高等学校教学用書

濾流理論

下册

B. И. 阿拉文
C. H. 努美罗夫 著

高等教育出版社

高等学校教学用書

滤流理論

下册

В. И. 阿拉文
С. Н. 努美罗夫 著
王仁东 譯

高等教育出版社

本書系根据苏联国立技术理論書籍出版社（Гостехиздат）出版的阿拉文（В. И. Аравин）和努美罗夫（С. Н. Нумеров）合著的“液体和气体在不变形多孔介質內流动的理論”（Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде）1953年版譯出。原書在序言中也把这个理論叫作“滤流理論”（Теория фильтрации），因此，中譯本为了簡便起見，就采用了“滤流理論”这个書名。原書經苏联文化部审定为高等工业学校教学参考書。

本書中譯本分上下两册出版。下册內容首先繼續上册关于理論的發展，叙述比較新穎的边界問題解法，有很大普遍性的平面問題和不定常滤流問題的解法。最后三章講解关于滤流的近似解法、电模拟法、实驗室解法和現場解法，这些解法也有实际意义。

本書可供高等工业学校师生及滤流理論的研究工作者参考。

滤　流　理　論

下　册

В. И. 阿拉文等著

王仁东譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号

（北京市书刊出版业营业許可証出字第054号）

上海大东集成联合印刷厂印刷　新华书店发行

統一书号 13010·567　开本 850×1168 1/32　印張 11 4/16

字數 267,000　印數 1—4,000　定价（4）￥1.30

1959年4月第1版　1959年4月上海第1次印刷

下 册 目 录

第八章 边界問題方法

§74. 边界問題方法 在第5—7章里面，我們曾研討了不可压縮性重流体的二維定常滤流問題的解法，那是根据把一个复变数区域保角变换到另一个复变数区域的，所以我們称为保角变换法。我們还来研究解上述問題的一个方法，此法原則上和保角变换法不同，而是根据把滤流問題归結到对数位势理論的李曼-吉尔培脫問題(特别是狄义赫利問題)的。我們以后称它为边界問題方法。

边界問題方法首先由 C. H. 努美罗夫在著作[1]① 里面研究过，而在他以后的著作[5, 6, 12]里面，又得到进一步的發展。

直接应用边界問題方法时，需要已知滤流区 z，或滤流的折算复数位势区 ω_r，或茹可夫斯基函数区 $w_ж=z-i\omega_r$。因为把滤流問題归結到李曼-吉尔培脫問題的方法，是决定于上面所列举的区域中，那一个是預先知道的，所以下面要分别研究三种归結情况，相应于三种預先知道的区域的形狀。

如果滤流区 z 是已知的，則这个区的边界只可由透水性和不透水段落以及土壤水的透湿段落所組成。我們取滤流区各点的复数坐标 z 作为独立变数，而取滤流的折算复数位势 ω_r 作为未知的函数。这时注意：在透水性段落上，$\varphi_r=$常数，在不透水段落上 $\psi_r=$常数，而在透湿段落上，$\varphi_r=y$(参閱§40)，我們就作出結論，在滤流区 z 的全部边界上，函数 ω_r 的实数部分或虚数部分的系数是已知的。所以对于函数 ω_r，我們有 z 区中的李曼-吉尔培脫問

① 此篇著作曾提出發表于 Известия НИИГ, 1936 年春季号。

題。

如果滤流的折算复数位势区 ω_r 是已知的，則滤流区的边界，只可由透水性和不透水段落以及在土壤水的自由表面上沒有透吸或蒸發的浸潤曲綫所組成。我們取滤流的复数位勢 ω_r 作为独立变数，而取滤流区各点的复数坐标 z 或茹可夫斯基函数 $w_{ж}$ 作为未知函数。例如以变数 z 作为未知函数，而假定滤流区边界的透水性和不透水段落是曲折直綫，則由于明显的几何条件，我們得到，在曲折綫的第 n 个节段上，

$$a_n x + b_n y + c_n = 0,$$

这里 a_n, b_n, c_n 都是实常数。又在浸潤曲綫上有着 $y=\varphi_r$。从这里得知，在 ω_r 区的全部边界上，应已知函数 z 的实数部分和虛数部分的系数間的綫性比值①（有着常系数）。所以对于函数 z，我們也有着 ω_r 区中的李曼-吉尔培脫問題。当未知的函数是茹可夫斯基函数 $w_{ж}$ 时，情况是类似的。

如果已知茹可夫斯基函数 $w_{ж}$ 的区域，則滤流区的边界只可以由水平的透水性段落，鉛直的不透水段落和透湿段落，以及有土壤水的透吸或蒸發的浸潤曲綫所組成。我們取 $w_{ж}$ 作为独立变数，而以滤流的折算复数位势 ω_r 作为未知的函数。則在透水性段落上，$\varphi_r=$常数，在不透水段落上，$\psi_r=$常数，在透湿段落上 $\psi_r=$ $=u_{ж}+$常数。在浸潤曲綫上，我們有着两个条件（参閱 § 40）：ψ_r+ $+x=u_{ж}$ 和 $\psi_r+\varepsilon_r x=$常数。从上面两表达式中消除了 x，我們找到在浸潤曲綫上：

$$\psi_r=\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r-1}u_{ж}+\text{常数}^{②}。$$

从这里可知道，在 $w_{ж}$ 区域的全部边界上，应該已知函数 ω_r 的实

① 有一特例是已知上述两部分中的一部分。

② 在浸潤曲綫各个段落上的透吸或蒸發强度 ε_r 可以是不同的。

数部分或虚数部分的系数。这样，对于函数 ω_r，我們又有着在 $w_{ж}$ 区中的李曼-吉尔培脫問題。

这样，不管預先知道的是濾流区，或濾流的折算复数位势区，或茹可夫斯基函数区，对于未知的函数，我們总有着李曼-吉尔培脫問題（特别是狄义赫利問題）。为了解出上項問題，需要作出从独立变数区到輔助半平面的保角映射。則对于未知函数將有半平面中的李曼-吉尔培脫問題。此項問題的解案可以按照 M. B. 凱尔弟希和 Л. И. 西道夫的公式来得到。因为独立变数和未知函数都是以輔助半平面上的点的坐标来表出的，所以濾流問題的解案，在一般情况中，是以參数形式来确定的。

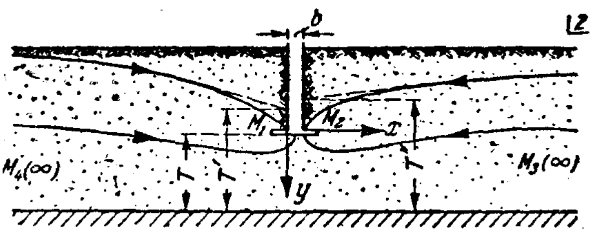
像在保角变換方法的情况中一样，如果使用了“半逆映射”的研究方法，边界問題方法的应用范圍可以大大地推广。如果知道了濾流的折算复数位势区，作这样的研究时，濾流区边界的透水性和不透水段落可被給出任意的形状。作为前提的是，在这些段落上，x 或 y 的值，或更普遍些，这两个量值的綫性組合是已知的函数。在已知茹可夫斯基函数区的情况下，則可以对透湿段落要求这样的前提，就是在此段落上，只要求 φ_r，或 ψ_r，或这些量值的綫性組合是已知的函数。

在結束时可指出，如果变数 z，ω_r 和 $w_{ж}$ 的区域沒有一个是預先知道的，那末可以应用边界問題方法的几种变态形式。边界問題方法的这样的应用要在下面 § 77 里面提出。在这情况中，边界問題方法显得不很有效，因为会归結到有着正常的或孤立的核心的福兰特荷尔姆型第二种綫性积分方程式，或归結到这样的方程式組。

§ 75. H. E. 茹可夫斯基的水平排水窄沟 作为說明边界問題方法的第一个例子，我們来討論 C. H. 努美罗夫 [10] 所研究过的，在匀質透水性土壤層里面向着 H. E. 茹可夫斯基水平排水窄

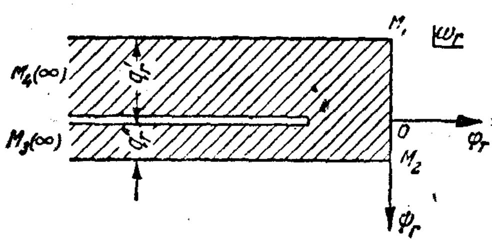
沟的滤流情况(在一般情况中,滤流是不对称的),这里匀質透水性土壤層的厚度是有限的,它的下面垫有一个具有上方水平表面的隔水層。此項情况和在§55里所詳細研究过的情况,同样是向着H. E. 茹可夫斯基水平排水窄沟的滤流的計算的基本情况之一。

所要研究的情况如第174圖所示。



第174圖。

我們来确定滤流的折算复数位势区 ω_r。取排水窄沟的平面作为水头的基准平面。则在窄沟的周緣(M_1M_2), $\varphi_r=-h=0$。隔水層的边界(M_4M_3)是一个流綫。在这个綫上,我們取 $\psi_r=0$。则在浸潤曲綫的左支 M_4M_1 上,取 $\psi_r=-q_r'$,这里 q_r' 是由左方进入排水

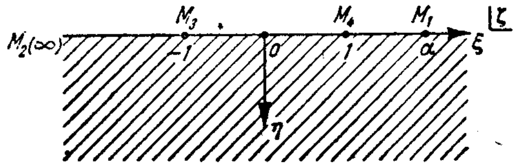


第175圖。

窄沟的折算滤流流量。和上面相类似,在浸潤曲綫的右支 M_2M_3 上,取 $\psi_r=q_r''$,这里 q_r'' 是由右方进入排水窄沟的折算滤流流量。显然,排水窄沟的折算滤流总流量是 $q_r=q_r'+q_r''$。从这里可知道,滤流的折算复数位势区有着如第175圖所示的形状。

我們作出 ω_r 的区域到第176圖所示的輔助半平面 ζ 的保角映射。我們找到:

$$\omega_r=-\frac{2}{\pi}q_r'\,\mathrm{arth}\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha-\zeta}}-\frac{2}{\pi}q_r''\,\mathrm{arth}\sqrt{\frac{\alpha-\zeta}{1+\alpha}},\qquad(8.1)$$



第 176 圖。

这里 α 是一个要在下面确定的未知常数。

我們来研討茹可夫斯基函数 $w_{ж}=z-i\omega_r$。函数 $w_{ж}$ 在半平面 ζ 里面是解析的。我們来确定，这个函数在半平面 ζ 的实数軸的各个段落上要滿足怎样的条件。半平面 ζ 的实数軸上的 M_2M_3 和 $M_4M_1M_2$ 两段落，相应于浸潤曲綫和排水窄沟的周綠，在那里 $p=p_a$，因此 $v_{ж}=y-\varphi_r=\dfrac{p-p_a}{\gamma}=0$。段落 M_3M_4，相应于隔水層的边界，在那里 $y=T$，因此

$$v_{ж}=T-\varphi_r=T+\frac{2}{\pi}q_r'\operatorname{arth}\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha-\xi}}+\frac{2}{\pi}q_r''\operatorname{arth}\sqrt{\frac{\alpha-\xi}{1+\alpha}}。$$

从这里我們得知，在半平面 ζ 的实数軸上，函数 $w_{ж}(\zeta)$ 应該滿足条件如下：

$$\text{如果}-\infty<\xi<-1\text{ 和 }1<\xi<\infty,\ v_{ж}(\xi)=0, \tag{8.2}$$

$$\text{如果}-1\leqslant\xi\leqslant 1,\ v_{ж}(\xi)=T+\frac{2}{\pi}q_r'\operatorname{arth}\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha-\xi}}+$$
$$+\frac{2}{\pi}q_r''\operatorname{arth}\sqrt{\frac{\alpha-\xi}{1+\alpha}}。$$

这样，对于函数 $w_{ж}$，我們遇着半平面 ζ 中的狄义赫利問題，而且这个函数的虛数部分在半平面 ζ 的实数軸上，是以关系式(8.2)来确定的。

这个問題的解案，可以下列哥希型积分[①]来表出：

$$w_{ж}(\zeta)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{v_{ж}(t)}{t-\zeta}dt+C, \tag{8.3}$$

① 参閱附录 VI。

这里C是下文所确定的某一实常数，而函数$v_ж(t)$是以关系式(8.2)表出的。

在M_2点上，$\zeta=\infty$而$w_ж=b+q_r''$。从这里，由于(8.3)式，知$C=b+q_r''$。在(8.3)式里面，代入常数C和函数$v_ж(t)$的表达式，我們找到：

$$w_ж=z-i\omega_r=b+q_r''+\frac{1}{\pi}T\ln\frac{1-\zeta}{-1-\zeta}+\frac{2}{\pi^2}q_r'\int_{-1}^{1}\frac{\operatorname{arth}\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha-t}}}{t-\zeta}dt+$$

$$+\frac{2}{\pi^2}q_r''\int_{-1}^{1}\frac{\operatorname{arth}\sqrt{\frac{\alpha-t}{1+\alpha}}}{t-\zeta}dt。\tag{8.4}$$

表达式(8.1)和(8.4)确定了所研究的問題的参数解案[①]。

在上面找到的解案里面，含有一个未知常数α。在确定这个常数的时候，我們注意：在M_1点上，$\zeta=\alpha$而$w_ж=-q_r'$。則由于(8.4)式，

$$b-\frac{2}{\pi}T\operatorname{arth}\alpha+q_r'\left(1-\frac{2}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\frac{\operatorname{arth}\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha-t}}}{\alpha-t}dt\right)+$$

$$+q_r''\left(1-\frac{2}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\frac{\operatorname{arth}\sqrt{\frac{\alpha-t}{\alpha+1}}}{\alpha-t}dt\right)=0。\tag{8.5}$$

方程式(8.5)里面的积分，可以表出为更簡單的形式。为此对方程式(8.5)里面的第一个积分引入新的积分变数$\tau=\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha-t}}$。則我們得到：

$$\int_{-1}^{1}\frac{\operatorname{arth}\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha-t}}}{\alpha-t}dt=\int_{a}^{1}\frac{1}{\tau}\ln\frac{1+\tau}{1-\tau}d\tau=\frac{\pi^2}{4}-\int_{0}^{a}\frac{1}{\tau}\ln\frac{1+\tau}{1-\tau}d\tau,$$

① 参数是变数ζ。

这里，

$$a=\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}\quad(0\leqslant a\leqslant 1)①,$$

由于和前面类似的推理，我們找到方程式(8.5)的第二个积分有同样的表达式。故知这个方程式的两个积分是重合的。則方程式(8.5)可取下列較簡單的形式：

$$-\frac{2}{\pi}\ln a-\frac{q_r}{T}\left[\frac{1}{2}+f(a)\right]=\frac{b}{T},\tag{8.6}$$

而且

$$f(a)=\frac{2}{\pi^2}\int_0^a\frac{1}{\tau}\ln\frac{1+\tau}{1-\tau}d\tau。$$

$f(a)$是一个函数，它的数值列在附录 I 的表里面。如果量值 q_r 是已知的，則按方程式 (8.6)，可以确定未知的常数 a，又可以确定未知的常数 α，

$$\alpha=\frac{1+a^2}{1-a^2}。\tag{8.7}$$

我們要注意，如果量值 a 趋近于零，則 $f(a)\approx 0$，而由于(8.6)式，

$$a\approx e^{-\frac{\pi(2b+q_r)}{4T}}。\tag{8.6'}$$

如果量值 a 趋近于一，則 $\ln a\approx a-1$，$f(a)\approx\frac{1}{2}$，而

$$a\approx 1-\frac{\pi(b+q_r)}{2T}。\tag{8.6''}$$

如果排水窄沟的內部寬度 $b=0$，則方程式(8.6)取着形式：

$$\frac{q_r}{T}=\frac{-4\ln a}{\pi[1+2f(a)]}。\tag{8.6'''}$$

从这里可知道，在 $b=0$ 的情况中，量值 a 是一个变数 $\frac{q_r}{T}$ 的函数。

我們来找浸潤曲綫的左支和右支的方程式。

---

① 注意，$\int_0^1\frac{1}{\tau}\ln\frac{1+\tau}{1-\tau}d\tau=\frac{\pi^2}{4}$（参閱附录 I）。

在浸潤曲綫的左支 (M_4M_1) 上，$\zeta=\xi(1\leqslant\xi\leqslant\alpha)$，$\omega_r=y-iq'_r$ 而 $w_{\text{ж}}=x-q'_r$。从这里，由于(8.1)和(8.4)式，在这个支上，

$$\left.\begin{aligned}
y&=-\frac{2}{\pi}q'_r\operatorname{arth}\sqrt{\frac{\alpha-\xi}{\alpha-1}}-\frac{2}{\pi}q''_r\operatorname{arth}\sqrt{\frac{\alpha-\xi}{\alpha+1}},\\
x&=b+q_r+\frac{1}{\pi}T\ln\frac{\xi-1}{\xi+1}-\frac{2}{\pi^2}q'_r\int_{-1}^{1}\frac{\operatorname{arth}\sqrt{\dfrac{\alpha-1}{\alpha-t}}}{\xi-t}dt-\\
&\qquad-\frac{2}{\pi^2}q''_r\int_{-1}^{1}\frac{\operatorname{arth}\sqrt{\dfrac{\alpha-t}{\alpha+1}}}{\xi-t}dt
\end{aligned}\right\}\quad(8.8)$$

$$(1\leqslant\xi\leqslant\alpha)。$$

表达式(8.8)是浸潤曲綫的左支的参数形式①方程式。

关系式(8.8)可以大大地簡化。为此在表边式(8.8)的第一个积分里面，引入新的积分变数

$$\tau=\frac{\sqrt{\alpha-t}-\sqrt{\alpha-1}}{\sqrt{\alpha-t}+\sqrt{\alpha-1}}。$$

則我們有：

$$I_1=2\int_{-1}^{1}\frac{\operatorname{arth}\sqrt{\dfrac{\alpha-1}{\alpha-t}}}{\xi-t}dt=-(1+u^2)\int_0^{a'}\frac{(1+\tau)\ln\tau}{(1-\tau)(u+\tau)(1+u\tau)}d\tau,$$

这里，
$$u=\frac{\sqrt{\alpha-1}-\sqrt{\alpha-\xi}}{\sqrt{\alpha-1}+\sqrt{\alpha-\xi}}\quad(0\leqslant u\leqslant 1)$$

而

$$a'=\frac{1-a}{1+a}。\tag{8.9}$$

把上述积分的积分符号內的有理分式，解成最簡單的分項分式，則我們得到：

$$I_1=-2\int_0^{a'}\frac{\ln\tau}{1-\tau}d\tau-u\int_0^{a'}\frac{\ln\tau}{1+u\tau}d\tau-\int_0^{a'}\frac{\ln\tau}{u+\tau}d\tau。$$

① 参数是变数 ξ。

在上述积分的第二个里面，引入新的积分变数 $t=u\tau$，而在第三个里面引入积分变数 $t=\frac{\tau}{u}$，經过部分积分后，我們得到：

$$I_1=-\ln a'\ln\frac{(1+a'u)(a'+u)}{u(1-a')^2}-2\int_0^{a'}\frac{\ln(1-\tau)}{\tau}d\tau+$$

$$+\int_0^{a'u}\frac{\ln(1+t)}{t}dt+\int_0^{\frac{a'}{u}}\frac{\ln(1+t)}{t}dt。$$

由于和前类似的推理，我們找到表达式(8.8)的第二个表达式是：

$$I_2=2\int_{-1}^{1}\frac{\operatorname{arth}\sqrt{\frac{\alpha-t}{\alpha+1}}}{\xi-t}dt=\ln a'\ln\frac{(1-a'v)(v-a')}{v(1+a')^2}+$$

$$+2\int_0^{a'}\frac{\ln(1+\tau)}{\tau}d\tau-\int_0^{a'v}\frac{\ln(1-t)}{t}dt-\int_0^{\frac{a'}{v}}\frac{\ln(1-t)}{t}dt,$$

这里，

$$v=\frac{\sqrt{\alpha+1}-\sqrt{\alpha-\xi}}{\sqrt{\alpha+1}+\sqrt{\alpha-\xi}}\quad(a'\leqslant v\leqslant 1)。$$

在这里要注意：按量值 a'，u 和 v 的定义，在这些量值間有着关系式：

$$\frac{1-u}{1+u}=\frac{1+a'}{1-a'}\,\frac{1-v}{1+v}。$$

把这个方程式对 u 解出，我們找到：

$$u=\frac{v-a'}{1-a'v}。$$

則

$$\frac{(a'+u)(1+a'u)}{u(1-a')^2}=\frac{(1+a')^2v}{(v-a')(1-a'v)}。$$

在关系式(8.8)里面的量值，用它們的表达式来替代，而使用方程式 (8.6)，我們把浸潤曲綫左支的方程式(8.8)归結到下列更方便的参数形式：

$$\left.\begin{aligned}
x=&\frac{1}{\pi}\left(T-\frac{1}{\pi}q_r\ln a'\right)\ln\frac{(v-a')(1-a'v)}{v(1-a')^2}+\\
&+q'_r\left\{f_1(a')-\frac{1}{2}f_1\left(\frac{a'(1-a'v)}{v-a'}\right)-\frac{1}{2}f_1\left(\frac{a'(v-a')}{1-a'v}\right)\right\}+\\
&+q''_r\left\{f_2(a')-\frac{1}{2}f_2(a'v)-\frac{1}{2}f_2\left(\frac{a'}{v}\right)\right\},\\
y=&\frac{1}{\pi}q'_r\ln\frac{v-a'}{1-a'v}+\frac{1}{\pi}q''_r\ln v
\end{aligned}\right\}(8.10)$$

$$(a'\leqslant v\leqslant 1),$$

而且

$$f_1(t)=\frac{2}{\pi^2}\int_0^t\frac{\ln(1+\tau)}{\tau}d\tau,\quad f_2(t)=-\frac{2}{\pi^2}\int_0^t\frac{\ln(1-\tau)}{\tau}d\tau$$

函数$f_1(t)$和$f_2(t)$，見附录1所列的表。

如果参数a'是小的，則方程式(8.10)可以簡化为下列更簡單的近似形式：

$$\left.\begin{aligned}
x\approx&\frac{1}{\pi}\left(T-\frac{1}{\pi}q_r\ln a'\right)\ln\frac{v-a'}{v}-\\
&-\frac{1}{2}q'_rf_1\left(\frac{a'}{v-a'}\right)-\frac{1}{2}q''_rf_2\left(\frac{a'}{v}\right),\\
y\approx&\frac{1}{\pi}q'_r\ln(v-a')+\frac{1}{\pi}q''_r\ln v
\end{aligned}\right\}\qquad(8.10')$$

$$(a'\leqslant v\leqslant 1)。$$

我們来找浸潤曲綫左支的方程式在y的值是大时的迫近綫表达式。此时要注意，如果y是大的，則参数v近似于a'。則由于关系式(8.10)的第二个，

$$\ln\frac{v-a'}{a'(1-a'^2)}\approx\frac{\pi y}{q'_r}-\frac{q_r}{q'_r}\ln a'。$$

又由于函数$f_1(t)$和$f_2(t)$的下列性質：

$$f_1(t)=\frac{1}{3}+\frac{1}{\pi^2}\ln^2 t-f_1\left(\frac{1}{t}\right),\quad f_2(t^2)=2f_2(t)-2f_1(t),$$

当v近似于a'，我們得到：

$$x \approx \frac{1}{\pi}\left(T-\frac{1}{\pi}q_r \ln a'\right)\ln\frac{(1+a')(v-a')}{a'(1-a')}+$$

$$+q_r'\left\{f_1(a')-\frac{1}{6}-\frac{1}{2\pi^2}\ln^2\frac{v-a'}{a'(1-a'^2)}\right\}+q_r''\left\{f_1(a')-\frac{1}{6}\right\}。$$

在上项关系式里面，以 $\ln\frac{v-a'}{a'(1-a'^2)}$ 的近似表达式来替代它，我們找到浸潤曲綫左支的方程式的下列逼近綫表达式：

$$-2xq_r' \approx (T-y)^2-T'^2 \text{①}, \tag{8.11}$$

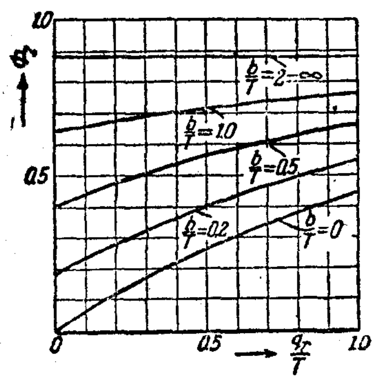
这里，

$$\left(\frac{T'}{T}\right)^2=\Phi_1^2+\frac{q_r'}{T'}\Phi_2, \tag{8.12}$$

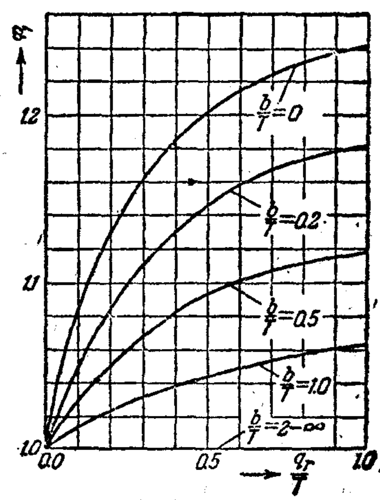
而且

$$\Phi_1=1-\frac{1}{\pi}\frac{q_r}{T}\ln a' \quad 而\ \Phi_2=\frac{4}{\pi}\ln(1+a')\Phi_1-\frac{q_r}{T'}\left(\frac{1}{3}-2f_1(a')\right)。$$

像上面所説的，量值 a 和 a' 是变数 $\frac{b}{T}$ 和 $\frac{q_r}{T}$ 的函数。則函数 Φ_1 和 Φ_2 也是这两变数的函数。第 177 和 178 圖表示函数 Φ_1 和



第 177 圖。



第 178 圖。

① 量值 $T-y$ 是离开排水窄沟距离 $-x$ 处的滤流深度。