误差理论简引

Y. 毕尔斯 著

楊 肇 燫 譯

科 学 出 版 社

Introduction to the Theory of Error

by

Yardley Beears

内 容 簡 介

这本小册子用簡明的文字，对誤差理論作了扼要的闡述；对于各种誤差的性質和表示的方式，測得量和算得量的誤差如何計算，誤差的傳播如何确定，各种誤差如何併合，数据如何調整等問題，都有所說明；最后附有大学普通物理实驗課程中的兩个实际例子，作为应用理論的示范。开始从事实驗工作的科学工作者和大学生，在目前还很少有关誤差的中文專著，本書可用作入門的导引。

目　录

I. 引　言

許多人把物理学叫作“严密的科学”。实在說来，它只是在一定程度上严密。举例来說，大家承認的光速值近来征引的数字是

$$(2.997902 \pm 0.000009) \times 10^{10} [\text{厘米}] [\text{秒}]^{-1}.$$

2.997902×10^{10}[厘米][秒]$^{-1}$ 这个数字表示着光速的最佳估計，而 0.000009×10^{10}[厘米][秒]$^{-1}$ 則指出結果的可靠度。

在任何“公認”值的測定中都包含着使用人的判断的許多因素：

(1) 在量度仪器的使用中，最末一位有效数字，往往必須估計某一量度仪器(例如一根米尺或一个安培計)上最小分度的分数，才能得到。

(2) 要达到一个特定值，就要作若干次实驗，并取“平均”。在有些情形里，某些数据，如观察人認为不可靠，可以舍棄。

(3) 类型不同的实驗具有不同的不准度。在計算最后的定値时，必須取各个分别数値的計权平均。較准确的实驗应給以較大的重要性，而計权因数的指配則又是因人的意見而異的事情。

(4) 所有以上各項都参入了人的判断的誤差。虽然观察人有規則可循，但这些規則所依据的是人为的假定，而这些假定，最后分析起来，还是因人的意見而異的事情。倘使有不止一組的观察人作一个实驗，則各組所提供的最后定値就可能有差異。

一个实驗結果的估計不准度，象上面所引 0.000009×10^{10}[厘米][秒]$^{-1}$的值，已經把观察人对所用方法和数据的不准确度作了分析而指配給这个实驗的不准度計算在內了。举例来說，光速不能直接量度；而是要量度光傳行給定距离所需的时間。因此时間和距离是测得的量，而速度是算得的量。速度的不准度乃是时間和距离的量度的不准度的联合效应，这正是誤差傳播的一个例子。

在估計这类不准度的时候，对时間和距离的量度的各別过程必須詳細考察。对于实驗作这样的分析具有进一步的益处，就是它有助于表明如何可以做出更好的实驗。如果时間量度是誤差的主要来源，則

改进距离量度就沒有多大意思；一切將来的努力都应当放在时間量度的改进上。高級实驗室訓練的一个重要方面，应該是使学生熟悉計算誤差的方法，并要求他把这些方法应用到实际的实驗上去。

II. 定　义

A. 誤差　这个名詞在正确使用上有兩种不同的意义(时常有人誤用它来指应当叫作“差異”的概念)：

(1) 它表示測得值和“眞”值的差量。除了在少数不重要的情形中(象圓周和直徑的比率的实驗測定)，“眞”值是不知道的，而誤差的量值是假定的。尽管这样，为了討論的目的，这还是一个很有用的概念。

(2) 当給出了或者暗示着一个数目，象上面的 0.000009×10^{10} 的时候，“誤差”所指的是一个实驗中的估計不准度，并且用标准偏差，平均偏差，可几誤差，或者精密度指标等量来表达。这些名詞以后將給以定义。

B. 差異　这是一个量的兩个測得值之間的分别，象兩个学生所得同一个量的兩个測得值之間的分别，或者一个学生所求得的实驗值和手册或教本中所載数值之間的分别。“誤差”这个名詞往往被不正确地用来指这种分别。

許多初学的学生吃了一种錯誤印象的亏，以为在手册上或者教本上所載的数值是“正确”值或者“眞”值。所有这类数值都是实驗的結果，并且含有不准度。不仅止此，在实驗中，象在測定物質个别样品的性質的实驗中，手册上所載的数值可能实在比学生所得的数值更不可靠，因为学生所用的样品可能和手册数值所根据的材料的組成有所不同。

C. 实驗誤差　已經作过的量度，如重新再作，結果的数值一般地并不会恰巧相符。各别数值不相符的原因必然也是它們不同于“眞”值的原因，由于这些原因而来的誤差叫作实驗誤差。它們有时也叫作无規誤差或偶然誤差。我們將在第 III 节中列出实驗誤差的类型。

D. 系統誤差或恆定誤差　倘使在另方面所有各别数值的誤差量相同，它們就叫作系統誤差或恆定誤差。例如所有的量度都用一条鋼皮尺含有一处扭折的部分去作，讀数就都会显得太大，大出的量等于因

扭折而失去的一段長度。

在多数实驗中，实驗誤差和系統誤差兩者都是存在的。有时兩者可以出于同一来源。

E. 可定誤差和不可定誤差　使用合于邏輯程序，无論是理論的或者是实驗的，就可以計值的誤差，叫作**可定誤差**，而其他的就叫作**不可定誤差**。

实驗誤差是可定的，因为它們可以应用后面所发展的一个理論来計值。在有些情况中，实驗誤差或者系統誤差可以由輔助实驗来計值。在其他情况中，系統誤差可以是本来不可能計值的，它們的存在，只可以把涉及的实驗去和使用根本不相同的方法对同一物理量所作的别种量度相比較，来間接推断。系統誤差有时可以把所用仪器去和标准仪器作校准来計值，而在这类情形中誤差是可定或不可定，則依賴于有无标准仪器。

F. 改正　可定系統誤差和某些可定实驗誤差，可以应用适当的改正来消掉。假如由于所用鋼皮尺有扭折而致誤差的量度，可以把鋼皮尺去和标准尺作比較，并从所有的測得值减去差量，从而消去誤差。这条鋼皮尺的某些实驗誤差还可能是由于它随温度的漲落而有伸縮所致。注意每次量度时的温度并定出鋼皮尺的綫脹系数，就可以补救各别数值所受的这种影响。

G. 精密度*　倘使一个实驗的**实驗**誤差小，我們就說它的精密度高。

H. 准确度　倘使一个实驗的**系統**誤差小，我們就說它的准确度高。

I. 数据的調整　这是一个从数据来决定“最佳”值或一般所謂的**最可几**值的过程。倘使一張桌子的長度用同一方法量了若干次，并取測得值的平均，就得到一个比任一个别值更为精密的值。倘使測得值中

---

* 精密度和准确度的区别，这里說得很簡括，似乎一下不易理解，稍作补充說明，可能有助于初学。所謂实驗誤差小，就是說經得起复驗，多次复驗結果都很相近，相互間的差異小，就是精密度高。所謂系統誤差小，就是說求得的值近于眞値的程度高，就是准确度高。还有一个意义应当提出，一个正确地定到四位数字的量，比一个定到六位数字但含有較大誤差的量較为准确，但較不精密。——譯者。

有些比其他的值更为精密，就应当計算出一个計权平均。这些就是对直接測得量作数据調整的例子。就算得值而論，这过程可以是很專門化，很复杂的。以后我們要发展一种方法，来决定一条代表綫性相关的測得量的直綫所具斜率的最可几值。

III. 誤差的分类

A. 系統誤差

(1) 仪器校准的誤差.

(2) 个人誤差　这类誤差是由于个别观察人的习惯所致. 例如一个观察人在察讀具有視差的指針和标度时一貫把他的头偏左, 就总会引进誤差.

(3) 实驗条件　倘使在恆定的实驗条件(例如压强或温度)下使用一具仪器, 而这些条件不同于仪器校准时的条件, 如果不作任何改正, 結果就会有系統誤差.

(4) 不完善的技术　用泊肃叶(Poiseuille)定律量度粘滯性, 就需要量度在給定时間內从实驗器流出的液量. 倘使有小量的液体濺洒在用来接收它的容器之外, 就会发生系統誤差.

B. 实驗誤差

(1) 判断誤差　多数仪器需要估計到它的最小分度的分数, 而观察人的估計由于种种原因可以时时改变.

(2) 漲落情况　(象温度, 压强, 綫路电压).

(3) 干扰　这样的例子, 象机械振动, 或者象在电学仪器里, 从附近的轉动电机或其他器件所拾取的乱眞信号.

(4) 定义　卽使量度程序是完善的, 对同一量作重复量度, 还仍然会不相一致, 因为那个量也許沒有精密地予以定义. 例如一張長方桌子的"長度"就不是一个明确的量. 为了种种理由, 桌子的边不是光滑的(至少在高度放大后看是这样), 兩对边也不是准确地平行的. 因此縱然有了完全精密的設备来量度長度, 仍会发現求得的值要看"長度"究竟是在桌子截面上什么地方量得而不同. 在原子核物理学中, 定义誤差通常是誤差的最大来源(参看第 VII 节).

C. 不正当誤差

卽使在最好的实驗中, 上述各种类型的誤差, 大多数, 甚至于全部,

那怕程度不大，总是存在的，并且应該在書面报告中給以討論．不过有兩个类型可避免的誤差在实驗里是沒有地位的，久經訓練的人对于实驗报告有理由假定这些誤差并不存在．

(1) 过失　这些是在察讀仪器，調准实驗条件，或进行計算时犯了錯誤所引起的誤差．这些只要随时謹愼小心，并重复作实驗和复核計算，是可以大部分消除的．

(2) 計算誤差　計算实驗結果选用的数学工具(諸如計算尺，对数表，計算机)所具有的誤差，应当小到和实驗的自然誤差相比完全可以忽略的程度．因此倘使数据准确到五位有效数字，而使用只能察讀到三位数字的計算尺来計算結果，并在报告中把“計算尺誤差”列为誤差来源，那就是非常不恰当了．这样的計算尺只应当用来对只有三位、最好是只有兩位有效数字的实驗作計算．在另一方面，倘使实驗确是給出五位有效数字，就应当使用五位或六位对数表，或者其他較准确的計算手段．

IV. 測得量中所含的实驗誤差

A. 对平均值的偏差的平方的和是最小值的証明　前面說过，对于一个量有一个“最可几”值。在直接測得量的情况中，这个值一般地，但是武断地，假定为各个測得值的算术平均。

令 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 为測得值，幷令 $\bar{x}$ 为最可几值。那么各个測得值和 $\bar{x}$ 之間的差量叫作偏差（它們也叫作殘数）。对于一个給定值 x_n，偏差定义为

$$\delta x_n \equiv x_n - \bar{x}. \tag{1}$$

倘使 $\bar{x}$ 是 k 个测得值的算术平均，則由定义有

$$\bar{x} \equiv \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n + \cdots + x_k}{k} = \frac{\sum_{n=1}^{k} x_n}{k}. \tag{1A}$$

那么偏差的算术平均可以証明是零。要計算这样一个平均，我們用由式(1)所算出的偏差計算总和，然后用总数 k 去除。表出偏差的各方程式右方各第一項的总和恰好就是各測得值的总和 $\sum\limits_{n=1}^{k} x_n$，这根据式(1A)恰好就是 $k\bar{x}$。这一总和与右方各第二項的总和相等而反号。所以各偏差的算术平均是零。

不过各偏差的平方当然都是正的，所以这些平方的总和幷不消失。其次我們要証明，倘使用各測得值的平均代替 $\bar{x}$，則各偏差的平方的这个总和是一个最小值。由此結果可以推知，一个算得量的“最可几值”就是那个值，对于它来說，各偏差的平方的总和，在恰当的定义下，是一个最小值。我們要定义一个叫作标准偏差的量，它和这个各偏差平方总和的最小值有簡單的关系，而且是用来定量地規定誤差的若干量之一。

要进行这个証明，首先用式(1)計算各偏差的平方。

$$
\begin{aligned}
(\delta x_1)^2 &= x_1^2 - 2x_1\bar{x} + \bar{x}^2,\\
(\delta x_2)^2 &= x_2^2 - 2x_2\bar{x} + \bar{x}^2,\\
&\vdots\\
(\delta x_n)^2 &= x_n^2 - 2x_n\bar{x} + \bar{x}^2,\\
&\vdots\\
(\delta x_k)^2 &= x_k^2 - 2x_k\bar{x} + \bar{x}^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{总和} \equiv X = \sum_{n=1}^{k} (\delta x_n)^2 &= (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + \cdots + x_k^2) -\\
&- 2\bar{x}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots + x_k) + k\bar{x}^2 =\\
&= \sum_{n=1}^{k} x_n^2 - 2\bar{x} \sum_{n=1}^{k} x_n + k\bar{x}^2, \qquad (2)
\end{aligned}
$$

式中 k 是值的总个数。

为了求出使 X 为最小值的 $\bar{x}$ 值，我們取 X 对 $\bar{x}$ 的导数。因为所有的 x_n 是由实驗所固定的，它們的微分是零。令导数等于零，并求解 $\bar{x}$:

$$
\frac{dX}{d\bar{x}} = -2\sum_{n=1}^{k} x_n + 2k\bar{x} = 0,
$$

即

$$
\bar{x} = \frac{\sum_{n=1}^{k} x_n}{k}, \qquad (3)
$$

这就是算术平均值。

B. 标准偏差的定义　方均根偏差是用下述程序来計算：計算各 x 的偏差的平方的总和，除以各值的总个数 k，然后取这結果的平方根。因此方均根偏差 s' 是

$$
\begin{aligned}
s' &= \sqrt{\frac{(\delta x_1)^2 + (\delta x_2)^2 + \cdots + (\delta x_n)^2 + \cdots + (\delta x_k)^2}{k}} =\\
&= \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{k} (\delta x_n)^2}{k}}. \qquad (4)
\end{aligned}
$$

标准偏差是从一个几乎完全相同的公式来計算的，即

$$s=\sqrt{\frac{\sum\limits_{n=1}^{k}(\delta x_n)^2}{k-1}}, \tag{5}$$

上式中根号下的分母是 $k-1$ 而不是 k. 上兩公式的差别起源于这样的事实，即标准偏差是从对数据作統計分析推导出来的。依照統計学的一般理論，一个結果的可靠性依賴于测得值的个数，而一般地講，随着个数的平方根得到改善（参看第 V-B 节和第 VII 节）。然而偏差的独立值的个数是 $k-1$，不是 k. 可以看出，$k=1$ 时，單独偏差的概念沒有意义。倘使 $k=2$，可以計算出兩个偏差，但总是相等的，因此可以推知，一般地說，虽然可以計算出 k 个偏差，但在統計学上其中有一个是不独立的。

在实用上这兩条公式的区别是不重要的。当試样数 k 小时，任何統計学的考虑都是不可靠的，所以沒有一条公式有很大的意义。当 k 很大时，用 k 代 $k-1$ 所引起的百分誤差是很小的。但仍宁可用式(5)，因为除了符合于統計学理論而外，所給出的标准偏差数值較大，因而是較謹慎些。

C. 平均偏差　如前所表明，各偏差的代数和是零。所以如果要定义出一个平均偏差，必須不問正負号把各偏差加起来，然后用观察的次数去除。这就产生了平均偏差 a 适用的下式：

$$a=\frac{\sum\limits_{n=1}^{k}|\delta x_n|}{k}. \tag{6}$$

D. 平均偏差对标准偏差的关系。百分比偏差　显然可見，平均偏差的計算比起标准偏差所含的算术操作要少得多；在另方面，从一般理論看，标准偏差更有意义。以后要証明，当测定值的总个数很大时，标准偏差对平均偏差的比值接近于 1.25。对大多数实用目的来說，直接計算平均偏差，然后用 1.25 乘它来求标准偏差是很可行的。

应当注意，s 和 a 兩个量的量綱都和 x 的相同。因此，如果 x 是由厘米所表的長度，則 s 和 a 兩个量都由厘米表出。它們可以用平均值 $\bar{x}$ 去除而变成无量綱的量。这样相对标准偏差 S 是

$$S=\frac{s}{\bar{x}}, \tag{7}$$

而相对平均偏差 A 是

$$A=\frac{a}{\bar{x}}. \tag{8}$$

S 和 A 往往可以用 100 去乘分别由式(7)和式(8)所給出的值而表为百分数。

E. 例：用图示法表出测得值的分布　假設对某一長度量了 51 次。测得的值列于表 I。第一行列出的是各种不同的测得值，而第二行列出的是每一值出現的次数。例如在第一行第三列里看到量值 1.03 厘米，而在右面第二行同列里見到数字 6。这意思是說，51 次量度当中有 6 次給出了量值 1.03 厘米。

应当注意，各个量度只給出三位有效数字，但 $\sum x_n=53.75$ 厘米和 $\bar{x}=1.054$ 厘米兩个量則給出四位。这样作是正当的，說明如下。因为各个值有三位数字有效，則标为 mx 的一行中各值的末位数字都至少是部分地有效。所以总計的总和至少部分地有效到最接近的 0.01 厘米。这样的办法是說得通的，因为平均值 $\bar{x}$ 比任一个别值更为精密，因而就要求比个别值的有效数字多一位。（为了計算表 I 中的偏差，所用的 $\bar{x}$ 值是 $\bar{x}=1.05$ 厘米。）

注意从直接算得值求 $\frac{s}{a}$ 的比值，得到

$$\frac{s}{a}=\frac{0.0216}{0.0168}=1.29,$$

并不是理論值 1.25。这个差異部分地是由于这样的事实，卽对各个偏差我們只知道到一个有效数字，所以 s 和 a 所达到的精密度是受了限制的。还有，作計算时只用了 51 个值，而理論所依据的假定是有很大的数目，理想地說，无限大的数目。

表 I 中的数据可以用图示法表为图 1。設想把 x 值的整个范圍分为若干个相等的間程 Δx，并把居于每一間程內的 x 值的个数对該間程內的 x 的平均值标繪出来。因此出現 6 次的 1.03 值，可以当作处于以

表 I

值 x (厘米)	出現次数 m	mx (厘米)	$\delta x=x-\bar{x}$ (厘米)	$m\|\delta x\|$ (厘米)	$(\delta x)^2$ (厘米)^2	$m(\delta x)^2$ (厘米)^2
1.01	1	1.01	−0.04	0.04	16×10^{-4}	16×10^{-4}
1.02	3	3.06	−0.03	0.09	9	27
1.03	6	6.18	−0.02	0.12	4	24
1.04	8	8.32	−0.01	0.08	1	8
1.05	10	10.50	0.00	0.00	0	0
1.06	7	7.42	+0.01	0.07	1	7
1.07	8	8.56	+0.02	0.16	4	32
1.08	4	4.32	+0.03	0.12	9	36
1.09	3	3.27	+0.04	0.12	16	48
1.10	0	0.00	+0.05	0.00	25	0
1.11	1	1.11	+0.06	0.06	36	36
	51 $=k$ $=\sum m$	53.75 $=\sum_{n=1}^{51} x_n$		0.86 $=\sum_{n=1}^{51}\|\delta x_n\|$		234×10^{-4} $=\sum_{n=1}^{51}(\delta x_n)^2$

平均值:

$$\bar{x}=\frac{\sum_{n=1}^{51} x_n}{k}=\frac{53.75}{51}=1.054\text{ 厘米.}$$

平均偏差:

$$a=\frac{\sum_{n=1}^{51}|\delta x_n|}{k}=\frac{0.86}{51}=0.016_8\text{ 厘米.}$$

相对平均偏差:

$$A=\frac{a}{\bar{x}}=\frac{0.0168}{1.054}=0.016_0\text{ 或 }1.6\%.$$

标准偏差:

$$s=\sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{51}(\delta x_n)^2}{k-1}}=\sqrt{\frac{234\times10^{-4}}{50}}=0.021_6\text{ 厘米.}$$

相对标准偏差:

$$S=\frac{s}{\bar{x}}=\frac{0.0216}{1.054}=0.020_4\text{ 或 }2.0\%.$$

1.03 厘米为中点的那个 0.01 厘米的間程之內；就是說，在 1.025 和 1.035 厘米之間。因此我們把縱标度上的 6 对横标度上的 1.03 厘米来作标繪。因为就一个小数目(象 51)来說，这些点幷不在一条光滑的曲綫上，习慣上就用一个組織图来表出这类的标繪，这种图是一系列長度为 Δx、以各个 x 值的点为中点的横綫，而兩横綫相鄰的端点則以長度适当的縱綫連接起来。

倘使另作一組 51 个量度，幷标繪出相应的图形，一般地所得的图形不会与前一次的图形吻合。換句話說，在这第二組的量度里，可能得不到 6 次 1.03 厘米的値，而可能得到 5 次，7 次，甚至 8 次。照此看来，这一类的分布服从于**統計性的漲落**。倘使用 500 个値来重复这个过程，就会发現相对的漲落会变得較小，而如用 5,000 个値，就会更小。同时，倘使改进了量度技术，得到的有效数字位数更多，就可以用寬度較小的間程 Δx。这样我們可以得出結論說，在量度次数无限地增加，而間程 Δx 的寬度逐漸减小的情形下，組織图就接近于一条光滑的曲綫。在第 IV-G 节中，我們要发展一个理論，給出組織图在这种情况下所接近的光滑曲綫的形狀。图 1 中标繪的光滑曲綫就是用那个理論計算出来的。

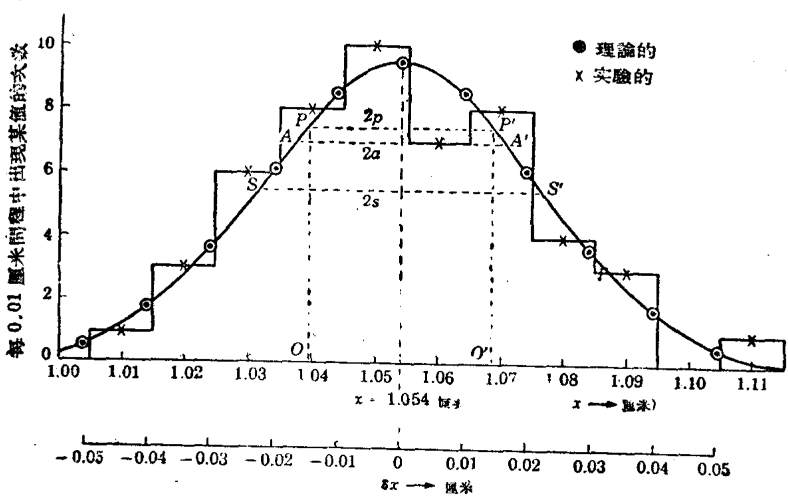

图 1