考研 数学 题库

HZ BOOKS
华章教育

中国人民大学 严守权 编著

微积分 习题集（提高篇）

第2版

机械工业出版社
China Machine Press

微积分

考研数学题库

第2版

微积分习题集（提高篇）

中国人民大学 严守权 编著

机械工业出版社
China Machine Press

图书在版编目(CIP)数据

微积分习题集(提高篇)(第2版)/严守权编著. -北京:机械工业出版社，2003.4
(考研数学题库)
ISBN 7-111-11869-3

Ⅰ.微… Ⅱ.严… Ⅲ.微积分-研究生-入学考试-习题 Ⅳ.0172-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第018977号

机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街22号 邮政编码 100037）
责任编辑：魏 杰
北京昌平奔腾印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行
2003年4月第2版第1次印刷
787mm×1092mm 1/16·19.75印张
定 价：32.00元

出版前言

由机械工业出版社华章教育会同北京大学数学学院等几所高校的名师策划、出版的考试数学系列丛书“考研数学题库”、“本科生数学题库”、“2004 年全国研究生入学考试数学复习指导丛书”等共 12 本。这是为了帮助在校生和有志于攻读硕士学位的广大考生全面、系统地复习有关课程的内容，了解考研的最新信息而编写的一套题量较大、题型齐全、覆盖面广、难度及认知层次分布合理的系列丛书。本书的总体设计是在北京大学著名的命题专家指导下，根据教育部最新制定的“全国硕士研究生入学考试数学大纲”的有关要求，并结合作者多年来参加有关考试的命题、阅卷及辅导的经验而进行的。

本套丛书作者皆为北京大学、中国人民大学、北京理工大学、北方交通大学等多年从事数学基础教学以及参加过全国各地考研辅导的名师，具有丰富的教学经验，多次被评为各级优秀教师。他们所编写的教材、辅导书和讲授的课程在各校及历年参加研究生入学考试的考生中都有相当大的影响。

在“考研数学题库”中，包括《高等数学习题集(提高篇)》、《微积分习题集(提高篇)》、《线性代数习题集(提高篇)》、《概率论与数理统计习题集(提高篇)》四本。该系列题型丰富、数量充足、解析精辟，体现了作者们的专业素质。

为了使考生通过一定数量题目的练习，更好地理解和掌握有关的基本概念和基本解题的方法，培养逻辑推理能力及运用所学知识分析、解决实际问题的能力，并使得自己在这个过程中不断地增加对考试的适应能力和通过考试的自信心，在使用本书时应按照以下四个步骤学习才会有较大的收益：

1. 通过审题来正确理解题意(特别是概率统计部分，首先把题目的已知和要求的是什么弄清楚，而那种只有看完题解后才能正确理解题意的做法是万万不可取的)；

2. 分析题目来确定主要考核知识点(解答本题时要用到哪些知识点，需要哪些公式或定理要事先明确，这种训练是十分必要的)；

3. 选择适当的方法与技巧(解题技巧的掌握不仅要“看”，更重要的是“学”，即动手来解题，所谓“熟能生巧”就是这个道理)；

4. 学习解题格式及关键步骤表述(解题格式是大多数同学最容易忽视的一个问题，学习必要解题格式也是十分重要的。在各类考试中，必要的解题格式以及写出关键步骤是我们评判的重要标准，也是今后学习和工作中所需要的)。

我们相信，本系列丛书的出版，必将有助于广大在校生和有志于攻读硕士学位的考生开拓思路，更好地理解和掌握有关的基本概念和基本的解题方法，培养逻辑推理能力及运用所学知

识分析、解决实际问题的能力，并使得自己在这个过程中不断增强对考试的适应能力和通过考试的自信心，以便考出好成绩。

本系列丛书的出版要感谢为丛书提供资料的名师们，感谢他们付出的辛勤劳动。同时，欢迎广大师生就书中的问题提出不同见解。

机械工业出版社华章教育

2003年3月

目录

出版前言
第一章　函数、极限、连续 …… (1)
一、考研内容简介 …… (1)
二、习题 …… (1)
三、习题的解答与分析 …… (11)
第二章　一元函数微分学 …… (41)
一、考研内容简介 …… (41)
二、习题 …… (41)
三、习题的解答与分析 …… (60)
第三章　一元函数积分学 …… (123)
一、考研内容简介 …… (123)
二、习题 …… (123)
三、习题的解答与分析 …… (137)
第四章　多元微积分学 …… (184)
一、考研内容简介 …… (184)
二、习题 …… (184)
三、习题的解答与分析 …… (198)
第五章　无穷级数 …… (251)
一、考研内容简介 …… (251)
二、习题 …… (251)
三、习题的解答与分析 …… (259)
第六章　常微分方程与差分方程 …… (286)
一、考研内容简介 …… (286)
二、习题 …… (286)
三、习题的解答与分析 …… (291)

第一章　函数、极限、连续

一、考研内容简介

函数的概念及表示法;函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性;反函数、复合函数、隐函数、分段函数;基本初等函数的性质及其图形;初等函数.

数列极限与函数极限的定义及其性质;函数的左极限和右极限;无穷小和无穷大的概念及关系,无穷小的性质及无穷小的比较;极限四则运算;极限存在的两个准则(单调有界准则和夹逼准则);两个重要极限:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}.$$

函数连续与间断的概念;初等函数的连续性;闭区间上连续函数的性质.

二、习　　题

(一) 填空题

1. 已知 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$, $f[\varphi(x)]=1-x$, 且 $\varphi(x)\geqslant 0$, 则 $\varphi(x)=$ ________, 其定义域为 ________.

2. 已知 $f\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2}{1+x^4}$, 则 $f(x)=$ ________, 其定义域为 ________.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ 2x-1, & x<0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}-x^2, & x\leqslant 1,\\ \ln(1+x), & x>1,\end{cases}$ 则 $f(g(x))=$ ________, $g(f(x))=$ ________, $f(x)\cdot g(x)=$ ________.

4. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义, 且 $f(x+2)=f(x)$. 若当 $-1\leqslant x<1$ 时, $f(x)=\begin{cases}x^2, & -1\leqslant x<0,\\ 0, & 0\leqslant x<1,\end{cases}$ 则当 $2\leqslant x<4$ 时, $f(x)=$ ________.

5. 设 $f(x)$ 满足等式 $f\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)=2f(x)+x$,则 $f(x)=$ ________.

6. 函数 $y=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$ 与函数 $y=g(x)$ 关于直线 $y=x$ 对称,则 $g(x)=$ ________.

7. 设 $a>0$,常数,则 $\varphi(t)=\max\limits_{-\infty<x<+\infty}\left\{xt-\dfrac{1}{2}ax^{2}\right\}=$ ________.

8. 设函数 $f(x)=mx^{2}+(m-1)x-(m-1)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上恒正,则 m 取值范围为________.

9. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x<0,\\ 1-x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x^{2}, & 1<x\leqslant 3,\end{cases}$ 则其反函数的定义域为________.

10. 函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^{2}-3x+2)$ 的单调减区间为________.

11. 函数 $y=\sqrt{\dfrac{4x+3}{x-3}}$ 的值域为________.

12. 函数 $f(x)=\displaystyle\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}|\cos t|\,dt$ 的值域为________.

13. 已知 $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{x^{k}}=c\neq 0$,则 $k=$ ________,$c=$ ________. 又知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{x^{k}}=c\neq 0$,则 $k=$ ________,$c=$ ________.

14. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(n+\dfrac{1\,054}{n}\right)^{1\,054}}{n^{m}-(n-1)^{m}}=c\neq 0$,则 $m=$ ________,$c=$ ________.

15. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\displaystyle\int_{b}^{1-\frac{1}{x}}\operatorname{arccot}x\arctan t\,dt}{ax+\ln\left(1+\dfrac{1}{x^{2}}\right)}=c\neq 0$,则 $a=$ ________,$b=$ ________,$c=$ ________.

16. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}[(x^{5}+7x^{4}-12)^{\alpha}-x]=c\neq 0$,则 $\alpha=$ ________,$c=$ ________.

17. 设极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在,且 $\lim\limits_{x\to\infty}3xf(x)=\lim\limits_{x\to\infty}(4f(x)+5)$,则 $\lim\limits_{x\to\infty}xf(x)=$ ________.

18. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin x}-1}{\ln(1+x)}=100$,则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$ ________.

19. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x^{2})+x^{2}f(x)}{x^{3}}=0$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+f(x)}{x}=$ ________.

20. 已知 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{b}{x^5}\int_0^x e^{-t^2}dt\right)=c\neq0$，则 $a=$ ________，$b=$ ________，$c=$ ________.

21. 设 $f(x)$ 有连续导数，且 $f(0)=0, f'(0)\neq0, F(x)=\int_0^x(x^2-t)f(t)dt$，当 $x\to0$ 时，$F'(x)$ 与 x^k 为同阶无穷小，则 $k=$ ________.

22. 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^x=\int_a^{+\infty}4x^2e^{-2x}dx$，则常数 $a=$ ________.

23. 设曲线 $y=f(x)=x^n$ 在点(1,1)处的切线与 x 轴的交点为$(\xi_n,0)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)=$ ________.

24. 设 $f(t)=e^t$，且 $\int_0^x f(t)dt=xf(ux)$，则 $\lim\limits_{x\to0}u=$ ________.

25. 设函数 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$可导，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=e$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]$，则 $c=$ ________.

26. 设 $f(x)=e^{\sin(2x-3)\pi}$，则 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(2x)-f(x+1)}{x-1}=$ ________.

27. 设 $f(x)$ 可导恒正，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f\left(a+\frac{1}{a}\right)}{f(a)}\right)^n=$ ________.

28. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{[(nx)^n+1]^{\frac{n+1}{2}}}=$ ________.

29. 已知 $f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{1-2x^2}{1+x^2}\right)^{\cot^2x}, & 0<|x|<\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ 2x-a, & \text{其他}\end{cases}$ 在 $x=0$ 连续，则 $a=$ ________.

30. 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $x\neq0$ 时，$f(x)=(\cos x)^{x^{-2}}$，则 $f(0)=$ ________.

31. 设 $f(x)=\begin{cases}2x, & x<0,\\ a, & x\geqslant0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}b, & x<0,\\ x+3, & x\geqslant0,\end{cases}$ 且 $f(x)+g(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上连续，则 $a=$ ________，$b=$ ________.

32. 设函数 $g(x)$ 在点 $x=0$ 处可导，$g(0)=0, g'(0)=b$，且

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)+a\tan x}{x}, & x\neq0,\\ A, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 连续，则常数 $A=$ ________.

33. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}}$ 的连续区间为________.

34. 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}\left(\dfrac{xt-2}{xt-1}\right)^{t}$ 有间断点________,曲线 $y=f(x)$ 有渐近线________.

35. 已知方程 $x^3+(2m-3)x+m^2-m=0$ 有三个相异实根,分别介于 $(-\infty,0)$,$(0,1)$,$(1,+\infty)$ 内,则常数 m 满足的条件是________.

(二) 选择题

1. 下列函数对中,两函数相等的是(   ).

A. $y=x$ 与 $y=\sin(\arcsin x)$;

B. $y=\arctan x^2$ 与 $y=\arctan\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$;

C. $y=\displaystyle\int_0^{x^2}\frac{\sin t}{2t}\mathrm{d}t$ 与 $y=\displaystyle\int_0^{x}\frac{\sin t^2}{t}\mathrm{d}t$;

D. $y=x+\sqrt{1+x^2}$ 与 $g(x)$,其中 $g(x)$ 由等式 $g\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$ 确定.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ 2x, & x<0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -2x, & x<0,\end{cases}$ 则 $x\leqslant 0$ 时,$f[g(x)]=$(   ).

A. $2x$;　　B. x^2;　　C. $4x^2$;　　D. $-4x^2$.

3. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增,可导,则(   )也在 $(-\infty,+\infty)$ 单调增.

A. $f(g(-x))$;　　B. $f(x)g(x)$;　　C. $f^3(x)$;　　D. $\dfrac{1}{f(-x)}$.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}\cos x-x, & -\pi\leqslant x<0,\\ \cos x+x, & 0\leqslant x\leqslant\pi,\end{cases}$ 在定义域内 $f(x)$ 为(   ).

A. 无界函数;　　B. 偶函数;　　C. 单调函数;　　D. 周期函数.

5. 设 $f(x)=\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x}}$,则 $f(x)$ 是(   ).

A. 周期函数;　　B. 单调函数;

C. 非偶非奇函数;　　D. 有界函数.

6. 设 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 互为反函数,$f(x)=-f(-x)$,且均在 $(-\infty,+\infty)$ 上存在二阶导数,于是(   ).

A. 若 $x>0,f''(x)>0$,则 $x<0$ 时,$f''(x)<0$;

B. 若 $x>0,f''(x)>0$,则 $x<0$ 时,$f''(x)>0$;

C. 若 $f''(x)>0$,则 $g''(x)>0$;

D. 若 $f''(x)>0$,则 $g''(x)<0$.

7. 设 $\delta>0$,函数 $f(x)$ 在 $(a-\delta,a)$ 和 $(a,a+\delta)$ 内有定义,如果下列条件(   )成立,则极限 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 存在.

A. $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A(\neq\infty)$,$x$ 为有理数;

B. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 均存在，且 $f(x)$ 在 $x = a$ 有定义；

C. $f(x)$ 在 $(a-\delta, a)$, $(a, a+\delta)$ 上可导；

D. A 为某个常数，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(a+x)-A}{\sqrt[3]{x}}$ 存在.

8. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 可导，$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x_0+t)+f(x_0+3t)}{t} = (\quad)$.

A. $f'(x_0)$；　　B. $-2f'(x_0)$；　　C. ∞；　　D. 不能确定.

9. 若对任意实数范围总有 $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}(g(x)-\varphi(x)) = 0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = (\quad)$.

A. 存在且为零；　　B. 存在但不一定为零；

C. 一定不存在；　　D. 不一定存在.

10. 设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = +\infty$，则必有 $(\quad)$.

A. $a_n < b_n$ 对任意 n 成立；　　B. $b_n < c_n$ 对任意 n 成立；

C. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n c_n$ 不存在；　　D. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n$ 不存在.

11. 设 $a_n = \dfrac{3}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{n}{n+1}} x^{n-1}\sqrt{1+x^n}\,dx$，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = (\quad)$.

A. $(1+e)^{\frac{3}{2}}+1$；　　B. $(1+e^{-1})^{\frac{3}{2}}-1$；

C. $(1+e^{-1})^{\frac{3}{2}}+1$；　　D. $(1+e)^{\frac{3}{2}}-1$.

12. 下列结论中正确的是 $(\quad)$.

A. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = A$，则必有 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$；

B. 任意两个无穷小均可比较大小；

C. 若 α 为无穷小量，则 $\dfrac{1}{\alpha}$ 必为无穷大量；

D. 有界变量乘无穷大量未必为无穷大量.

13. 设 $f(x) = \displaystyle\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\,dt$, $g(x) = \dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^6}{6}$，则 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的 $(\quad)$ 无穷小.

A. 低阶；　　B. 高阶；　　C. 等价；　　D. 同阶但非等价.

14. 已知极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\arctan x^k)^{\frac{1}{e^{(\tan x)^n}-1}} = 1$，且 k, n 为正整数，则有 $(\quad)$.

A. $k > n$；　　B. $k = n$；　　C. $k < n$；　　D. k, n 为任意正整数.

15. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\sin x+b(1-\cos x)}{c\ln(1+x)^{-2}+d(1-\mathrm{e}^{-x^2})}=2, a^2+c^2\neq 0$,则有(　　).

A. $a+4c-2d=0$, b 为任意实数;

B. $a+4c=0$, b,d 为任意实数;

C. $b-2d=0$, a,c 为任意实数;

D. $a=0, b-2c+d=0$.

16. 当 $x\to 0$ 时, $\mathrm{e}^{\tan x}-\mathrm{e}^{x}$ 与 x^n 是同阶无穷小,则 $n=$(　　).

A. 1;　　B. 2;　　C. 3;　　D. 4.

17. 设 $f(x)=\dfrac{x}{a+\mathrm{e}^{bx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$,则常数 a,b 满足(　　).

A. $a<0, b<0$;　　B. $a>0, b>0$;

C. $a\leqslant 0, b>0$;　　D. $a\geqslant 0, b<0$.

18. 若 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\ln x+x\sin\frac{1}{x}}{x\ln x+f(x)}=1$,则 $f(x)=$(　　).

A. $\ln x^2$;　　B. $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$;　　C. $\tan x$;　　D. $\cos x$.

19. 设 $F(x)=\dfrac{x^2}{x-a}\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,其中 $f(x)$ 为连续函数,则 $\lim\limits_{x\to a}F(x)=$(　　).

A. a^2;　　B. $a^2f(a)$;　　C. 0;　　D. 不存在.

20. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}\right)^n=$(　　).

A. 0;　　B. e^2;　　C. e^{-1};　　D. e^{-2}.

21. 极限(　　)$=0$.

A. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x^2}}$;　　B. $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x^2}}$;

C. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x^3}}$;　　D. $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x^3}}$.

22. 下列函数在其定义域内不连续的是(　　).

A. $f(x)=\begin{cases}x+1, & x>0,\\ x-1, & x<0;\end{cases}$　　B. $f(x)=\dfrac{x+1}{(x-1)^2}$;

C. $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ x^2-1, & x\geqslant 0;\end{cases}$　　D. $f(x)=x+x^2+x^3+\cdots, |x|<1$.

23. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & 当\ x\neq 0\ 时,\\ 0, & 当\ x=0\ 时,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 则在 $x=0$ 处间断的函数

是(　　).

A. $\max\{f(x),g(x)\}$;　　B. $\min\{f(x),g(x)\}$;

C. $f(x)-g(x)$;　　D. $f(x)g(x)$.

24. 设 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内定义,且 x_0 为其间断点,则在 x_0 处必间断的函数是(　　).

A. $f(x)\sin x$;　　B. $f(x)+\sin x$;　　C. $f^2(x)$;　　D. $|f(x)|$.

25. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续,$\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处间断,又 $f(a)\neq 0$,则(　　).

A. $\varphi[f(x)]$ 在 $x=a$ 间断;　　B. $f[\varphi(x)]$ 在 $x=a$ 间断;

C. $\varphi^2[f(x)]$ 在 $x=a$ 间断;　　D. $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 在 $x=a$ 间断.

26. "$f(x)$ 在点 $x=a$ 处连续"是函数 $|f(x)|$ 在点 $x=a$ 处连续的(　　)条件.

A. 必要但非充分;　　B. 充分而非必要;

C. 充分且必要;　　D. 即非充分又非必要.

27. 设 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0,\\ x+1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x^2, & x<1,\\ 2x-1, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 则下列函数中,(　　)在 $(-\infty,+\infty)$ 上不连续.

A. $f(x)\cdot g(x)$;　　B. $f(x)+g(x)$;

C. $f(g(x))$;　　D. $g(f(x))$.

28. 设 $f(x)$ 是奇函数,且 $f'(0)$ 存在,则 $x=0$ 为函数 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 的(　　)间断点.

A. 无穷;　　B. 可去;　　C. 跳跃;　　D. 无法确定类型.

29. 曲线 $y=e^{\frac{1}{x}}\arctan\dfrac{x^2+x-1}{(x+1)(x-1)}$ 有(　　)条渐近线.

A. 1;　　B. 2;　　C. 3;　　D. 4.

30. 曲线 $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x-4}\ln\dfrac{5-x}{3+x}$ 有(　　)条渐近线.

A. 1;　　B. 2;　　C. 3;　　D. 4.

(三) 解答题

1. 求函数 $y=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ 在 $|x|\geqslant 1$ 时的反函数.

2. 求函数 $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$ 的反函数.

3. 已知函数 $f(x)=f(x+4)$,$f(0)=0$,且在 $(-2,2)$ 上有 $f'(x)=|x|$,求 $f(9)$.

4. 求下列函数的值域:

(1) $y=(x-2)(x-4)(x-6)(x-8)+17$;　　(2) $y=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{2}{x-3}$.

计算下列极限(5 ~ 8):

5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-x-1}+x-1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x+2x\arctan x}{e^x-\pi x}$.

7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)}$.

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{x\sin^2 x}$.

计算下列极限(9 ~ 12)：

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^{x+1}}{(1+x)^x}-\dfrac{x}{e}\right)$.

10. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

11. $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{a}{x}-\left(\dfrac{1}{x^2}-a^2\right)\ln(1+ax)\right]$.

12. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right)$.

计算下列极限(13 ~ 16)：

13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt[x]{x}-1)$.

14. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$.

15. $\lim\limits_{x\to1^-}\sqrt{1-x^2}\cot\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

16. $\lim\limits_{x\to0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$.

计算下列极限(17 ~ 20)：

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{2}{x}\right)^x$.

18. $\lim\limits_{x\to0^+}[(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}]^2$.

19. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$.

20. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4}{\pi}\arctan\dfrac{n}{n+1}\right)^n$.

计算下列极限(21 ~ 25)：

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}$.

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{1\cdot 3}\right)\left(1+\dfrac{1}{2\cdot 4}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{n(n+2)}\right)$.

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$.

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}\right)$.

25. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n)^{\frac{1}{n}},\quad a_i>0,(i=1,2,\cdots)$.

计算下列极限(26 ~ 29):

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\left[\int_0^{y^2}\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}y}{x-\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t}$.

27. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\ln(1+x^n)\mathrm{d}x$.

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)\mathrm{d}t}{x^{2n}}$,其中 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,且 $f(0)=0$.

29. $\lim\limits_{x\to\infty}\int_x^{x+2}t\sin\dfrac{3}{t}f(t)\mathrm{d}t$,其中 $f(t)$ 可微,且 $\lim\limits_{t\to\infty}f(t)=1$.

计算下列极限(30 ~ 32):

30. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

31. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2q+3q^2+\cdots+nq^{n-1}),\ |q|<1$.

32. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\dfrac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\dfrac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$.

33. 设 $f(x)$ 为 x 的三次多项式,若 $\lim\limits_{x\to 2a}\dfrac{f(x)}{x-2a}=\lim\limits_{x\to 4a}\dfrac{f(x)}{x-4a}=1$,求 $\lim\limits_{x\to 3a}\dfrac{f(x)}{x-3a}$.

34. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3$,求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

35. 设函数 $f(x)$ 存在二阶导数,$f(0)=0,f'(0)=1,f''(0)=-2$,求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}$.

36. 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域内有连续二阶导数,且 $f'(a)\neq 0$,求

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{1}{f(x)-f(a)}-\frac{1}{(x-a)f'(a)}\right].$$

37. 设 $f_n(x)=x+x^2+\cdots+x^n(n=2,3,\cdots)$,

证明:(1) 方程 $f_n(x)=1$ 在$[0,+\infty)$内有惟一的实根 x_n;

(2) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在,并求极限值.

38. 证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{a}{b}} \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}\sin x\,\mathrm{d}x = 0$.

39. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调减少且连续的非负函数,

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\mathrm{d}x \quad (n = 1,2,\cdots).$$

证明:$\{a_n\}$ 收敛.

40. 曲线 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 的切线与 x 轴和 y 轴围成一个图形,记切点的横坐标为 a,试求切线方程和这个图形的面积,当切点沿曲线趋于无穷远时,该面积的变化趋势如何?

41. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}, & x<0, \\ 6, & x=0, \\ \dfrac{\mathrm{e}^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\frac{x}{4}}, & x<0, \end{cases}$

问:a 为何值时,$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续?a 为何值时,$x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

42. 设 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)-\cos x}{x}, & x\neq 0, \\ a, & x=0, \end{cases}$ 其中 $g(x)$ 具有二阶导数,且 $g(0)=1$.

(1) 确定 a 的值,使 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续;

(2) 求 $f'(x)$;

(3) 讨论 $f'(x)$ 的连续性.

43. 设 $f(x) = \frac{1}{\pi x} + \frac{1}{\sin\pi x} - \frac{1}{\pi(1-x)}, x\in\left[\frac{1}{2},1\right)$,试补充定义 $f(1)$,使 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上连续.

44. 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,证明:$\max\{f(x),g(x)\},\min\{f(x),g(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上连续.

45. 求函数 $f(x) = \lim\limits_{t\to x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$ 的间断点,并指出其类型,并给出 $y=f(x)$ 渐近线.

46. 设 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}\sin\frac{\pi x}{2} + \cos(a+bx)}{x^{2n}+1}$,讨论 a,b 取何值时,$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

47. 设 $f(x) = \lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\ln x + (x-\mathrm{e})\mathrm{e}^{(x-\mathrm{e})t+x}}{1+(x-\mathrm{e})\mathrm{e}^{(x-\mathrm{e})t+k}}$,$(k\leqslant \mathrm{e}, x>0)$.求: