质点的运动。

顺便说明，对于受约束的非自由质点，微分方程中自然应包括质点所受的约束力，除此之外，质点的运动还必须满足约束对它施加的限制条件。关于约束力的方向，同在静力学中一样，决定于约

束的性质；而约束力的大小则是未知量，应根据动力学方程求得。

对于质点系，原则上可以就每个质点写出运动微分方程。但是，由于各质点的运动以及所受的力都是互有关联的，就所有各质点写出的不论什么形式的微分方程，必然是联立微分方程，在大多数情况下，要求得这些联立微分方程的精确解是非常困难的。因此，对于质点系的问题，只有在最简单的情况下才用本节讲述的方法求解，一般则将应用以后各章讲述的定理求解。

例 14-1　质量为 m 的质点 M 在坐标平面 Oxy 内运动(图 14-4)，已知其运动方程为

$$x=a\cos\omega t,\quad y=b\sin\omega t; \tag{a}$$

其中 a、b、ω 都是常量，求质点所受的力 F。

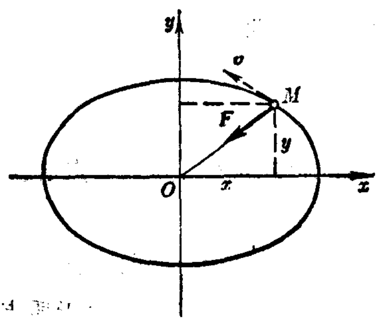


图 14-4

解　消去时间 t，得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

可见质点运动的轨迹曲线是以 a 及 b 为半轴的椭圆。

将式(a)代入方程(14-4)，可求得力 F 的投影

$$X=m\frac{d^2x}{dt^2}=-ma\omega^2\cos\omega t=-m\omega^2x,$$

$$Y=m\frac{d^2y}{dt^2}=-mb\omega^2\sin\omega t=-m\omega^2y.$$

于是，力 F 的大小为

$$F=\sqrt{X^2+Y^2}=m\omega^2\sqrt{x^2+y^2}=m\omega^2r;$$

其中 r 是动点M的矢径 $\boldsymbol{r}$ 的模。力 $\boldsymbol{F}$ 的方向余弦为

$$\cos(\boldsymbol{F},x)=\frac{X}{F}=-\frac{x}{r},\ \cos(\boldsymbol{F},y)=\frac{Y}{F}=-\frac{y}{r},$$

恰与矢径 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦数值相等而符号相反。所以力 $\boldsymbol{F}$ 与矢径 $\boldsymbol{r}$ 成比例而方向相反(即指向坐标原点 O),可用方程表为

$$\boldsymbol{F}=-m\omega^2\boldsymbol{r}.$$

这种力称为**有心力**。

例 14-2 在粗糙斜面上放一重 Q 的物块 A (图 14-5a),物块上的D点(与斜面相距 $DH=b$)系一绳;绳与斜面平行,绕过滑轮后,在另一端悬挂一重P的物块 B。物块A的重心距离斜面 h ($h<b$),宽度 $EH=2d$,与斜面间的摩擦系数为 f。欲使物块A向上作加速运动而不致翻倒,求P所应满足的条件及物块A的加速度。假设绳子是不可伸长的;绳子的质量不计,滑轮的质量及轮轴处的摩擦也不计。

解 分别考察物块 A、B,作它们的示力图,并表示出它们的加速度方向,如图 14-5b 及 c。由于物块A可能的翻倒是绕H点顺时针向转动,所以图上的正压力 $\boldsymbol{N}$ 及摩擦力 $\boldsymbol{F}$ 都作用于H点。

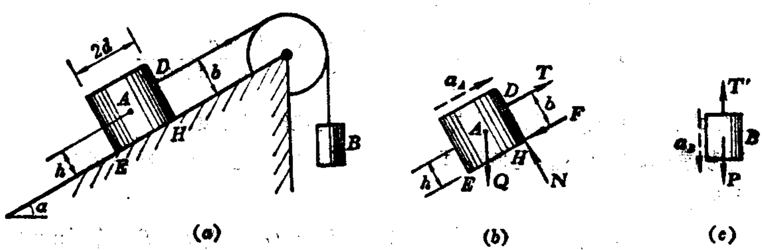


图 14-5

两物块的动力学方程是

$$\frac{Q}{g}a_A=T-F-Q\sin\alpha, \tag{a}$$

$$\frac{P}{g}a_B=P-T'. \tag{b}$$

为使物块A不致翻倒,对H点的逆时针向力矩与顺时针向力矩必须满足如下的条件

$$Q(h\sin\alpha+d\cos\alpha)\geqslant Tb. \tag{c}$$