科學譯叢

——數學：第10種——

三十年來的蘇聯數學
(1917——1947)

近似方法

康托洛維奇等著

中國科學院出版

科學譯叢

——數 學：第10種——

三十年來的蘇聯數學

(1917—1947)

近 似 方 法

Л. В. 康托洛維奇 作

В. И. 克雷洛夫

林 鴻 蓀 譯

中國科學院出版

1954年8月

三十年來的蘇聯數學

(1917—1947)

近　似　方　法

ПРИБЛИЖЁННЫЕ МЕТОДЫ

原著者　Л. В. Канторович
　　　　В. И. Крылов

翻譯者　林　鴻　蓀

編輯者　中國科學院編譯局

出版者　中　國　科　學　院
北京(7)文津街3號

印刷者　北京新華印刷廠
阜成門外北禮士路

裝訂者　北京源豐裝訂廠
和外楊梅竹斜街32號

發行者　新　華　書　店

(譯)54046　　1954年8月第　一　版

(自然)051　　1954年8月第一次印刷

(京)0001—3,200　　開本：787×1092　1/25

字數：69千字　　印張：$4\frac{14}{25}$

定價：7,000元

內 容 提 要

本文譯自"三十年來的蘇聯數學"一書，概括地論述了蘇維埃政權成立三十年（1917—1947）來蘇聯數學家在應用數學的一個十分重要的部門——近似計算——的研究中所獲得的巨大成就。本文中對代數學中各種問題的近似計算方法、數值積分和內插法、微分方程的各種近似解法、積分方程的近似解法、近似保角映像和汎函方程的近似解法等問題均有全面的論述。本書可供科學研究工作者及高級工程技術人員的參攷。

目　　錄

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

近 似 方 法

如衆所知，許多，即使是最簡單的，數學問題（代數及超越方程，積分）不許可有緊縮形式的準確解。在另一些情况中，雖然問題的準確解在原則上是可能的，但它會是如此之複雜，致使不能靠它得出數値結果或用它來研究實際問題。在這些情况中就必須求助於近似方法，這些方法具有極大的廣泛性及實際的功效。它們使我們能將解用足够準確及扼要的公式形狀給出，或在準確方法是無能爲力的許多情况中得出數値結果。

這樣的一些方法在數學的應用中尤其有價値，此時，由於原始數據不可避免的不準確性，或者由於數學法則對物理現象的不準切相合，應用近似方法引出的解中不够準確之處相形之下就顯得不重要，而這些方法之有效，以及結果之可能方便利用，實在是很大的優越之點。因此近似方法是在數學的歷史一開始就存在着的。一些最偉大的數學天才都曾參加於它的創立及探討的工作。我們只需要提出與牛頓(Newton)、歐勒(Euler)羅巴切甫斯基 (Лобачевский) 及高斯 (Gauss) 的名字有關的一些解方程，內插法，數値積分及解微分方程的近似方法，就足以說明這一點。

在俄羅斯數學的經典作家，首先是切貝謝夫 (Ч. Л. Чебышев) 及其學派的工作裏，分析的近似方法佔有極爲重要的地

位。 除了各種獲得廣泛的承認及傳播的具體方法及公式(切貝謝夫內插法,切貝謝夫數值積分公式等等)之外,切貝謝夫還創始了最佳近似的理論,這一理論由別恩施坦 (С.Н. Бернштейн) 進一步發展了。 這理論一方面具有巨大的一般數學的作用,另一方面對近似方法的理論也具有深刻的原則性的意義,在近似方法的收斂性及準確程度的問題上提供了新的線索並將其提升到眞正的科學的高度。 這些問題也引起彼得堡學派其他最著名的代表如馬爾訶夫(А. А. Марков) 斯切克洛夫 (В. А. Стеклов) 及克雷洛夫 (А. Н. Крылов) 的注意,這些人的工作有一部分還是在蘇維埃時代進行的。

必須特別提出克雷洛夫 (А. Н.) 的工作。 除了創立並改善了一系列重要的近似方法(三角級數收斂性之改善,微分方程的數值及機械積分等)之外,他在近似方法方面的工作的宣傳、推動及價值的提高上有傑出的功勳,大大地促進了我國近似方法的發展及其在實用科學中廣泛的及正確的應用。

近似方法的某些問題 (累進方法,數值積分) 也曾引起革命前莫斯科數學家如涅克拉索夫(П. А. Некрасов) 布伽也夫(Н.В. Бугаев) 等人的注意。

由此可見,蘇維埃時代中近似方法範圍內的工作可以被認爲是革命前俄羅斯數學家在這方面的興趣傳統的延續。但是,在蘇維埃時代這工作得到廣濶的規模及發展。 這是和我們國家的環境中科學工作的普遍高漲及擴充密切分不開的,這種高漲特別反映在近似方法的領域內,因爲,由於國家工業化而引起的應用科學部門(力學及其他)的發展,隨着新穎技術的採用,對

這些科學提出了許多問題，其數學的分析需用近似方法的大量使用及研究。

在蘇維埃時代這方面的工作的特點正是與這些條件有關連的。

物理，力學，地球物理及各種技術部門（空氣動力學，建築力學，水力學，熱工學，電工學，砲兵學）的現代問題的分析研究，在其數學方面，通常是與常微分方程及偏微分方程以及積分方程的解有關的，是與保角映像的問題有關的。同時，所遇到的問題的複雜性照例需要用近似的辦法。然而，這些問題的近似解法在過去很少被研究過。它們的探討在這個時期內剛在開始，而近似方法的經典問題（方程的數值解法，內插法，機械求積）却已經發展得很完整很全面了。

因此，在蘇維埃時代近似方法方面的工作的重心從經典問題轉向高等分析的近似方法——主要在微分方程及積分方程的近似解法及數值解法的問題上。最重要的結果——新辦法的提出，基本方法的準確程度及收斂性的研究，以及最主要的實際應用——都與此課題有關。在經典性問題方面還是有許多工作出現，但是，即使不把一些具有"地方性"的工作算在內，這些工作都是與一些比較局部的理論意義及有限實際意義的個別問題有關的：著名的方法的某些改善或變形，與之有關的個別理論研究。而即使是在這些問題之中，最重要的還是由解微分方程的需要而得到發展的問題（特徵根方程，某些內插法及機械求積的問題等）。

第二個特點在於，在近似方法的研究中，力學及其他應用部

門的代表也和數學家在一起而且並不稍遜地參與其事。一系列的方法及其應用的主要進展起源於個別具體問題的解決。由於獲得最廣泛的傳播與承認的兩種微分方程的近似解法是與我們最著名的力學家伽遼金(Б. Г. Галеркин)及察波雷根(С. А. Чаплыгин)的名字連在一起，這供獻更顯得重大。

第三個特點在於，數學計算的機械化——計算及解題機器之使用——要求數値方法作特殊的準備並適應於這些工具的應用。

最後，必須指出，近似方法的發展需要應用數學分析的現代理論成果——函數構造理論，微分方程及積分方程理論的新結果，變分法及泛函分析。

除一系列包括近似方法方面的個別結果的工作外，也必須指出對已得結果進行系統化中的主要成就。

與比較初等的一些近似方法有關的問題之最好的論述是已成爲經典的克雷洛夫(А. Н.)的"近似計算教程"。還必須提出別齊珂維奇(Я. С. Безикович)[1]維特欽金(В. П. Ветчинкин)[1,3,6,7]奧波考夫(Г. В. Оппоков)[2,3]等人所著的近似計算教程以及蓋里封特(А. О. Гельфонд)[1]及別齊珂維奇[5]所著的有限差分教程。除此之外，還有斯卡勃羅(Scarborough)斯蒂芬孫(Steffensen)恢推克爾及羅賓孫(Whittaker and Robinson)的書的翻譯。

在高等分析的近似方法方面出現了康托洛維奇(Л. В. Канторович)及克雷洛夫(В. И. Крылов)的綜合性的書[2]，在世界文獻中尚無有類似內容者。克雷洛夫(Н. М. Крылов)[31,32,33]

克雷洛夫及波哥留波夫 (Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов)[6], 巴諾夫 (Д. Ю. Панов)[16] 米凱拉則 (Ш. Е. Микеладзе)[5,29], 列賓松 (Л. С. Лейбензон)[1,2], 米連節夫 (П. В. Мелентьев)[7]等人的書是與各種特殊類型的方法有關的。

在過去三十年中在蘇聯所有的重要數學中心都有近似方法方面的工作在進行着。除了已經提出過的斯切克洛夫在機械求積方面，克雷洛夫 (А. Н.) 在各種問題方面以及別恩施坦及其學派在內插法及機械求積理論方面的工作(這些主要是在其他的一些論文中敍述了)，必須首先提出下列工作：在基輔的克雷洛夫(Н. М.) 及其學生，首先是波哥留波夫及克拉甫楚克 (М. Ф. Кравчук) 在呂茲 (Ritz) 方法的收斂性及誤差估計的研究，以及微分方程及部分積分方程的許多其他的解法方面的工作；列寧格勒數學家蓋爾施高林 (С. А. Гершгорин)、康托洛維奇、克雷洛夫 (В. И.) 及米連節夫對偏微分方程，積分方程及保角映像的解法的有系統的研究，在提弗里斯的穆斯海里什維里 (Н. И. Мусхелишвили) 學派中一羣數學家在同樣問題方面的工作；在莫斯科——中央空氣動力學研究所 (ЦАГИ) 中集體 [凱爾狄什 (М. В. Келдыш)、維特欽金、巴諾夫等人] 的工作以及某些其他部門的研究所的工作，最後，蘇聯科學院數學研究所應用分析組在柳斯特尼克 (Л. А. Люстерник) 領導下的工作 [其中有阿庫施斯基 (И. Я. Акушский)、季特金 (В. А. Диткин)、克拉麥爾 (О. П. Крамер)、涅舒列爾 (Л. Я. Неишулер)、雷考夫 (Раиков)、謝伽爾 (Б. И. Сегал)、西綿嘉葉夫 (К. А. Семендяев)] 該組在偉大衞國戰爭年代進行了緊張的工作。

§1. 代數中的近似方法

在線性代數中最重要的主題之一是一組多個線性代數方程的近似解的問題。這問題是非常迫切的，因爲，一方面，在許多問題（結構力學中空間體系，測地學及天文學）中這樣的方程組都會出現，而另一方面，高等分析的問題——偏微分方程及積分方程邊值問題的近似解法大多數的應用都歸結於它們。

雖然這樣的方程組有準確解，但以此爲目標的演算是非常複雜的。因此在解多個方程的組時最好應用近似方法，首先是累進法及柴德爾（P. L. von Seidel）方法。其應用尤其合適，因爲在實際中遇到的方程組的性質（具有壓倒數值的對角線項）便於它們的使用。因此上述方法引起巨大的興趣。除了一些將這些方法推廣並包括了一些新穎的論述的著作（巴諾夫[3]齊列夫（В. П. Зылев）[2]、烏芒斯基（А. А. Уманский）[1]）之外，我們還有關於它們的可應用性問題的一些新結果。

在切略普考夫（Ф. С. Черепков）[1] 的著作中證明，假使 $|\lambda_1|>1$，方程組

$$X_i=\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k+b_i \qquad (i=1,2,\cdots n)$$

的累進方法是收斂的，此處 λ_1 在對稱方陣 $A=\|a_{ik}\|$ 情況中是最小固有值，而在非對稱方陣情況中是方陣 AA^* 的最小固有值。他並給出了累進法收斂的速率的更準確的估計及提高這速率的辦法。在伊萬諾夫（В. К. Иванов）的著作[1]中研究了柴德爾方法的收斂性的問題，這方法有和通常的累進方法不同地方：在構

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

成下一步近似時以前所得到的所有未知數都考慮在內，即用公式

$$x_i^{(m+1)}=\sum_{k=1}^{i-1}a_{ik}x_k^{(m+1)}+\sum_{k=i}^{n}a_{ik}x_k^{(m)}+b_i$$

來決定近似值。 他證明了，柴德爾方法對已給方程組的應用等價於通常累進方法對某另一方程組的應用，也就達到柴德爾方法的收歛性的判別法則。他還舉出一些方程組爲例，用一個方法收歛而用另一方法就會是發散的。

在求線性方程組的近似解時也可應用"最陡下降法"（在下面 § 8 中將論及這點）。

還要提出提慈 (А. Б. Тиц)[2]，别恩施坦 (С. Бернштейн)[1] 及弗朗克 (М. Л. Франк)[7] 在代數方程組的圖解法方面的工作，這也可以認爲是解這樣的方程組的一個有效方法。

在科雅洛維奇 (Б. М. Коялович)、庫茲敏 (Р. О. Кузьмин) 及康托洛維奇的著作中連同理論一起也考慮了無窮代數方程組的近似解的問題；因爲這在關於積分方程的專文中論及，所以此處就不談它們。

在一次及二次型的理論中及許多應用問題，特別是在振盪運動的研究中，必須求代數方程的根，這方程曾得到"永年"方程的稱號，因爲，在天體力學中可以用它來決定行星運動中具有極大週期的不等式。 這方程有下列形狀：

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

若要用通常方法來求它的解，就必須將它化爲通常代數方程的形狀：

$$\lambda^n + B_1 \lambda^{n-1} + \cdots + B_n = 0$$

這可以用行列式按 λ 的冪展開求出． 對 $n=2,3$ 這是很容易做到，但從 $n=4$ 起計算就已很複雜而在 n 很大時實際就辦不到．困難主要在於行列式的元素包括未知數 λ． 這迫使計算一部分必須用符號的形式進行，這就大大地增加了它們的數目．

上面的話適用於所有包括符號參數爲元素的行列式． 例如在通常遇到的更一般的伽遼金型的方程的行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda b_{11} & \cdots & a_{1n}-\lambda b_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1}-\lambda b_{n1} & \cdots & a_{nn}-\lambda b_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

我們只提到永年方程因爲它是最常遇到的而且用它能最好地說明計算方法的概念．

在 1931 年克雷洛夫 (A. H.)[5] 提出一個永年方程的數值解法，較之當時已知的拉格朗日 (Lagrange) 拉普拉斯 (Laplace) 雅科比 (Jacobi) 及勒維葉 (Leverrier) 的方法都要方便得多．

克雷洛夫 (A. H.) 是從這樣的衆所週知的事實出發而發展他的方法的，即，可以將一微分方程典範組化爲一更高階的微分方程．

在與特徵行列式$\triangle(\lambda)$同時，我們考慮作爲輔助的微分方程組

$$\begin{aligned} q_1' &= a_{11} q_1 + \cdots + a_{1n} q_n \\ &\cdots \qquad \cdots \\ q_n' &= a_{n1} q_1 + \cdots + a_{nn} q_n . \end{aligned}$$

取 $q_1=x$，克雷洛夫用通常方法形成 x 的 n 階方程，消去所有其他的函數 q_i)。他得到這樣的方程

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x' & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & & \cdots & \\ x^{(n)} & f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \end{vmatrix}=0.$$

一般地說，這方程的解是與輔助方程系的解等價的。這方程的特徵方程立刻化爲下列形式

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_{11}-\lambda^2 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & & \cdots & \\ f_{11}-\lambda^n & f_{12} & \cdots & f_{1n} \end{vmatrix}=0.$$

後者照例是與已給的永年方程等價的。但是，行列式 $D(\lambda)$ 和行列式 $\triangle(\lambda)$ 基本不同之處在於：未知數 λ 及其冪不出現在對角線元素中，而是在第一列中，這就顯著地簡化了計算。第一列中元素的代數餘因都是數值。其計算及方程的形成可以很簡單地做出。

當然，上面的論點不但可以應用於長期方程上，並且也可以用於伽遼金型行列式及在線性代數中稱爲 $\lambda-$ 矩陣的行列式的計算中。

在論及自己的方法時，克雷洛夫指出，方程 $\triangle(\lambda)=0$ 及 $D(\lambda)=0$ 是完全同等的並且 $D(\lambda)$ 可以由 $\triangle(\lambda)$ 得出，並且“只用純代數變換的方法，而不用考慮微分方程組，對於該組來說兩種形式都是它的特徵方程”。

克雷洛夫方法的代數涵義受到魯淨 (Н. Н. Лузин)[1—4]，法捷也夫(Д. К. Фадеев)[1]赫羅多甫斯基 (И. Н. Хлодовский)[1]及

剛特馬赫爾 (Ф. Р. Гантмахер)[1]的精密考慮。

我們不打算分析他們的工作而只指出求出這一切結果的出發點。

永年行列式 $\triangle(\lambda)$ 是 λ 的 n 次多項式

$$\triangle(\lambda)=(-1)(\lambda^n+B_1\lambda^{n-1}+\cdots+B_n)=P_n(\lambda)$$

在代世代數的文獻中稱爲矩陣 $A=\|a_{ik}\|$ 的固有多項式。要求這行列式的展開就是求已給矩陣 A 的固有多項式 $P_n(\lambda)$ 的係數 $B_1, B_2\cdots B_n$。

在矩陣代數中有下列著名的凱利 (Cayley) 恆等式

$$P_n(A)=A^n+B_1A^{n-1}+\cdots+B_n=0.$$

它很清楚地指出矩陣 A 及所要決定的固有多項式的係數 B_k 之間的關係並且可以用來求出它們。顯而易見，克雷洛夫的方法是與這恆等式密切關聯的，而這恆等式的分析使我們能說明克雷洛夫方法的代數基礎。

在 1937 年達尼列甫斯基 (А. М. Данилевский)[1] 提出了另一個展開永年多項式的方法。簡單的計算表明，這方法在 n 很大的時候只要作克雷洛夫方法三分之二的工作。這方法是基於"永年"行列式 $\triangle(\lambda)$ 化歸扶洛貝紐斯 (Frobenius) 的範式：

$$\triangle(\lambda)=\begin{vmatrix} k_{11}-\lambda & k_{12} & k_{13} & \cdots & k_{1,n-1} & k_{1n} \\ 1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ & \cdots & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^n[\lambda^n-k_{11}\lambda^{n-1}-k_{12}\lambda^{n-2}-\cdots-k_{1n}]$$

所有的變換都基於行列式的基本性質而只需極爲簡單的運

算就能完成。 還需注意，在完成變換中遇到的例外情況只能使問題更簡單化。 蓋爾施高林[9]考慮了矩陣的固有值的可能分佈的區域的估計並在這方面得到一些重要的結果。他指出，矩陣所有的固有值是處於 n 個以 a_{ri} 點爲中心而以 $R_i=\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}|a_{ik}|$ 爲半徑的圓所組成的區域之內。在關於這些圓及元素 a_{ik} 的一些特殊假定之下，他提出了一些關於固有值的更準確的結論。

謝綿嘉葉夫[?]考慮了決定矩陣的固有值及不變流型的問題。 他指出了一個基於鄧肯 (Duncan) 及珂樂爾 (Collar) 方法的"逐次分割"的辦法，這方法也由巴普考維奇(П. Ф. Папкович)獨立地提出過。

馬揚慈 (Л. С. Маянц)[1]提出了用累進方法來計算固有值及固有向量的一種改善方法。 這改善似乎在矩陣的對角線項特別顯著的時候應用最成功。

關於高次代數方程及超越方程的近似解法的問題的工作爲數極少。

我們不打算論述一些主要有關累進方法的各種應用（謝略勃呂揚尼珂夫 (С. В. Серебрянников)，巴邦斯基 (Е. В. Бабанскии) 以及羅巴切甫斯基-格來非 (Graeffe) 方法的各種應用[莫吉列甫斯基(Н. И. Могилевский、札別羅(И. И. Забелло)]，現在讓我們略爲提一下下列工作。

先以一些以牛頓方法爲主題的工作開始。 在米連節夫的工作[8]中研究了用牛頓方法求代數方程的複根的技術。

魯濶姆斯卡雅 (М. А. Лукомская) 的工作[1]也以求代數方程

的複根爲主題。

德魯伽契 (Л. А. Длугач)[1]提出使牛頓方法更準確的辦法：在求方程 $f(x)=0$ 的解時，在已知曲線的兩點將函數 $f(x)$ 本身及其導數用三次多項式 $x=P(y)$ 代替，其與 Ox 軸的交點給出根的新近似值。

格拉維(Д. А. Граве)[1]研究了廣義的牛頓演算法的收斂性，此時逐次近似由下列公式決定

$$\alpha_{n+1}=\alpha_n-\frac{1}{Q}\;\frac{f(\alpha_n)}{f'(\alpha_n)}\alpha_1=\alpha.$$

若 $Q>1$ 且 $Q>\dfrac{f(\alpha)+f''(\alpha)}{[f'(\alpha)]^2}$，則演算是收斂的並且趨於方程的一個根。

牛頓方法對解非線性方程系的應用也經人考慮過。已給出了如何選擇第一近似來保證過程的收斂 [斯切寧 (Н. П. Стенин)康托洛維奇[8]]。

將根用拉格朗日冪級數形式表示是一種可能的方程解法。用這方法解方程的誤差估計由巴然諾夫 (Г. М. Баженов)[1] 給出。

最後讓我們提一下莫甫席玆 (С. Е. Мовшиц) 及托甫賓 (А. В. Товбин)[1]的工作，他們從函數 $\Sigma C_n Z^n$ 距離原點最近的極點由 $\dfrac{1}{\alpha}=\lim\dfrac{C_{n+1}}{C_n}$ 給出這一事實出發，將這個事實應用於函數 $\dfrac{1}{f(z)}$ 而給出一個求根的辦法。作者在 $f(z)$ 爲多項式時得出誤差的估計。實際上，牛頓、拉蓋(Laquerre)、貝爾努里 (Bernoulli) 及恢推克爾的一些方法都可認爲是這方法的特例。

柳斯特尼克提出了並研究了求多變數函數 f 的極端值點的

此为试读，需要完整PDF请访问： www.ertongbook.com