中学教师参考读物

微积分初步

吉林人民出版社

中学教师参考读物
微积分初步
朱英民 张善才 编
*
吉林人民出版社出版 吉林省新华书店发行
长春市印刷厂印刷
*
787×1092毫米32开本 $18\frac{3}{8}$印张 370,000字
1980年10月第1版 1980年10月第1次印刷
印数1—5,930册
书号：7091·1164 定价：1.25元

序　言

微积分学，是用极限分析的方法，研究函数的微分和积分理论和应用的科学。它是高等数学的基础，也是物理、化学、天文、生物等自然科学和技术科学的工具。学习微积分学的基本知识，对于学习自然科学和技术科学是必不可少的，因而，对于实现祖国的四个现代化，提高我们全民族的科学文化水平，也是一件很有意义的事情。

恩格斯有句名言："科学的发生和发展一开始就是由生产决定的。"微积分学的产生和发展，正是适应生产和技术发展的需要。从数学发展的观点来看，在十六世纪以前，人们所研究的主要是初等数学。到了十六、十七世纪，人类社会开始由封建主义向资本主义过渡，社会生产力得到巨大发展，科学技术有了很大进步。当时的物理学、力学、航海学和机械学等，都提出许多初等数学所不能解决的问题：如运动着的物体的路程和速度有什么关系，天体是沿着怎样的轨道运行的，不规则图形的面积如何计算，等等。很多人对这些问题进行了研究，并取得了不少成果。英国的物理、数学家牛顿（Newton，1642—1727）和德国的数学家莱布尼茨（Leibniz，1646—1716）适应生产和技术发展的需要，总结并发展前人的研究成果，于十七世纪后半期建立了微积分

学。微积分学和其他高等数学的产生，在数学发展史上，开始了高等数学的新时代。到了十八世纪，微积分学又有了许多新的应用，同时促使它的内容也有了进一步的发展。但是，它在理论上还缺少严密的逻辑基础。一直到十九世纪的法国数学家柯西（Cauchy，1789—1857），建立了严密的极限理论，奠定了微积分学的理论基础，微积分学才开始完备起来。

这本《微积分初步》不是一部完整的微积分学，它只介绍一元函数的微积分学的基本知识，包括基本概念、基本运算和主要应用，有时也提到一些基本理论，但大都不作证明。在叙述的顺序上，也和历史的发展不同，先介绍极限知识，再介绍函数的微分和积分，最后介绍一点微分方程的初步知识。

这本书是一本自学读物，是写给具有高中数学程度的教师、青年自学用的。为了便于大家自学，我们在每章、节都写了开头语，节后列有思考问题，每章后有小结；书中例题和习题都比较多，书后附有习题答案和部分习题提示；在语言叙述上，我们也力求作到深入浅出，通俗易懂。

本书的第一、二、三、四章由朱英民同志执笔，第五、六、七章由张善才同志执笔。

编　者

一九七八年七月

中学教师参考读物

微积分初步

朱英民　张善才　编

吉林人民出版社

原书缺页

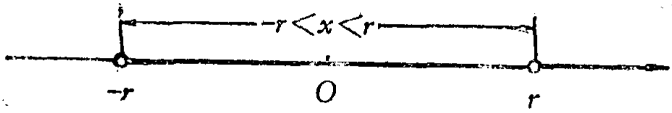

图1—1

证明：先证必要性，即已知$|x|<r$，求证$-r<x<r$。

若$x\geqslant 0$，由绝对值定义知

$$|x|=x,$$

由题设知

$$x=|x|<r,$$

也就是

$$x<r,$$

所以有

$$-r<x<r;$$

若$x<0$，我们有

$$-x=|x|<r,$$

即

$$-x<r,$$

两边同乘以-1得

$$-r<x,$$

所以有

$$-r<x<r.$$

综上可得$-r<x<r$。

再证充分性，即已知$-r<x<r$，求证$|x|<r$。

若$x\geqslant 0$，则$|x|=x$，由题设知$x<r$，即$|x|<r$；

若$x<0$，则$|x|=-x$，由题设知$-r<x$，即$-x<r$，

即 $|x|<r$。

综上可知 $|x|<r$。

这个性质说明，含有绝对值的不等式 $|x|<r$，与不等式 $-r<x<r$ 只是形式不同，其实质是完全一样的。

（v）设 a 为一常数，ε* 为任意给定的正数（即 $\varepsilon>0$）．那么，实数 x 满足不等式

$$|x-a|<\varepsilon$$

的必要充分条件是

$$a-\varepsilon<x<a+\varepsilon.$$

这条性质的几何意义是，在数轴上到点 a 的距离小于 r 的点 x，必在 $a-\varepsilon$ 和 $a+\varepsilon$ 两点之间；反之，在 $a-\varepsilon$ 和 $a+\varepsilon$ 两点之间的点 x，到点 a 的距离都小于 ε（图1—2）。

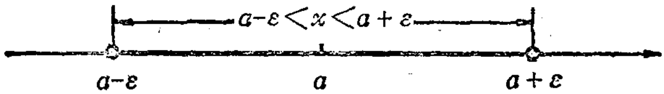

图1—2

证明：如果把 $x-a$ 看成一个实数，由性质（iv）知，$|x-a|<\varepsilon$ 的必要充分条件是

$$-\varepsilon<x-a<\varepsilon,$$

同加上 a 得，

$$a-\varepsilon<x<a+\varepsilon,$$

命题得证。

这条性质说明，不等式 $|x-a|<\varepsilon$ 与不等式 $a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$，其实质是完全一样的。

* ε是一个希腊字母，读“依泼西柔”。

（vi）设M为给定的正数（即$M>0$）。那么，实数x满足不等式

$$|x|>M$$

的必要充分条件是

$$x>M \text{ 或 } x<-M.$$

这个性质的几何意义是，在数轴上与原点的距离大于M的点x，必在$-M$和M两点之外；反之，在$-M$和M两点之外的点x，与原点的距离都大于M（图1—3）。

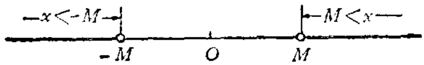

图1—3

证明：必要性：

若$x>0$，则$|x|=x$，而$|x|>M$，即$x>M$；

若$x<0$，则$|x|=-x$，而$|x|>M$，即$-x>M$，即$x<-M$。

综上可知，$x>M$ 或 $x<-M$。

充分性：

若$x>M$，则$x>0$，而$|x|=x>M$，即$|x|>M$；

若$x<-M$，即$-x>M$，则$x<0$，$|x|=-x>M$，即$|x|>M$。

综上可知，$|x|>M$。

例1　用绝对值的基本性质解下列不等式：

（1）$|x|<0.1$；　　（2）$|x-1|<0.01$；

（3）$|5x+2|<1$；　　（4）$|2x+1|>2$。

解：（1）由于$|x|<0.1$，由性质（iv）得$-0.1<x<0.1$；

（2）由于$|x-1|<0.01$，由性质（v）得$1-0.01<x<1+0.01$，即$0.09<x<1.01$；

（3）由于$|5x+2|<1$，即$|5x-(-2)|<1$，由性质（v）得$-2-1<5x<-2+1$，即$-3<5x<-1$，同除以5得$-\frac{3}{5}<x<-\frac{1}{5}$；

（4）由于$|2x+1|>2$，由性质（vi）得$2x+1>2$或$2x+1<-2$，即$x>\frac{1}{2}$或$x<-\frac{3}{2}$。

关于绝对值的运算，有以下四个基本公式：

1．和的绝对值　两数和的绝对值，小于或等于（简称不大于）两数绝对值之和。即

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

证明：若$a+b\geqslant0$：则$a+b=|a+b|$，由性质（iii）得

$$a\leqslant|a|,$$
$$b\leqslant|b|,$$

两式相加得

$$a+b\leqslant|a|+|b|,$$

即

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

若$a+b<0$，则$-(a+b)=|a+b|$．

由性质（iii）得

$$-|a|\leqslant a,$$

$$-|b|\leqslant b,$$

两式相加得

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b,$$

即

$$-(a+b)\leqslant|a|+|b|,$$

即

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

综上可得

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

2．差的绝对值　两数差的绝对值，大于或等于（不小于）两数绝对值之差．即

$$|a-b|\geqslant|a|-|b|.$$

证明：由于

$$|a|=|(a-b)+b|,$$

应用公式1得

$$|a|=|(a-b)+b|\leqslant|a-b|+|b|,$$

将$|b|$移项即得

$$|a-b|\geqslant|a|-|b|.$$

在上面的证明里，我们采用了减去b再加上b的方法，这种减一项加一项，或者是加一项减一项的方法，在今后证明问题时是要常用的．

推论　$|a-b|\geqslant||a|-|b||$.

证明：由公式2知

$$|a|-|b|\leqslant|a-b|; \qquad (1)$$

又根据性质（ii）和公式2可得

$$|a-b|=|-(a-b)|=|b-a|\geqslant|b|-|a|$$

两端同乘以 -1 得

$$-|a-b|\leqslant|a|-|b|, \qquad (2)$$

把（1）、（2）式连接起来得

$$-|a-b|\leqslant|a|-|b|\leqslant|a-b|,$$

根据性质（iv）可得

$$||a|-|b||\leqslant|a-b|.$$

3．积的绝对值　两数乘积的绝对值，等于两数绝对值对的乘积。即

$$|a\cdot b|=|a|\cdot|b|.$$

4．商的绝对值　两数相除之商的绝对值，等于两数绝对值相除之商。即

$$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}, \quad (b\neq 0).$$

上面两个公式，根据实数乘法与除法的定义是很明显的。

例 2　试证绝对值不等式

$$|x_1+x_2+x_3|\leqslant|x_1|+|x_2|+|x_3|.$$

证明：应用两次公式 1 可得

$$\begin{aligned}|x_1+x_2+x_3|&=|(x_1+x_2)+x_3|\\&\leqslant|x_1+x_2|+|x_3|\\&\leqslant|x_1|+|x_2|+|x_3|.\end{aligned}$$

§2 数列的极限

大家在中学数学里学过极限概念，但那时只限于数列的极限，而且定义也不严密。为了适应今后学习的需要，在这一节，我们要把数列的极限定义精确化，在下一节中，还要把极限概念一般化。

1° 无穷数列

例1 我国战国时代哲学家庄周的著作《天下篇》里有一句话："一尺之棰，日取其半，万世不竭。"意思是说：有一根一尺长的木棒，如果第一天截取它的一半，以后每天截取前一天剩余的一半，那末，这根木棒是永远截取不完的。

显然，木棒第一天截剩尺数为$\frac{1}{2}$，第二天截剩$\frac{1}{4}$，第n天截剩$\frac{1}{2^n}$。所以，木棒每天截剩的尺数构成下面的一列数

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\ \cdots\cdots \qquad (1)$$

象这样，由无限多个有先后顺序的数组成的全体叫做无穷数列。

无穷数列的一般形式可以写作：

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\cdots\cdots,\ x_n\cdots\cdots$$

其中，x_1叫第一项，x_2叫第二项，……，x_n叫第n项。第n项x_n又常称为无穷数列的通项。我们还经常用通项来表示某一无穷数列，即用$\{x_n\}$来表示一般的无穷数列。

再举几个无穷数列的例子。

例 2　$\left\{\frac{1}{n}\right\}$：

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots. \qquad (2)$$

例 3　$\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}$：

$$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\cdots,\frac{(-1)^{n+1}}{n},\cdots. \qquad (3)$$

例 4　$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$：

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots. \qquad (4)$$

例 5　$\{(-1)^{n+1}\}$：

$$1,\ -1,\ 1,\ -1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots. \qquad (5)$$

例 6　$\{1\}$：

$$1,\ 1,\ 1,\cdots,1,\cdots. \qquad (6)$$

例 7　$\{n^2\}$

$$1,\ 2^2,3^2,\cdots,n^2,\cdots. \qquad (7)$$

大家应该注意的是，在无穷数列中，所谓无穷多个有先后顺序的数，并不一定是无穷多个互不相同的数。例 1 、2、3 、4 及 7 内的数是互不相同的，例 6 内的数是完全相同的，例 5 内有无穷多个 1 和无穷多个 -1。

有限多个有先后顺序的数组成的全体叫做有穷数列。有穷数列没有极限的问题。我们今后要讨论的是无穷数列，所以把无穷数列简称为数列。

2° 数列极限的定义

现在，我们来观察上面几个数列的变化趋势。

容易看出，当项数 n 越来越大时，数列（7）中的数越来越大，永无止境；数列（5）中的数忽而取1，忽而取 -1，跳来跳去，没有稳定趋势；数列（1）、（2）和（3）中的数都分别越来越接近于常数0；数列（4）中的数越来越接近于常数1。这样，象（1）至（4）这样的数列的共同特点是，当项数 n 越来越大时，数列的项的值越来越接近于某个常数 a。我们着重讨论这一类数列。

现在以数列（1）为例，对"越来越接近于某个常数 a"做进一步地描述。为了讨论问题直观起见，我们把数列（1）表示在数轴上（图1—4）。

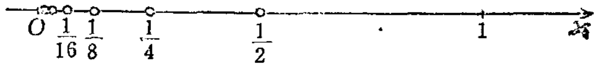

图1—4

并用 α_n 表示第 n 项，即 $\alpha_n=\frac{1}{2^n}$。当 n 越来越大时，α_n 是怎样越来越接近于常数0的呢？

考虑第十天的剩余量 α_{10} 与常数0的距离：

$$|\alpha_{10}-0|=\frac{1}{2^{10}}=\frac{1}{1024}<\frac{1}{1000}=\frac{1}{10^3},$$

第十天以后的剩余量 α_n $(n>10)$ 与常数0的距离为：

$$|\alpha_{11}-0|=\frac{1}{2^{11}}<\frac{1}{10^3},\ |\alpha_{12}-0|=\frac{1}{2^{12}}<\frac{1}{10^3},\cdots\cdots;$$

再考虑第二十天的剩余量α_{20}与常数0的距离：

$$|\alpha_{20}-0|=\frac{1}{2^{20}}=\frac{1}{2^{10}}\cdot\frac{1}{2^{10}}<\frac{1}{10^{3}}\cdot\frac{1}{10^{3}}=\frac{1}{10^{6}},$$

第二十天以后的剩余量α_n（$n>20$）与常数0的距离为：

$$|\alpha_{21}-0|=\frac{1}{2^{21}}<\frac{1}{10^{6}},\ |\alpha_{22}-0|=\frac{1}{2^{22}}<\frac{1}{10^{6}},\cdots;$$

再考虑第三十天的剩余量α_{30}与常数0的距离：

$$|\alpha_{30}-0|=\frac{1}{2^{30}}=\frac{1}{2^{10}}\cdot\frac{1}{2^{10}}\cdot\frac{1}{2^{10}}<\frac{1}{10^{3}}\cdot\frac{1}{10^{3}}\cdot\frac{1}{10^{3}}=\frac{1}{10^{9}},$$

第三十天以后的剩余量α_n（$n>30$）与常数0的距离为：

$$|\alpha_{31}-0|=\frac{1}{2^{31}}<\frac{1}{10^{9}},\ |\alpha_{32}-0|=\frac{1}{2^{32}}<\frac{1}{10^{9}},\ \cdots;$$

………………………………………。

换句话说就是：

对于给定的正数$\frac{1}{10^{3}}$，可以找到一个自然数10，当$n>10$时总有

$$|\alpha_n-0|<\frac{1}{10^{3}};$$

对于给定的正数$\frac{1}{10^{6}}$，可以找到一个自然数20，当$n>20$时总有

$$|\alpha_n-0|<\frac{1}{10^{6}};$$

对于给定的正数$\frac{1}{10^{9}}$，可以找到一个自然数30，当$n>30$时总有

$$|\alpha_n - 0| < \frac{1}{10^9},$$

………………………………………………。

一般地说，不管任何人只要给定了一个无论多么小的正数 ε 以后，就可以找到一个自然数 N，使凡是 $n>N$ 时的 α_n 的值（α_{N+1}，α_{N+2}，α_{N+3}，……）都满足不等式

$$|\alpha_n - 0| < \varepsilon.$$

我们用这种方法来描述"当 n 越来越大时，α_n 越来越接近于常数 0"，是非常精确的，也是符合实际的。今后，就把经得住这种考验的数列称为以常数 a 为极限的数列。

由上，我们给出数列的极限的定义。

定义　设 $\{x_n\}$ 是一数列，a 是一常数。对于任意给定的不管怎样小的 $\varepsilon>0$，如果总能找到一个正整数 N，使得当 $n>N$ 时的所有的 x_n，都满足不等式

$$|x_n - a| < \varepsilon,$$

那么，我们就说数列 $\{x_n\}$ 以 a 为极限。a 称为 $\{x_n\}$ 的极限，或者说 $\{x_n\}$ 趋于 a。记作

$$\lim x_n = a,$$

或

$$x_n \to a.$$

记号 lim 是拉丁文 lim *it*（极限）的缩写。式子 $\lim x_n = a$ 读作"x_n 的极限等于 a"，$x_n \to a$ 读作 x_n 趋于 a。

在数列极限的定义中，谈到了三个基本要素，就是小 ε，大 N 和一串不等式，对于它们应该注意的是：

（1）ε　ε 是任意给定的，可以随便小，但必须是正