

〔美〕 C. P. 汉斯 著

实用薄板理论

吴肇之 译 王磊 校

人民交通出版社

实用薄板理论

〔美〕C.P.汉斯 著

吴肇之 译

王磊 校

人民交通出版社

内 容 提 要

本书是美国桥梁专家 C.P.汉斯的著作，从实用的观点出发，介绍了桥梁、工业与民用建筑结构中薄板和其它构件共同作用时受力分析方法。书中简明扼要地介绍了薄板分别承受板面内外荷载时的基本理论，重点论述各种类型各向异性薄板理论，以及求解这类问题的计算方法，即有限差分法和角变位移法，并附有计算机程序和设计图表。

本书可作为土木工程有关专业师生教学参考书，亦可供从事桥梁、工业与民用建筑结构设计的技术人员参考。

实用薄板理论

C.P.Heins

Applied Plate Theory for the Engineer, printed
in the United States of America, 1976

本书根据美国1976年出版的英文版本译出

王磊校

人民交通出版社出版

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

人民交通出版社印刷厂印

开本：850×1168 1/32 印张：14 字数：354 千

1982年1月 第1版

1982年1月 第1版 第1次印刷

印数：0001—4,250 册 定价：2.80 元

关于作者

C.P. 汉斯 (Heins) 是美国马里兰大学 (University of Maryland) 土木系教授。他曾在缀克塞尔理工学院 (Drexel Institute of Technology) 获得 B.S.C.E. 学位, 在里海大学 (Lehigh University) 获得 M.S.C.E. 学位, 并在马里兰大学获得哲学博士学位。他是 ASCE, ASEE, ACI, SESA 和 IABSE 等学会的会员, 也是 ASCE 学会中长跨桥梁委员会、受弯杆件委员会和安全可靠委员会的成员。

汉斯博士曾参与各种桥梁设计规范的制定, 并擅长于正交异性桥梁、曲形桥梁和荷载系数设计。他曾在美国和国际的著名学术刊物上发表过60篇以上的著作和论文, 并曾参加过世界性的有关会议。汉斯博士现担任美国好几个政府机构和州机构以及私营顾问工程公司的顾问, 并是好几个州的注册职业工程师。

符 号

A_n, A_n	傅里叶级数的系数
b_e	有效翼板宽度
B, B^1	位移矩阵
B_n	傅里叶级数的系数
C	两肋之间的半宽度
D	各向同性薄板的劲度
D_x	正交异性薄板的劲度—截面垂直于 x -轴
D_y	正交异性薄板的劲度—截面垂直于 y -轴
D_θ	正交异性薄板的劲度—截面垂直于 θ -轴
D_r	正交异性薄板的劲度—截面垂直于 r -轴
E	弹性模量
F	应力函数
G	剪切模量
h	板的厚度
H	板的抗扭劲度
I	截面惯性矩
K_T	截面的扭转常数
K	劲度矩阵
L	跨度
M	弯矩
M_y	绕 y -轴转动的弯矩
M_x	绕 x -轴转动的弯矩
$M_{x,y}$	扭矩 (直角坐标)
M_θ	绕 θ -轴转动的弯矩
M_r	绕 r -轴转动的弯矩

$M_{r\theta}$	扭矩 (柱坐标)
n	整数
N_x	垂直于 x -轴的截面上的法向力
N_y	垂直于 y -轴的截面上的法向力
N_{xy}	垂直于 x -轴或 y -轴截面上的水平剪力
N_θ	垂直于 θ -轴的截面上的法向力
N_r	垂直于 r -轴的截面上的法向力
P	作用在板平面内单位长度上的荷载
q	横向荷载
Q_x	沿 x -轴方向的边界力总和
Q_y	沿 y -轴方向的边界力总和
r	柱坐标的径向坐标轴
R	圆板边界处的半径
R_x	垂直于 x -轴的截面上的反力
R_y	垂直于 y -轴的截面上的反力
S	板的表面长度, 截面模数
S_w	扭转翘曲剪力函数
t	板的厚度
u	沿 x -轴方向的横向位移
v	沿 y -轴方向的竖向位移
V_x	垂直于 x -轴的截面上的竖向剪力
V_y	垂直于 y -轴的截面上的竖向剪力
w	沿 z -轴方向的位移
W_o	扭转翘曲标准函数
x	直角坐标的坐标轴
X	沿 x -轴方向的体力
$\bar{X}$	沿 x -轴方向的边界力
y	直角坐标的坐标轴
Y	沿 y -轴方向的体力
$\bar{Y}$	沿 y -轴方向的边界力

z	直角坐标及柱坐标的坐标轴
α	板的劲度比 $H/\sqrt{D_x D_y}$, D_θ/D_r
β	板的劲度比 H/D_y , H/D_r
ε	正应变
θ	弧度角
γ	剪应变
λ	系数 $n\pi/L$, $n\pi/\theta_T$
μ	波桑比
σ	正应力
τ	剪应力
ϕ	应力函数

目 录

符 号	1
第一章 引言	1
§1.1 平板理论的发展史	3
第二章 弹性理论	5
§2.1 概述	5
§2.2 应力	5
§2.3 应变	10
§2.4 应力—应变关系	15
第三章 承受板平面力的薄板—平面应力	17
§3.1 艾瑞 (Airy) 应力函数	17
§3.2 扩展后的边界条件方程	20
§3.3 用傅里叶 (Fourier) 级数表达的边界条件	38
§3.4 半无限平板承受板边周期荷载	46
§3.5 无限长板条承受板边周期荷载	54
§3.6 高梁	56
§3.7 多种材料的组合梁	60
§3.8 平面应力问题的有限差分法解答	65
§3.9 T 形梁的有效宽度	76
§3.10 有限单元法解答	95
第四章 薄板的平面弯曲	120
§4.1 概述	120
§4.2 各向同性薄板的基本方程	120
§4.3 正交异性薄板的基本方程	132
§4.4 两对边简支且承受常量荷载的无限长薄板	136
§4.5 四边简支的矩形薄板	144

§4.6	两对边简支且承受可变线荷载的无限长薄板	153
§4.7	承受均布荷载的半无限长薄板	163
§4.8	弹性梁支承的无限长薄板承受常量荷载	168
§4.9	等效正交异性网格结构体系的解答	170
§4.10	圆板与扇形板	176
第五章	薄板弯曲的有限差分解法和有限单元解法	191
§5.1	矩形薄板	191
§5.2	与支承梁共同作用的矩形薄板	196
§5.3	例题——薄板的有限差分法解答	200
§5.4	有限差分法的误差	203
§5.5	曲形薄板	205
§5.6	与支承梁共同作用的曲形薄板	213
§5.7	等效正交异性网格体系的有限差分方程	215
§5.8	有限单元法解答	219
第六章	桥梁和房屋结构体系的解答	244
§6.1	矩形正交异性桥	244
§6.2	曲形正交异性桥	258
§6.3	桥梁结构的网格梁系	259
§6.4	房屋结构的网格梁系	270
第七章	计算机程序	281
§7.1	矩形正交异性桥	281
§7.2	曲形正交异性桥	297
第八章	桥梁数据及例题	310
§8.1	薄板劲度与大梁劲度	310
§8.2	用实验法确定薄板劲度	327
§8.3	横梁受力的估算	329
§8.4	正交异性薄板的尺寸	332
§8.5	设计例题	332
第九章	大挠度理论和薄板的压屈	352
§9.1	在横向荷载和板平面力作用下的矩形薄板	352

§9.2	正交异性矩形薄板的大挠度问题·····	357
§9.3	加劲的矩形薄板·····	361
§9.4	加劲矩形薄板的解答·····	363
§9.5	曲形正交异性薄板·····	365
§9.6	加劲曲形薄板的解答·····	372
§9.7	矩形薄板的压屈·····	379
附录 A	计算机程序·····	384
附录A-1	角变位移法解矩形正交异性桥计算机程序·····	384
附录A-2	有限差分法解曲形正交异性桥挠度计算 机程序·····	403
附录A-3	有限差分法解曲形正交异性桥弯矩计算 机程序·····	424
参考文献 ·····		429

第一章 引 言

在许多工程结构的设计和分析中，必须考虑桥面或楼面体系与各支承构件之间的共同作用。然而，考虑这种共同作用又往往使结构成为高次不定的^①结构体系，这就需要有关板的作用和支承构件的一些知识。设有一块平板，虽然它没有主要的支承构件，若楼面或桥面作为全部结构体系中一个整体作用，这也需要考虑到板的作用。为了克服在设计中因要考虑共同作用而引起的困难，各种规范和手册都载有许多简化程序。为了考虑板的作用，“荷载分布”、“弯矩系数”、“有效板宽”、“等效劲度”等因素都已结合到设计概念中了。

但是，工程师们必须了解这些因素可能只适用于某些情况。若在设计中没有遇到这些情况，有可能需要应用板的理论作进一步的研究。因此，对于工程师来说，具有一些有关薄板的作用以及这种作用在结构体系中起着什么影响的知识是很重要的。只有对结构体系的共同作用了解以后，才能采用各种不同的技巧来获得适当的解答。象在挡土墙设计中那样，可以把墙板细分为若干等效的板条来加以考虑，也可以利用部分平板在某种边界条件下的解答。在导出基本方程之后编制设计表格，也是一种适当的解决方法。在这些基本方程的推导中，往往引用待定的变形量作为未知变量。因此，各个给定的边界条件也应与已知的变形相一致。这种方法通常是分析构架、板或是两者的组合等不定结构时所遵循的程序。

薄板基本方程的解答可用几种方法求得。在某些情况下，如果板的边界条件为已知，则可以获得一个“精确”的解答；若板

① 高次不定结构包括力法中的超静定结构和位移法中的多结点位移结构等等——译者注。

的边界较为特殊或设置有共同作用的构件时则只好应用近似的方法来求解。

本书的意图是对有关板平面内受力问题与薄板弯曲的经典理论作一综合的叙述，并对如何应用这些理论和程序来解决实际问题将通过问题的解析解答和计算机技术，进行详尽的解说。

本书分为四个基本部分：

弹性理论

承受板平面力的薄板

薄板的平面弯曲

有限差分法和有限单元解法

以上各章叙述了基本理论及其解答，而这些解答在实际问题中的应用以及与它们有关的计算机程序将在下面两章中叙述：

桥梁和房屋结构体系的解答

计算机程序

与薄板理论有关的是正交异性上承桥梁，这类理论的应用已编写成为设计数据放在下一章中叙述：

桥梁数据和例题

最后一章叙述薄板的弯曲和板平面力的共同作用，取名为**大挠度理论和板的压屈**

在以上各章的理论推导中曾作了一些基本假定。这些与薄板弯曲作用有关的假定和小挠度理论一样，是以下列假定为根据的：

- (1) 薄板的中面没有变形，即薄板的中面不产生应变；
- (2) 薄板的截面在变形前后皆保持为平面；
- (3) 垂直于板平面方向的正应力可以忽略。

有了这些假定，便可以用位移分量和坐标关系来描述应力的状态。

对于第九章中所叙述的大挠度薄板，上述假定将不适用。

§1.1 平板理论的发展史

虽然任何一种复杂结构体系的作用都包含有静荷载和动荷载两方面的影响，但是，一般说来，新的解答和技术首先只论及静荷载的影响。在平板性状的研究中，欧拉 (L. Euler) 于 1766 年首先致力于有关平板自由振动问题的研究。接着是他的学生柏努里 (J. Bernoulli) 把他的工作引伸到网状格构的问题中。但是，用柏努里方程解得的结果与实验的结果相比较，效果并不好。

德国物理学家克拉德尼 (E. F. F. Chladni) 完成了一系列足以确定平板自由振动各种振型的振动试验，因此，他于 1809 年受到拿破仑和法国科学院的邀请去进行表演。他的试验给予了法国人十分深刻的印象，从而掀起了对平板振动问题的研究竞赛。当时只有一个申请者参加，她就是法国数学家歌曼 (S. Germain)。她的研究结果得出了一个薄板微分方程，但其中缺少了有关翘曲影响的一项。这个缺陷被当时的一位竞赛裁判拉格朗日 (Lagrange) 所察觉，所以，他就是提出的一般薄板方程的首创人。

波桑 (S. D. Poisson) 又于 1829 年成功地把歌曼—拉格朗日薄板方程推广到薄板在静力荷载作用下的解答，但是，在这个解答中，板的抗弯劲度 D 被规定为一常量。

提出第一个令人满意的薄板弯曲理论要归功于纳维叶 (C. L. Navier)，他考虑基本薄板方程中的薄板厚度是抗弯劲度 D 的函数。他又介绍了利用傅里叶三角级数使微分方程转换为代数式的一种“精确”方法。

克希霍夫 (G. R. Kirchhoff) 于 1850 年发表了一篇关于薄板理论的重要论文。在这篇论文中，他阐述了如今已被接受且前面已给出的两个基本假定：

(1) 在薄板内，原来垂直于薄板中面的各直线，在板弯曲时仍保持为直线，并且垂直于弯曲后板的中面。

(2)当薄板在横向荷载作用下出现小挠度时,板的中面不受拉伸。

采用这些假定,克希霍夫推导出正确的应变能薄板弯曲方程,他还指出在板的每一边缘上只存在着两个边界条件。

凯尔文(Lord Kelvin)提出了沿着板的边缘可把扭矩转换为等效剪力这一有关边界方程条件的见解,从而使得在薄板边缘上只承受两种力的作用,即剪力与弯矩。

两对边为简单支承,另两对边为任意支承的矩形薄板的解答已在十九世纪末为利威(M. Levy)成功地解决了。

自此以后,通过韦司脱高德(Westgaard),那达依(Nadai),胡柏(Huber),司奈赫尔(Schleicher)等学者的努力,经典的薄板解答不断得到发展。

随着数字电子计算机的出现,这些经典解答也因有了数值解答而得到扩大。如今采用有限差分法或有限单元技术,十分复杂的问题也能获得解答。

经典技术的进步,导致了新的见解和新的技术。本书将提供有关利用这些新概念的資料。

第二章 弹性理论

§2.1 概 述

为了建立一般的薄板方程并将其用于工程问题，需要考虑一点处或一单元上的一般应力状态。这些应力方程是为同一平面内的应力状态而建立，然后应用于有关板平面力的问题；并且通过适当的修正，使这些应力方程应用于有关薄板的弯曲问题。

§2.2 应 力

2.2.1 一点处的应力状态

设有一微分体单元 dx, dy, dz ，受有应力矢量 $\bar{S}_x, \bar{S}_y$ 和 $\bar{S}_z$ 的作用，示如图 2-1。每一矢量都由矢量 $\bar{S}$ 表示应力分量组成，各矢量的应力分量用下列方程表示

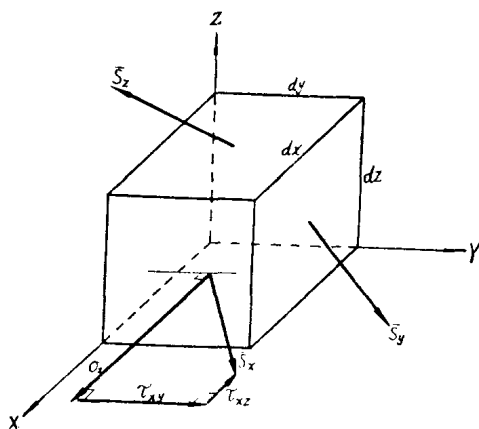


图2-1 体应力

$$\left. \begin{aligned} \bar{S}_x &= (\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}) \\ \bar{S}_y &= (\tau_{yx}, \sigma_y, \tau_{yz}) \\ \bar{S}_z &= (\tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_z) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

若要表示一点处的应力状态，必须确定这三个矢量 ($\bar{S}_x, \bar{S}_y, \bar{S}_z$) 或者它们的六个独立分量。一点处的应力状态，或称应力张量，可写成下列表达式：

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} \quad (2.2)$$

2.2.2 平衡方程——二维问题

图 2-1 所示的一般微分体单元在应力矢量的作用下处于平衡状态。若只考虑该单元的俯视图，并且忽略与矢量 $\bar{S}_z$ 有关的各应力，使得二维应力状态，示如图 2-2。坐标轴 Z 垂直于此单元，即垂直于纸面。单元的厚度假定为单位长度。初始应力 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 和 τ_{yx} 作用在各正面上；而与这些面相距 dx 和 dy 的面上，作用有因所示外力而引起的应力增量变化。这种增量或微分应力可以应用泰勒级数〔1〕以偏导数的形式写出。级数通常写成下式：

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots \quad (2.3)$$

式中： $f(x)$ ——待求的函数；

$f(a)$ ——初始函数；

a ——初始函数 $f(a)$ 的坐标距离。

现在需要计算表达式 $\sigma_x + d\sigma_x$ 或 $f(x) = f(\sigma_x + d\sigma_x)$ ，而初始变量为 $f(a) = f(\sigma_x)$ ，示如图 2-3。由于 $f(a) = f(\sigma_x)$ 的值是在图 2-2 中微分单元的原点，其与 x 坐标轴的距离 a 为零。 $f(a)$ 的导数为：

$$\begin{aligned} f'(a) &= f'(\sigma_x) = \partial \sigma_x / \partial x \\ f''(a) &= f''(\sigma_x) = \partial^2 \sigma_x / \partial x^2 \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

把这些变量代入公式
(2.3), 得

$$f(\sigma_x + d\sigma_x) = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} \cdot \frac{dx^2}{2} + \dots$$

此处高阶项, 如 $(\partial^2 \sigma_x / \partial x^2) (dx^2/2)$ 可被略去, 因此, 应力 $\sigma_x + d\sigma_x$ 便等于 $\sigma_x + (\partial \sigma_x / \partial x) dx$ 。

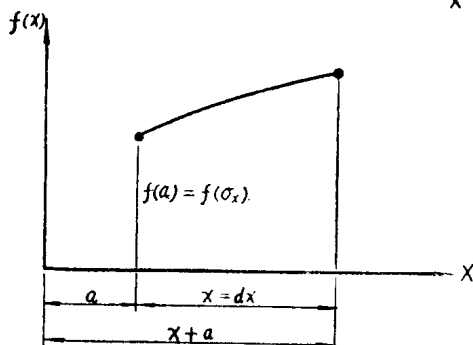


图2-3 函数 $f(\sigma_x)$ 的变化

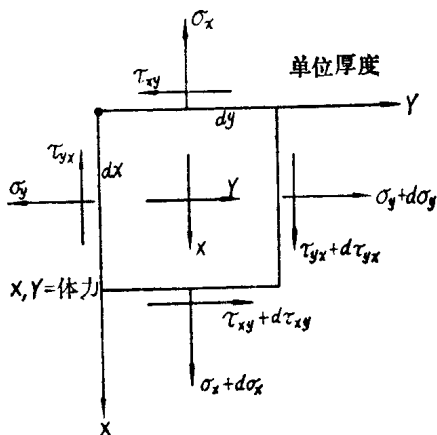


图2-2 平面应力单元

对于其它应力 σ_y , τ_{xy} , 和 τ_{yx} 也可得到类似的关系, 最后便得图2-4中所示的各应力。此外, 作用在微分单元上的还有体力 X , Y , 即单元的重量, 惯性力, 等等。

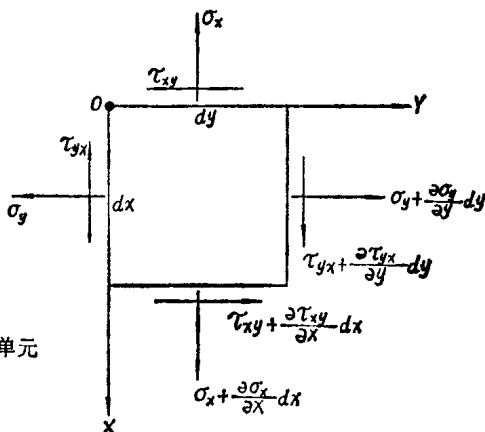


图2-4 平面应力微分单元