高等财经院校试用教材(二)

线性代数

朱幼文　主编
刘序球　主审

同济大学出版社

高等财经院校试用教材

（二）

线性代数

罗万钧　赵可培
冯国光　朱幼文　编著

同济大学出版社

内 容 提 要

本书是由部分高等财经院校组织编写的经济应用数学基础教材之一。

本书内容包括：行列式、矩阵、向量、线性方程组、特征值和二次型、线性空间和线性变换、投入产出数学模型等七章，每章后附有习题、书末有习题答案和提示。

本书内容由浅入深、联系实际、简明扼要通俗易懂，适合于财经院校或工科院校经济管理专业学生作为教材使用，也可作为经济管理人员的自学用书。

责任编辑　李炳钊
封面设计　李志云

线 性 代 数

罗万钧　赵可培　冯国光　朱幼文　编著

同济大学出版社出版
（上海四平路1239号）
新华书店上海发行所发行
靖江县文教印刷厂印刷

开本：850×1168 1/32　印张：10.625　字数：306千字
1988年8月第1版　1988年8月第1次印刷
印数：1－12000　定价：3.50元
ISBN 7-5608-0150-1/O·24
科技新书目 177－293

前　言

在全国财经院校经济数学学会的关心和支持下，上海财经大学、东北财经大学、江西财经学院、山东经济学院、西安统计学院、上海第二工业大学、天津大学、大连理工大学管理学院等十几所院校（系）联合组织编写出版经济数学系列教材包括《高等数学》《线性代数》《概率论与数理统计》和《运筹学》。

本系列教材以财政部颁发的《高等财经院校教学大纲》为主要依据，在编写过程中，考虑到了经济、管理专业学生的特点，财经数学教学的实践，后继经济数量分析课程和财经教育今后发展的需要，对教材内容作了认真的精选，叙述上力求简明扼要、通俗易懂、便于自学；内容上由浅入深、联系实践、兼顾发展。本书可作为高等财经院校或工科院校经济管理专业的教材或教学参考用书，也可作为经济管理人员的自学用书。

本书是系列教材之一，内容包括：行列式、矩阵、向量、线性方程组，特征值和二次型，线性空间和线性变换，投入产出数学模型等七章，每章后附有习题、书末附有习题答案或提示。

本书由朱幼文主编。刘序球主审。参加本书编写的有赵可培、罗万钧、冯国光、朱幼文。

限于编者水平，书中定有错误和不当之处，恳请同行及读者批评指正。

编者　1988年3月

目　录

前　言

第一章　行列式……（1）

§1　数域……（1）

§2　行列式的概念……（3）

§3　行列式的性质与展开……（17）

§4　克莱姆法则……（32）

习题一……（37）

第二章　矩阵……（42）

§1　矩阵的概念……（42）

§2　矩阵的运算……（44）

§3　逆阵及其求法……（63）

§4　矩阵的初等变换……（75）

§5　分块矩阵……（90）

习题二……（101）

第三章　向量……（110）

§1　向量及其运算……（110）

§2　向量间的线性关系……（116）

§3　矩阵的秩……（134）

§4　向量空间……（145）

习题三……（148）

第四章　线性方程组……（153）

§1　线性方程组的相容性和解的判定……（153）

§2　齐次线性方程组……（163）

§3　非齐次线性方程组……（175）

§ 4　线性方程组的数值解法……………………………(180)
习题四……………………………………………(197)
第五章　特征值和二次型…………………………(200)
§ 1　向量的内积、正交……………………………(200)
§ 2　特征值与特征向量……………………………(206)
§ 3　实对称矩阵的对角化…………………………(215)
§ 4　二次型…………………………………………(227)
习题五……………………………………………(244)
第六章　线性空间与线性变换……………………(248)
§ 1　线性空间的定义和性质………………………(248)
§ 2　线性空间的维数、基与坐标…………………(252)
§ 3　线性变换………………………………………(261)
§ 4　线性变换的矩阵………………………………(267)
习题六……………………………………………(276)
第七章　投入产出数学模型………………………(282)
§ 1　投入产出综合平衡模型的结构和基本方程……(283)
§ 2　直接消耗系数和完全消耗系数………………(288)
§ 3　投入产出模型在企业的应用…………………(305)
习题七……………………………………………(314)
习题答案与提示……………………………………(317)

第一章 行列式

行列式是线性代数的基本概念，它是研究线性方程组解法和讨论矩阵性质的重要工具。

本章先简述数域的概念，再从二阶和三阶行列式出发来引出 n 阶行列式的定义、性质和计算方法，并介绍利用行列式求解线性方程组的克莱姆法则。

§1 数 域

数是数学的一个最基本的概念。数的概念经历了一个漫长发展的过程，由自然数到整数、有理数，然后是实数，再到复数。这个过程反映了人们对客观世界的认识的不断深化。

按照所研究对象的实际，我们常常需要明确规定所考虑的数的范围。例如，方程 $x^2-5=0$ 在有理数范围内没有根，而在实数范围内有根 $\pm\sqrt{5}$。又如，任意两个整数的商不一定是整数，即在整数范围内除法不是普遍可以运算的，而在有理数范围内，只要除数不为 0，除法总是可以运算的。因此，在数的不同范围内同一问题的回答可能是相异的。我们经常遇到的有理数集、实数集以及复数集，尽管它们具有一些不同的性质，但都有一个共同的性质，就是在每个数集中任意两个数的和、差、积、商（分母不为 0）仍在该数集中。关于数的加、减、乘、除等运算的性质通常称为数的代数性质。当然，有些数集也具有与有理数集、实数集、复数集相同的代数性质，为了在讨论中能把它们统一起来，我们引入以下定义：

定义 1 设 P 是至少包含一个不为 0 的数的数集。如果对

于P中任意二个数α、β，恒有$\alpha+\beta\in P$，$\alpha-\beta\in P$，$\alpha\cdot\beta\in P$，并且当$\beta\neq 0$时还有$\frac{\alpha}{\beta}\in P$，那么$P$就称为一个**数域**。

显然，有理数集、实数集和复数集都是数域，它们分别叫做有理数域、实数域和复数域。而整数集就不是数域，因为任意两个整数的商并不都是整数。

例 1 令P是由所有形如$a+b\sqrt{2}$（a，b为有理数）的数所组成的数集，则P是数域。

证 显然，当取$a=1$，$b=0$时，1就在P中，故P中至少含有一个不为0的数。

设$\alpha=a_1+b_1\sqrt{2}$，$\beta=a_2+b_2\sqrt{2}\in P$，那么

$$\alpha+\beta=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{2}$$

因为a_1、a_2、b_1、b_2都是有理数，所以a_1+a_2，b_1+b_2也是有理数，故$(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{2}\in P$

同理

$$\alpha-\beta=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)\sqrt{2}\in P,$$

$$\alpha\cdot\beta=(a_1+b_1\sqrt{2})(a_2+b_2\sqrt{2})$$

$$=(a_1a_2+2b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\sqrt{2}\in P.$$

设$\beta=a_2+b_2\sqrt{2}\neq 0$，那么$a_2-b_2\sqrt{2}\neq 0$，如果$a_2-b_2\sqrt{2}=0$，有$a_2=b_2\sqrt{2}$。若$b_2=0$，则$a_2=0$，与$a_2+b_2\sqrt{2}\neq 0$矛盾；若$b_2\neq 0$，则有$\frac{a_2}{b_2}=\sqrt{2}$也与$\beta=a_2+b_2\sqrt{2}\neq 0$矛盾。于是

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{a_1+b_1\sqrt{2}}{a_2+b_2\sqrt{2}}=\frac{(a_1+b_1\sqrt{2})(a_2-b_2\sqrt{2})}{(a_2+b_2\sqrt{2})(a_2-b_2\sqrt{2})}$$

$$=\frac{(a_1a_2-2b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)\sqrt{2}}{a_2^2-2b_2^2}$$

$$= \frac{a_1a_2-2b_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}\sqrt{2}\in P.$$

因为$\frac{a_1a_2-2b_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}$与$\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}$都是有理数，所以$P$是一个数域。

命题　任何一个数域P必含0与1。

证　P是一个数域，那么P中至少有一个不为0的数a，而$\frac{a}{a}=1\in P$。另外$a-a=0\in P$。证毕。

例2　任何两个奇数的乘积仍是奇数，但它们的和、差就不是奇数，因此奇数集就不是数域。

数域有一个重要性质：任何数域都包含有理数域，即有理数域是一个最小的数域。这个结论请读者自证。

以后所用到的数都是取自一个固定数域P中的数。

§2　行列式的概念

一、二阶和三阶行列式

设二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \qquad (1-1)$$

对(1-1)作加减运算，若$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，则得该方程组的解为：

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2-b_1a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases} \qquad (1-2)$$

(1-2)式就是一般二元线性方程组(1-1)的解的公式。

但（1－2）式很不容易记忆，应用时也不方便，因而有必要引进新的符号来表示这个结果，这就是行列式的起源。我们看到 x_1、x_2的表达式里分母都是

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

而x_j（$j=1,2$）的表达式的分子是从上式中将x_j的系数a_{1j}、a_{2j}分别用b_1、b_2代替所成。因此，只要把分母的结构弄清楚了，x_1、x_2的表达式的结构也就显而易见了。

定义 1 代数和$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$叫做二阶行列式，记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1-3}$$

这样，（1－2）式就可以表为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \\ x_2=\dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \end{cases} \tag{1-4}$$

二阶行列式含有两行、两列。横写的称行，竖写的称列。行列式中的数又叫做行列式的元，a_{21}就是第二行、第一列上的元。二阶行列式是这样两项的代数和：一项是在从左上角到右下角的对角线（又称为行列式的主对角线）上两个元的乘积，取正号；另一项是在从右上角到左上角的对角线（又称为行列式的次对角线）上两个元的乘积，取负号。代数和$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$通常也被称为二阶行列式的展开式，其计算的结果是一个数，称为行列式的值。

式（1－4）中居分母地位的行列式是由方程组（1－1）的未知量的系数按原来的相对位置排列而成的，称为该方程组的

系数行列式。x_1的分子是用常数项b_1、b_2分别代替系数行列式中x_1的系数a_{11}、a_{21}以后所构成的行列式；x_2的分子是用常数项b_1、b_2分别代替系数行列式中x_2的系数a_{12}、a_{22}以后所构成的行列式。象这样用行列式来表示方程组的解，形状简便，记忆容易。

例3　解线性方程组

$$\begin{cases} 2x+3y=13 \\ 5x-4y=-2 \end{cases}$$

解　因为

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -8-15=-23\neq 0$$

所以得

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 13 & 3 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}}=\frac{-52+6}{-23}=2$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}}=\frac{-4-65}{-23}=3$$

设三元线性组方程

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \qquad (1-5)$$

在（1－5）中用$a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}$乘第一个方程组的两边，用$a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33}$乘第二个方程的两边，再用$a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}$乘第三个方程的两边，然后把它们相加起来，这时$x_2$和$x_3$的系数都等于0，于是得到

$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32} \\ -a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_1$$

$$=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{31}b_3+a_{13}b_2a_{32}$$
$$-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3$$

当x_1的系数

$$D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq 0$$

时，解得

$$x_1=\frac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{31}b_3+\cdots\cdots-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+\cdots\cdots-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}$$

同理，可以得x_2，x_3，

从而有

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{D}(b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{31}b_3+a_{13}b_2a_{32} \\ \qquad -b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3) \\ x_2=\dfrac{1}{D}(a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3 \\ \qquad -a_{13}b_2a_{31}-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}) \\ x_3=\dfrac{1}{D}(a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{22}a_{32} \\ \qquad -b_1a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}b_3-a_{11}b_2a_{32}) \end{cases} \quad (1-6)$$

（1－6）式就是一般三元线性方程组(1－5)的解的公式。我们看到x_1、x_2、x_3的表达式里分母都是D，而$x_j(j=1、2、3)$的表达式的分子是从D中将x_j的系数a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}分别用b_1，b_2，b_3代替而成，因此，只要把分母的结构弄清楚了，那么x_1、x_2、x_3的表达式的结构也就搞清楚了。为了便于记忆，我们引进三阶行列式。

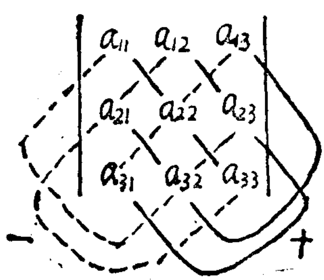
定义3　代数和$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$称为三阶行列式，记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{aligned} &=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ &-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

（1－7）

三阶行列式含有三行、三列，其中的数$a_{ij}(i,j=1,2,3)$称为三阶行列式第i行第j列的元，等式右边的式子称为它的展开式。

三阶行列式似乎比较复杂，但仔细分析一下可以看出它的各个项的组成具有一定的规律性，就是所谓的对角线法则。我们把左上角元与右下角元所联成的对角线称为主对角线，而把右上角元与左下角元所联成的对角线称为次对角线，在三阶行列式的展开式六个项中，含有正号的三项里有一项是主对角线上三个元的乘积，其它两项是位于主对角线的平行线上的两个元与距该直线最远的元之积；含有负号的三项里，有一项是次对角线上三个元的乘积，其余两项是位于次对角线的平行线上的两个元与距该直线最远的元之积。下图中，位于实线上的三个元之积取正号，位于虚线上的三个元之积取负号。



在三元线性方程组的解（1－6）中，分母均为行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

在D中，先以方程组的常数项b_1、b_2、b_3分别代替系数行列式D中x_1或x_2或x_3的系数（D中的第1,2,3列）得到行列式D_1、D_2、D_3，即

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32} \\ -b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3 \\ -a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32} \\ -a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}$$

显然，D_1、D_2、D_3正好就是x_1、x_2、x_3的表达式的分子，当$D\neq 0$时，线性方程组（1－5）的解可表达为十分简洁的形式

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}. \qquad (1-8)$$

例3 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x-4y+z=1 \\ -3x+y+5z=0 \\ x-y+z=2 \end{cases}$$

解 方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=2\cdot1\cdot1+(-4)\cdot5\cdot1+1\cdot(-3)\cdot(-1) \\ -1\cdot1\cdot1-(-4)\cdot(-3)\cdot1-2\cdot5\cdot(-1)$$

$$=-18\neq 0$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-36,\quad D_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-18,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-18;$$

于是得方程组的解

$$x=\frac{D_1}{D}=\frac{-36}{-18}=2,\quad y=\frac{D_2}{D}=\frac{-18}{-18}=1,$$

$$z=\frac{D_3}{D}=\frac{-18}{-18}=1.$$

二、n阶行列式

读者已经熟悉了二阶和三阶行列式，现在我们以此为基础，定义n阶行列式。

为了讨论问题方便，我们补充定义一阶行列式为

$$\left|\,a_{11}\,\right|=a_{11} \tag{1-9}$$

注意：一阶行列式$|\,a_{11}\,|$等于a_{11}自身，其值可正可负，所以上面的记号不是绝对值符号。二阶、三阶行列式可以表述如下：

二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=a_{11}|\,a_{22}\,|-a_{12}|\,a_{21}\,|$$

它的规律是：把此行列式的第一行的各元乘以划去该元所在的行和列后剩下的一阶行列式，然后在各乘积前面冠以正负相间的符号，最后求其代数和。

三阶行列式

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad -a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}) \\ &\quad +a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &\quad +a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\end{aligned}$$

它的规律是：把该行列式的第一行诸元乘以划去该元所在的行和列后剩下的二阶行列式，前面再冠以正、负相间的符号，最后再求它们的代数和。

由于上述行列式的表达式的每一项都以行列式第一行的一个元为其因子，因此我们称此行列式是按第一行展开的。

根据上面的分析，我们可以按照上述规律用一阶行列式来定义二阶行列式，用二阶行列式来定义三阶行列式，运用这个规律，我们定义四阶行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

反复运用这个规律，可以定义 $n-1$ 阶行列式，这样，我们在已知二阶，三阶，……，$n-1$ 阶行列式的基础上从而定义并计算 n 阶行列式，这种定义的方法称为**递归定义法**。

定义 4　一阶行列式定义为

$$|\, a_{11} \,| = a_{11}$$

设 $n-1$ 阶行列式已经定义，则 n 阶行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+(-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3\,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n\,n-1} \end{vmatrix} \tag{1-10}$$

上式左端的行列式常记为D。

n阶行列式有n行n列，共有n^2个元，元a_{11}，a_{22}，…a_{nn}称为行列式的主对角元，它们所在的直线称为主对角线。

由n阶行列式的定义．利用数学归纳法不难证明：

（1） n阶行列式有$n!$个项；

（2） n阶行列式每一项的形式为

$$\pm a_{1j_1}\cdot a_{2j_2}\cdot\cdots a_{nj_n} \tag{1-11}$$

其中j_1、j_2，…、j_n是1，2，…，n的一种排列。由于a_{ij}是行列式中对应第i行第j列的元，（1－11）给出的乘积是D中属于不同行不同列的n个元的乘积。

作为(2)的一个应用：如果行列式的某一行（或一列）的元全为零，由于每一项中包含这一行(或一列)的元作为因子，所以该行列式的值为零。

为了叙述和表达的方便，我们引进余子式和代数余子式的概念。

把n阶行列式中某一元a_{ij}所在的第i行和第j列的元划去后，所剩下的元按原来次序所构成的$n-1$阶行列式称为a_{ij}的**余子式**（简称子式），记为M_{ij}；a_{ij}的余子式M_{ij}乘上$(-1)^{i+j}$后称为a_{ij}的**代数余子式**，记为A_{ij}，即：

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

例如，行列式