全日制十年制学校

初中数学第四册

教学参考书

人民教育出版社

全日制十年制学校初中数学第四册（试用本）

全日制十年制学校

初中数学第四册（试用本）

教学参考书

天津市教育教学研究室编

*

人民教育出版社出版

山西人民出版社重印

山西省新华书店发行

太原日报印刷厂印刷

*

开本787×1092 1/32　印张6.25　字数130,000

1979年6月第1版　1981年6月第3次印刷

印数149,301—205,300册

书号 K7012·0166　定价 0.44元

目　　录

第五章　一元二次方程

I. 目的要求

1. 使学生理解一元二次方程的意义和它的一般形式.要求学生能够熟练掌握一元二次方程的三种解法.

2. 使学生掌握一元二次方程的根与系数的关系式和根的判别式.

3. 使学生理解解方程和因式分解的关系,并能应用一元二次方程的求根公式分解二次三项式的因式.

4. 使学生掌握可化为一元二次方程的简单的高次方程、分式方程、根式方程和简单的二元二次方程组的解法.

5. 使学生会用列一元二次方程、分式方程和二元二次方程组的方法解决一些实际问题,不断提高学生分析问题和解决问题的能力;并注意结合实际问题的内容对学生进行政治思想教育.

II. 教材说明

本章内容是在学生掌握了一元一次方程、二元一次方程组和可以化为一元一次方程的分式方程的基础上学习的.一元二次方程又是学习特殊的高次方程、分式方程、根式方程和二元二次方程组的基础.在进一步学习代数、三角和解析几何时都经常用到它.因此一元二次方程的解法是本章的重点,必须使学生熟练地掌握它.

一元二次方程有三种解法．配方法很重要，因为它是公式法的基础，是一种基本的代数方法，如在求二次函数极值及解析几何中的坐标变换等内容里都要用到，所以需要学生熟练掌握；公式法应用范围广，用起来方便，也需要学生做到牢记公式、正确运用；因式分解法是教学中经常使用的方法，要求学生能较熟练地用它来解一些较简单的方程．

一元二次方程的根的判别式和根与系数的关系都是新的内容，这种类型的知识，学生还是第一次接触，会感到有困难．

应用题是重点，也是难点，各类题可以多练一些．要由简到繁，在练中具体培养学生分析问题和解决问题的能力．

本章教学时间约需 40 课时．具体分配如下（仅供参考）：

5.1	一元二次方程	约 1 课时
5.2	一元二次方程的解法（一）——因式分解法	约 1 课时
5.3	一元二次方程的解法（二）——配方法	约 2 课时
5.4	一元二次方程的解法（三）——公式法	约 2 课时
	解一元二次方程的综合练习	约 3 课时
5.5	一元二次方程的根的判别式	约 2 课时
5.6	一元二次方程的应用题	约 4 课时
5.7	一元二次方程的根与系数的关系	约 3 课时
5.8	二次三项式的因式分解	约 2 课时
5.9	简单的高次方程	约 2 课时
5.10	分式方程	约 5 课时
5.11	根式方程	约 3 课时

5.12	二元二次方程和二元二次方程组	约 2 课时
5.13	由一个二元一次方程和一个二元二次方程组成的方程组	
5.14	由两个二元二次方程组成的方程组	约 5 课时
	小结和复习	约 3 课时

一　一元二次方程

5.1　一元二次方程

教材用实际问题引出一元二次方程，说明生产的需要推动了科学的发展.

任何一个一元二次方程都可以化为一般形式

$$ax^2+bx+c=0,$$

即等式的左边是一个二次三项式，右边为零(学生往往忽略右边为零这一点). 一般形式很重要，解方程、求判别式以及利用根与系数的关系等，都必须先把方程化为一般形式再做. 必须让学生掌握它，即能熟练地把一元二次方程化为一般形式，而且能正确地求出 a, b, c 的值.

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$，只有当 $a\neq0$ 时，才叫二次方程；如果 $a=0, b\neq0$，就是一元一次方程了.

在例题和练习里可以补充下面几个文字系数的练习题.

把下列方程化成 x 的一元二次方程的一般形式，再写出二次项系数、一次项系数和常数项：

(1) $x(x-2a)=b^2-a^2$.

解： $x^2-2ax=b^2-a^2$ (展开).

$x^2-2ax+a^2-b^2=0$（整理为一般形式）.

∴ 二次项的系数是 1，

一次项的系数是 $-2a$，

常数项是 a^2-b^2.

（2） $x^2-2a(3x-2a+b)=b^2$.

解： $x^2-6ax+4a^2-2ab=b^2$.

$x^2-6ax+4a^2-2ab-b^2=0$.

∴ 二次项的系数是 1，

一次项的系数是 $-6a$，

常数项是 $4a^2-2ab-b^2$.

（3） $x(abx-a^2-b^2)=ab$.

解： $abx^2-(a^2+b^2)x-ab=0$.

∴ 二次项的系数是 ab，

一次项的系数是 $-(a^2+b^2)$，

常数项是 $-ab$.

5.2 一元二次方程的解法(一)——因式分解法

在第二册中学习过二次项系数是 1 的二次三项式的因式分解，本节就是在这个基础上来讲授一元二次方程的解法的. 一元二次方程的一般形式，其左端是一个二次三项式. 对某些方程，我们可以将它的左端分解成两个一次因式来解. 在讲授这一节时，学生不会感到很困难，但是要注意到因式分解法的基本思想是各种解法的基础，教师应当着重地向学生讲解清楚.

1. 用因式分解法解方程时，必须注意先把一元二次方程化为一般形式，即右边必须为零. 因式分解法关键的一点是

分别令方程左边的两个因式为零，得到两个一次方程，这两个一次方程的解都是原方程的解．教材中的例子中强调了要使 $(x-2)(x-3)=0$，必须并且只须 $x-2=0$ 或 $x-3=0$．这种说法隐含了"充要条件"的意思，教师应注意但不必向学生说明．它的原理是零乘任何数为零，而不是零的任何两个数相乘都不为零．同时还要注意，当代数式中的文字用具体数值代入时，代数式就是一个数，所以它们的乘积为零的规律和数的乘积为零的规律是相同的．教师务必在这些地方下功夫讲解清楚．对于 $(x-2)(x-3)=0$，这是两个因式的积为零．若有一个而且必须有一个因式为零，它们的积才是零．而且不论哪一个因式为零，它们的积都是零（若两个因式同时为零，当然它们的积也是零，但不需要两个因式同时为零．只要有一个因式为零即可．从本题来讲，$x-2$ 和 $x-3$ 不能同时为零，因为 x 不能等于 2 同时又等于 3）．因此得 $x-2=0$ 或 $x-3=0$．这样就把一元二次方程化成了两个一元一次方程．然后分别解这两个一元一次方程，得 $x_1=2, x_2=3$．如果解方程 $x^2-4x+4=0$，分解因式，得 $(x-2)^2=0$，那么当 $x=2$ 时，两个因式同时为零，这时，方程有两个相等的实数根 $x_1=x_2=2$．通过因式分解法也可以说明实系数的一元二次方程若有实数根一定有两个，而且只有两个，可以相等也可以不等．

2．这里解一元二次方程的方法是将一个二次方程化为两个一次方程来解，这种将高次方程转化为低次方程来解的方法，是以后解各种方程常用的一个基本方法．

3．课本附录里的"利用十字相乘法分解二次三项式的因式"，不必过分强调，如果要讲，可放在这里讲．讲完以后可以

作一些用“十字相乘法”在有理数集合内来解二次项系数不是1的一元二次方程的练习.

5.3 一元二次方程的解法(二)——配方法

教材是由特殊的例子逐渐引出一般的配方方法的，这种由已知到未知，由简到繁地讲解，比较直观，学生容易懂，印象深.

第6页的例1，解方程 $x^2-25=0$，可以用因式分解法，但也可以用方根的定义直接求方程的解. 即把常数项移到方程的右边，得 $x^2=25$，根据方根定义得 $x=\pm 5$. 这种解法适用于缺一次项的一元二次方程. 例2解方程 $(x-3)^2=2$，换元以后就和例1一样了. 不换元直接求 $x-3=\pm\sqrt{2}$，再求 x 也可以. 例3是解方程 $x^2-4x-3=0$. 这个方程的根不是有理数，因此不能用因式分解法，但又不缺一次项，怎么办？可以用配方的方法把它化为例2的形式.

根据公式 $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ 进行配方. 把方程 $x^2-4x-3=0$ 的常数项移到方程的右边，得 $x^2-4x=3$. 再对照 $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ 把它的两边都加上一次项系数的一半的平方即 $\left(\frac{-4}{2}\right)^2$. 这是配方法的关键. 务必理解 $(-2)^2$ 是怎样得出来的，而且要注意方程两边要同时加这个数. 对二次项的系数不是1的方程 $2x^2+5x-1=0$，可以把方程的两边同用2除，把二次项的系数先变成1，再按上面的例题求解. 当一次项的系数不是2的倍数时，学生容易出错，要多练一些. 经过配方后，如果方程右边的常数是负数，这个方程就没有实数根.

通过以上例题可以总结出配方法的步骤如下：

1. 把方程先化成首项系数是 1 的形式，然后通过移项整理成方程的左边仅有二次项和一次项，右边仅有常数项.

2. 把方程两边同加以一次项系数一半的平方，再把左边化成平方的形式.

3. 根据方根定义求方程的解.

配方法是一种基本方法，用处比较多. 这是第一次讲，必须讲透，让学生掌握它. 利用配方法导出公式后，解一元二次方程主要用公式法，不再用配方法来解. 配方法主要利用这一节的时间进行练习，要求学生能掌握配方法的基本思想.

【部分练习、习题提示及答案】

练习(第 5.2 节末)

3. (1) $x_1=0, x_2=-\frac{4}{5}$;

(2) $y_1=0, y_2=\frac{3\sqrt{2}}{2}$;

(3) $x_1=-3, x_2=-4$;

(4) $x_1=2, x_2=8$;

(5) $x_1=-5, x_2=2$;

(6) $x_1=10, x_2=-4$;

(7) $t_1=-7, t_2=4$;

(8) $x_1=-6, x_2=2$.

4. (1) $(y-1)(y-1+2y)=0$ (提取公因式).

$(y-1)(3y-1)=0$.

$\therefore \quad y_1=1, y_2=\frac{1}{3}$.

(2) $6(x+5)-x(x+5)=0$ (移项).

$(x+5)(6-x)=0$（提取公因式）.

$\therefore\quad x_1=-5, x_2=6.$

（注意：方程两边不能同用 $x+5$ 除.）

(3) $[(2y-1)+3][(2y-1)-3]=0$（分解因式）.

$4(y+1)(y-2)=0.$

$\therefore\quad y_1=-1, y_2=2.$

(4) $(3x+2)^2-4(x-3)^2=0$（移项）.

$(3x+2+2x-6)(3x+2-2x+6)=0$（分解因式）

$(5x-4)(x+8)=0.$

$\therefore\quad x_1=\frac{4}{5}, x_2=-8.$

练习（第 5.3 节末）

1. (1) $y=\pm\frac{3}{2}$；　(2) $x=\pm\frac{7}{4}$；　(3) $t=\pm3\sqrt{5}$；

(4) $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$；　(5) $x=-1\pm2\sqrt{3}$.

3. (1) $x^2-6x=-4$（把常数项移到方程右边）.

$x^2-6x+9=5$（把方程左边配成完全平方）.

$(x-3)^2=5.$

$x-3=\pm\sqrt{5}$（开方）.

$\therefore\quad x=3\pm\sqrt{5}.$

(2) $2t^2-7t=4$（把常数项移到右边）.

$t^2-\frac{7}{2}t=2$（使二次项的系数为 1）.

$t^2-\frac{7}{2}t+\left(\frac{7}{4}\right)^2=2+\frac{49}{16}$（把方程左边配成完全平方）.

$$\left(t-\frac{7}{4}\right)^2=\frac{81}{16}.$$

$$t-\frac{7}{4}=\pm\frac{9}{4}\ \text{（开方）}.$$

$$\therefore\quad t_1=4,\ t_2=-\frac{1}{2}.$$

（3）$3x^2-6x=1.$

$$x^2-2x=\frac{1}{3}.$$

$$x^2-2x+1=\frac{1}{3}+1.$$

$$(x-1)^2=\frac{4}{3}.$$

$$x-1=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\therefore\quad x=1\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

习题一

1. （1）$x_1=0, x_2=\frac{\sqrt{6}}{3}$；　（2）$x_1=0, x_2=\frac{1}{6}$；

（3）$y_1=-3, y_2=-\frac{3}{2}$；　（4）$t_1=0,\ t_2=9+4\sqrt{5}$.

2. （1）$x_1=-1, x_2=-6$；　（2）$x_1=1, x_2=6$；

（3）$x_1=-6, x_2=1$；　（4）$x_1=6, x_2=-1$.

3. （1）$x_1=-3, x_2=-9$；　（2）$y_1=2, y_2=15$；

（3）$x_1=-15, x_2=5$；　（4）$x_1=12, x_2=-5$.

4. （1）$y_1=20,\ \ y_2=-15$；

（2）$x_1=-9,\ \ x_2=8$；

(3) $x_1=8$, $x_2=-2$;

(4) $x_1=1, x_2=4$.

5. (1) $3y(y+2)-4(y+2)=0$.

$(y+2)(3y-4)=0$.

$\therefore \quad y_1=-2, y_2=\frac{4}{3}$.

(2) $(5x-1)[2(5x-1)-3]=0$.

$(5x-1)(10x-5)=0$.

$\therefore \quad x_1=\frac{1}{5}, x_2=\frac{1}{2}$.

6. (1) $[3(2x+3)+2(2x-5)]$

$\times[3(2x+3)-2(2x-5)]=0$.

$(10x-1)(2x+19)=0$.

$\therefore \quad x_1=\frac{1}{10}, x_2=-\frac{19}{2}$.

(2) $9(y+1)^2-4(y-1)^2=0$.

$[3(y+1)+2(y-1)][3(y+1)-2(y-1)]=0$.

$(5y+1)(y+5)=0$.

$\therefore \quad y_1=-\frac{1}{5}, y_2=-5$.

7. (1) $[(2y+1)+1][(2y+1)+2]=0$.

$2(y+1)(2y+3)=0$.

$\therefore \quad y_1=-1, \ y_2=-\frac{3}{2}$.

(2) $(x+5)^2-2(x+5)-8=0$.

$[(x+5)-4][(x+5)+2]=0$.

$(x+1)(x+7)=0.$

$\therefore \quad x_1=-1, \quad x_2=-7.$

8. (1) $x=\pm\frac{9}{7}$;

(2) $y=\pm 0.2$;

(3) $x=\pm\sqrt{3}$;

(4) $x=\pm 3\sqrt{2}$;

(5) $x=\frac{-1\pm\sqrt{2}}{3}$;

(6) $t=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

9. (1) $x^2+2x=99.$

$x^2+2x+1=100.$

$(x+1)^2=100.$

$x+1=\pm 10.$

$\therefore \quad x_1=9, \quad x_2=-11.$

(2) $y^2+5y=-2.$

$y^2+5y+\left(\frac{5}{2}\right)^2=-2+\frac{25}{4}.$

$\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{17}{4}.$

$\therefore \quad y=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}.$

(3) $3x^2-4x=1.$

$x^2-\frac{4}{3}x=\frac{1}{3}.$

$$x^2-\frac{4}{3}x+\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{3}+\frac{4}{9}.$$

$$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{7}{9}.$$

$$\therefore\quad x=\frac{2\pm\sqrt{7}}{3}.$$

(4) $2x^2+\sqrt{2}\,x=30.$

$$x^2+\frac{\sqrt{2}}{2}x=15.$$

$$x^2+\frac{\sqrt{2}}{2}x+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2=15+\frac{1}{8}.$$

$$\left(x+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2=\frac{121}{8}.$$

$$x=\frac{-\sqrt{2}\pm11\sqrt{2}}{4}.$$

$$\therefore\quad x_1=\frac{5}{2}\sqrt{2},\ x_2=-3\sqrt{2}.$$

10. (1) $x_1=0,\quad x_2=a-1;$

(2) $(x+a)^2-(2x-b)^2=0.$

$$(x+a+2x-b)(x+a-2x+b)=0.$$

$$(3x+a-b)(-x+a+b)=0.$$

$$\therefore\quad x_1=\frac{b-a}{3},\quad x_2=a+b.$$

(3) $x^2+2ax-3a^2=0.$

$$(x+3a)(x-a)=0.$$

$$\therefore\quad x_1=-3a,\quad x_2=a.$$

11. $x^2+px=-q.$

$$x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2=-q+\frac{p^2}{4}.$$

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2-4q}{4}.$$

$$\therefore\quad x=-\frac{p}{2}\pm\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}.$$

5.4 一元二次方程的解法(三)——公式法

用配方法可以解所有的二次方程，为什么还要学公式法呢？因为解一元二次方程，在一般情况下，代公式比配方简单.

用配方法导出一元二次方程的求根公式的过程是：根据一元二次方程的定义 $a\neq 0$，所以方程 $ax^2+bx+c=0$的两边可以用 a 除，得 $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$，配方得

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

当 $a>0$ 时，$\sqrt{4a^2}=2a$,

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\quad (b^2-4ac\geqslant 0);$$

当 $a<0$ 时，$\sqrt{4a^2}=-2a$,

$$x+\frac{b}{2a}=\mp\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\quad (b^2-4ac\geqslant 0).$$

$\therefore$ 无论 $a>0$ 或 $a<0$，$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

教材这样写

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

就是包括了这两种情况.

只有当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，方程才有实数解；当 $b^2-4ac<0$ 时，方程没有实数解. 例如解方程 $x^2+x+1=0$, 这时

$$b^2-4ac=1-4<0.$$

把方程变形，得 $x^2+x+\frac{1}{4}=-1+\frac{1}{4}$, $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{3}{4}$. 可以看出方程没有实数解. 不要笼统地说无解，因为它在复数集合内有解，只是没有实数解(这点不必向学生讲).

若 b 是偶数，方程可以写作 $ax^2+2b_1x+c=0$, 代公式，得

$$x=\frac{-2b_1\pm\sqrt{4b_1^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b_1\pm 2\sqrt{b_1^2-ac}}{2a}$$

$$=\frac{-b_1\pm\sqrt{b_1^2-ac}}{a};$$

当 $a=1$ 时，二次方程的一般形式是 $x^2+px+q=0$, $\therefore\ x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$. 这两个都可以作为简化公式用. 但公式太多了，不好记，不必介绍给学生.

必须多补充一些代公式的题目，使学生不仅会代公式而且能代得对，算得又准又快. 必须强调二次方程化为一般形式后，才能代公式，代公式时特别要注意系数的正负号.

解题时最好把 b^2-4ac 先求出来，可以简化运算过程. 尤其是当系数的值比较大时更简便. 学完判别式以后，就可以先判别有没有实数根，若没有实数根就可以不解方程了.

第 13 页的例 4 是解关于字母系数的一元二次方程. 这个例题对逐步提高学生的解题能力有好处. 这个题也可以用因式分解法作，写在下面供老师参考.