

87.3517

7034

路面厚度计算图表

同济大学公路工程研究所

1981年八月二十六日

人民交通出版社

路面厚度计算图表

同济大学公路工程研究所

人 民 交 通 出 版 社

1975年·北京

内 容 提 要

本书主要介绍双层及三层弹性半无限体在圆形均布荷载下应力与位移的数值解(计算表)。对于双层体系附有计算图 19 幅,三层体系计算图 5 幅。

书中对双层、三层弹性半无限体的计算简图及公式均作了介绍。

本书可供公路、城市道路设计、科研工作者及有关院校师生在研究路面厚度计算时作参考。

此外,本书介绍的资料,还可供其他土建部门科研工作者参考。

路 面 厚 度 计 算 图 表

同济大学公路工程研究所

人民交通出版社出版

(北京市安定门外和平里)

北京市书刊出版业营业许可证出字第006号

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

人民交通出版社印刷厂印

开本: 787×1092 1/32 印张: 24.25 字数: 566 千

1975年11月第1版

1975年11月第1版第1次印刷

印数: 0001—9,500册 定价(科四): 2.50元

(只限国内发行)

毛 主 席 语 录

列宁为什么说对资产阶级专政，这个问题要搞清楚。这个问题不搞清楚，就会变修正主义。要使全国知道。

百家争鸣是一种发展科学的方法。

一个正确的认识，往往需要经过由物质到精神，由精神到物质，即由实践到认识，由认识到实践这样多次的反复，才能够完成。

出 版 说 明

几年来，我国公路战线上广大职工和科研工作者，在毛主席革命路线指引下，在柔性路面设计方法的研究工作方面做了大量工作，取得了较大成绩。通过生产实践和大量的科学实验，提出了柔性路面厚度计算的经验公式法，与此同时还探索了层状弹性半无限体的应力与位移理论在柔性路面厚度计算中的应用途径。为了促进我国路面设计科学的发展，我们遵照毛主席关于“百家争鸣是一种发展科学的方法”的教导，将这方面理论研究成果和经验公式法（将在另一专集中发表）陆续出版，以利广大道路工作者在生产中加以验证。

本书介绍的双层、三层弹性半无限体在均布荷载下应力与位移数值解及计算图，可供公路、城市道路设计、科研工作者及有关院校师生在研究路面厚度计算时参考，并希望通过实践进一步验证其对路面设计的适用性。此外，本书介绍的资料还可供其他土建部门科研人员参考。

前 言

近年来,层状弹性半无限体的应力与位移理论在世界各国路面设计理论的研究工作中,日益受到重视,在理论方面和数值解方面都得到了很大发展。

但是,到目前为止,所有的数值解不仅在泊松比的假定上不尽符合实际情况,而且不够全面,在运用上深感不足。

为了对双层和三层弹性半无限体作更全面的研究,以付实际应用,我们对双层和三层弹性体系进行了较全面的数值计算。计算中,同时选用能较全面地代表路面结构实际工作状态的两种极端情况的图式。对于双层体系,采用两层接触面完全连续及完全无摩擦力时的情况;对于三层体系,采用上中层接触面滑动、中下层接触面完全连续以及各层接触面完全连续的两种计算图式。各层的泊松比则采用了能大致代表路面结构中材料实际情况的数值:双层体系的面层取为0.25,路基取为0.35;三层体系则上、中层取为0.25,路基仍为0.35。为了对双层和三层弹性半无限体得出较全面的数值解,供实际应用,我们用电子计算机对选定的参数作了广泛的计算。对于双层体系,根据计算结果绘出了19幅计算简图。三层体系数值解的图表化将进一步研究绘制。目前仅绘出三层连续体系表面上荷载中心处垂直位移系数图(计5张)。

本文电子计算部分的工作是在中国科学院计算技术研究所协助下于1964年完成的。

伟大导师恩格斯曾深刻地指出:“科学的发生和发展一开始就是由生产决定的。”当前,无产阶级文化大革命和批林批孔运动取得伟大胜利,无产阶级专政理论的学习不断深入,交通战线呈现一派大好形势,公路建设发展很快,群众性的道路科学研究工作也在进一步发展。遵循伟大领袖毛主席关于“一个正确的认识,往往需要经过由物质到精神,由精神到物质,即由实践到认识,由认识到实践这样多次的反复,才能够完成。这就是马克思主义的认识论,就是辩证唯物论的认识论”的教导,现在我们发表双层和三层弹性半无限体的数值解,其目的就是希望广大道路工作者和我们一起在实践中检验该理论的正确性,特别希望同志们对双层和三层弹性半无限体的数值解进行路面设计的适用性,提出宝贵意见。

目 录

一、双层弹性半无限体在圆形均布荷载下应力与位移的数值解

(一)双层弹性半无限体的计算简图与公式	1
(二)数值计算方面的若干主要问题与情况	4
(三)计算结果	7
附录一 双层弹性半无限体应力、变形与位移系数表(两层接触面完全连续)	8
附录二 双层弹性半无限体应力、变形与位移系数表(两层接触面完全无摩阻力)	30
附录三 双层连续体系、双层滑动体系计算简图	54

二、三层弹性半无限体在圆形均布荷载下应力与位移的数值解(一)

(一)三层弹性半无限体的计算图式与公式	74
(二)数值计算方面的若干主要问题	77
(三)计算结果	84
(四)结语	85
附录一 三层弹性半无限体在圆形均布荷载下应力与位移的解析解	85
附录二 三层弹性半无限体在圆形均布荷载作用下的应力、变形与位移系数表	90

三、三层弹性半无限体在圆形均布荷载下应力与位移的数值解(二)

(一)三层弹性半无限体的计算图式与公式	215
(二)数值计算方面的若干主要问题	219
(三)计算结果	222
(四)结语	223
附录一 三层弹性半无限体在圆形均布荷载作用下的应力、变形与位移系数表	224
附录二 三层连续体系表面上荷载中心处垂直位移系数图	374

一、双层弹性半无限体在圆形均布荷载下应力与位移的数值解

提 要

本文按两层接触面完全连续与两层接触面完全无摩擦力的双层弹性半无限体在圆形均布荷载作用下应力、变形与位移的解析解,用电子计算机对选定的参数 $\frac{r}{\delta}$ 、 $\frac{Z}{\delta}$ 、 $\frac{h}{\delta}$ 、 $\frac{E_2}{E_1}$ 作了较全面的数值计算。在选定参数 $\frac{h}{\delta}$ 与 $\frac{E_2}{E_1}$ 时,是以目前一般所谓“柔性路面”为依据的。

文中按两种双层体系内不同的座标点列出了25张数表,共计9,000余个数据。按照表中所列数据可以绘制运用上足够精确的图表。

(一) 双层弹性半无限体的计算简图与公式

双层弹性半无限体在圆形均布荷载作用下的计算简图如图1所示。

在该图中,以 q 表示单位面积上的荷载, δ 表示荷载圆面积的半径, h 为上层的厚度, E_1 、 μ_1 和 E_2 、 μ_2 分别为上层与下层(半无限体)的杨氏模量与泊松系数。

由于表面荷载与整个弹性体均对称于所选定的座标轴 Z ,因此宜于引用柱座标来求解。在求解此问题时,我们采用了 Southwell [1] 与 Allen 等 [2] 所给出的轴对称问题的基本方程式。这些基本方程式如下:

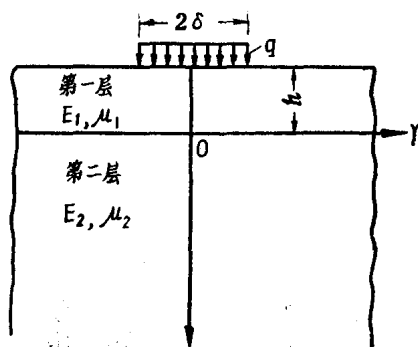


图 1

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (\psi + \phi) + \frac{\mu}{r} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

$$\sigma_r - \sigma_\theta = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (\psi + \phi) - \frac{\mu}{r} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{2}{r^2} [\psi + (1 - \mu) \phi]$$

$$\sigma_z = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

$$\tau_{rz} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial Z}$$

$$u = \frac{1 + \mu}{E} \cdot \frac{1}{r} [\psi + (1 - \mu) \phi]$$

$$\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{1 + \mu}{E} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial Z} [\psi - (1 - \mu) \phi]$$

(1)

式中: $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ ——垂直于 r, θ, Z 轴之平面上的正应力分量;

$\tau_{rz} = \tau_{zr}$ ——垂直于 r 轴与 Z 轴之平面上的剪应力分量;

u, W —— r 轴与 Z 轴向的位移分量;

ϕ, ψ ——应力函数, 它们满足柱座标系统内的两个二阶方程

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \phi &= 0 \\ \nabla^2 \psi &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial Z^2} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\text{其中: } \nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2}$$

为了得到双层弹性半无限体应力、变形与位移分量的解析表达式, 曾对泛定方程(2)采用了如下两组不同的定解条件:

1. 两层接触面完全连续时

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{z1} &= \begin{cases} -q & r < \delta \\ 0 & r > \delta \end{cases} \quad Z = -h \\ \tau_{rz1} &= 0 \\ \sigma_{z1} &= \sigma_{z2}, \quad \tau_{rz1} = \tau_{rz2}, \\ u_1 &= u_2, \quad W_1 = W_2 \end{aligned} \right\} Z = 0 \quad (3)$$

2. 两层接触面完全无摩阻力时

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{z1} &= \begin{cases} -q & r < \delta \\ 0 & r > \delta \end{cases} \quad Z = -h \\ \tau_{rz1} &= 0 \\ \sigma_{z1} &= \sigma_{z2}, \quad \tau_{rz1} = 0 \\ \tau_{rz2} &= 0, \quad W_1 = W_2 \end{aligned} \right\} Z = 0 \quad (4)$$

在方程(3)与(4)中, 对应力分量与位移分量均附加了下标 1 与 2, 用以分别表示属于上层 1 与下层 2。

除上列双层弹性半无限体上层表面的边界条件与两层接触面上的接合条件(3)与(4)外, 在定解条件中尚有: 当 $r \rightarrow \infty$ 与 $Z \rightarrow \infty$ 时, 所有应力、变形与位移分量均应趋近于零。

对于以上边值问题, 考虑到 $r \rightarrow \infty$ 处的边界条件, 可以用 *Hankel* 变换来求解。其结果如下:

应力函数:

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= \int_0^\infty r J_1(\xi r) [e^{\xi z} A_1 + e^{-\xi z} B_1] d\xi \\ \psi_1 &= \frac{1}{2} \int_0^\infty r J_1(\xi r) [e^{\xi z} (2C_1 + \xi Z A_1) + e^{-\xi z} (2D_1 - \xi Z B_1)] d\xi \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

应力、变形与位移分量的积分表达式:

$$\begin{aligned} \sigma_{z1} &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \xi J_0(\xi r) \{ e^{\xi z} [2C_1 + (2 + \xi Z) A_1] \\ &\quad + e^{-\xi z} [2D_1 + (2 - \xi Z) B_1] \} d\xi - \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{J_1(\xi r)}{r} d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{ e^{\xi z} [2C_1 + (2 - 2\mu_1 + \xi Z) \times A_1] + e^{-\xi z} [2D_1 \\
& + (2 - 2\mu_1 - \xi Z) \times B_1] \} d\xi \\
\sigma_{\theta 1} = & \mu_1 \int_0^\infty \xi J_0(\xi r) [e^{\xi z} A_1 + e^{-\xi z} B_1] d\xi + \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{J_1(\xi r)}{r} \\
& \{ e^{\xi z} (2C_1 + (2 - 2\mu_1 + \xi Z) \times A_1) + e^{-\xi z} [2D_1 + (2 - 2\mu_1 - \xi Z) \\
& \times B_1] \} d\xi \\
\sigma_{z1} = & -\frac{1}{2} \int_0^\infty \xi J_0(\xi r) \{ e^{\xi z} [2C_1 + \xi Z A_1] + e^{-\xi z} [2D_1 - \xi Z B_1] \} d\xi \\
\tau_{rz1} = & -\frac{1}{2} \int_0^\infty \xi J_1(\xi r) \{ e^{\xi z} [2C_1 + (1 + \xi Z) A_1] - e^{-\xi z} [2D_1 \\
& + (1 - \xi Z) B_1] \} d\xi \\
\varepsilon_{rz1} = & \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \mu_1}{E_1} \int_0^\infty \xi [J_0(\xi r) - \frac{J_1(\xi r)}{r}] \{ e^{\xi z} \times [2C_1 \\
& + (2 - 2\mu_1 + \xi Z) A_1] + e^{-\xi z} [2D_1 + (2 - 2\mu_1 - \xi Z) B_1] \} d\xi \\
W_1 = & -\frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \mu_1}{E_1} \int_0^\infty J_0(\xi r) \{ e^{\xi z} [2C_1 - (1 - 2\mu_1 - \xi Z) A_1] \\
& - e^{-\xi z} [2D_1 - (1 - 2\mu_1 + \xi Z) B_1] \} d\xi \\
& i = 1, 2
\end{aligned} \tag{6}$$

按上层表面的边界条件与两层接触面上的结合条件(3)与(4)以及 $Z \rightarrow \infty$ 处的边界条件所解得之 A_1 、 B_1 、 C_1 、 D_1 的表达式如下:

1. 两层接触面完全连续时

$$\begin{aligned}
A_1 = & -\frac{2q\delta J_1(\xi\delta)}{\xi\Delta_1} [Le^{-3\xi h} - (1 + 2\xi h) e^{-\xi h}] \\
B_1 = & \frac{2q\delta J_1(\xi\delta)}{\xi\Delta_1} [(1 - 2\xi h)e^{-3\xi h} - Me^{-\xi h}] \\
C_1 = & \frac{q\delta J_1(\xi\delta)}{2\xi\Delta_1} [2L(1 - \xi h)e^{-3\xi h} - (1 + ML + 2\xi h)e^{-\xi h}] \\
D_1 = & -\frac{q\delta J_1(\xi\delta)}{2\xi\Delta_1} [(1 + ML - 2\xi h)e^{-3\xi h} - 2M(1 + \xi h)e^{-\xi h}] \\
A_2 = & 0 \\
B_2 = & -\frac{2q\delta J_1(\xi\delta)}{\xi\Delta_1} (L - 1) [(1 - 2\xi h)e^{-3\xi h} - Me^{-\xi h}] \\
C_2 = & 0 \\
D_2 = & -\frac{q\delta J_1(\xi\delta)}{2\xi\Delta_1} \{ [(M - 1)L - (L - 1)(1 - 2\xi h)] \times e^{-3\xi h} \\
& + [(L - 1)M - (M - 1)(1 + 2\xi h)] e^{-\xi h} \}
\end{aligned} \tag{7}$$

式中:

$$\Delta_1 = M - (1 + ML + 4\xi^2 h^2) e^{-2\xi h} + Le^{-4\xi h}$$

$$L = \frac{(3 - 4\mu_2) - (3 - 4\mu_1)m}{(3 - 4\mu_2) + m}, \quad M = \frac{1 + (3 - 4\mu_1)m}{1 - m}$$

$$m = \frac{(1 + \mu_1)E_2}{(1 + \mu_2)E_1}$$

2. 两层接触面完全无摩擦力时

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= -\frac{2q\delta J_1(\xi\delta)}{\xi\Delta_2} [(1-K)e^{-3\xi h} - (1-K+\xi h)e^{-\xi h}] \\ B_1 &= \frac{2q\delta J_1(\xi\delta)}{\xi\Delta_2} [(K-\xi h)e^{-3\xi h} - Ke^{-\xi h}] \\ C_1 &= \frac{q\delta J_1(\xi\delta)}{\xi\Delta_2} (1-K)[(1-\xi h)e^{-3\xi h} - (1+\xi h)e^{-\xi h}] \\ D_1 &= -\frac{q\delta J_1(\xi\delta)}{\xi\Delta_2} K[(1-\xi h)e^{-3\xi h} - (1+\xi h)e^{-\xi h}] \\ A_2 &= 0 \\ B_2 &= \frac{2q\delta J_1(\xi\delta)}{\xi\Delta_2} (2K-1)[(1-\xi h)e^{-3\xi h} - (1+\xi h)e^{-\xi h}] \\ C_2 &= 0 \\ D_2 &= -\frac{q\delta J_1(\xi\delta)}{\xi\Delta_2} (2K-1)[(1-\xi h)e^{-3\xi h} - (1+\xi h)e^{-\xi h}] \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中:

$$\Delta_2 = K + [2(2K-1)\xi h - (1+2\xi^2 h^2)]e^{-2\xi h} + (1-K)e^{-4\xi h}$$

$$K = \frac{(1-\mu_2) + (1-\mu_1)m}{2(1-\mu_2)}, \quad m = \frac{(1+\mu_1)E_2}{(1+\mu_2)E_1}$$

在接上列公式(6)、(7)、(8)作数值计算时, 采用了变换 $X = \xi\delta$, 目的在于使所有应力、变形与位移分量表达式中积分号内的被积函数均变成积分参数 X 的无因次量, 并使独立参变数成为 $\frac{r}{\delta}$ 、 $\frac{Z}{\delta}$ 、 $\frac{h}{\delta}$ 和 $\frac{E_2}{E_1}$ 。

(二) 数值计算方面的若干主要问题与情况

在进行数值计算之前, 曾将应力、变形与位移分量的解析表达式作了一定的简化, 使它们能表示成如下的简洁形式:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r(1)} &= q\bar{\sigma}_{r(1)} \\ \sigma_{\theta(1)} &= q\bar{\sigma}_{\theta(1)} \\ \sigma_{z(1)} &= q\bar{\sigma}_{z(1)} \\ \tau_{rz(1)} &= q\bar{\tau}_{rz(1)} \\ \varepsilon_{r(1)} &= \frac{q}{E_1}\bar{\varepsilon}_{r(1)} \\ W_{(1)} &= \frac{2q\delta}{E_{(1)}}\bar{W}_{(1)} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

公式(9)中之 $\bar{\sigma}_{r(1)}$ 、 $\bar{\sigma}_{\theta r}$ 、 $\bar{\sigma}_{z(1)}$ 和 $\bar{\tau}_{rz(1)}$ 可谓之辐向应力系数、切向应力系数、垂直应力系数和剪应力系数； $\bar{\epsilon}_{r(1)}$ 与 $\bar{W}_{(1)}$ 可谓之辐向变形系数与垂直位移系数。这些系数，实际上都是一个无因次的反常积分。只要采用一定的 μ_1 和 μ_2 对所选定的座标点 (r, z) 和特征参数 $\frac{h}{\delta}$ 、 $\frac{E_2}{E_1}$ 把它们演算出来，即可按公式(9)求得对应于某一组参数时的应力、变形与位移分量。

上述应力、变形与位移系数的积分值是在104机上计算的。该机系三地址的大型快速电子数字计算机。内储存器共2,048个单元。运算速度平均每秒8,000~10,000次〔3〕。

为了使程序比较简单，便于检查并早日得出结果，我们在程序中采用了Simpson公式。对由零阶与一阶Bessel函数，则采用了精确度足够的近似公式，而没有采用现成的Bessel函数表。

由于用机器计算时不可能算出上限为 ∞ 时的积分值，故采用了有限的上限 X_1 。在确定上限 X_1 以前，曾对各个应力、变形与位移系数之积分号内被积函数的特性进行了分析。一般说来，所有被积函数均可视作由两部分组成；其中一部分与Bessel函数有关，而另一部分与指数函数有关。与Bessel函数有关的部分显然仍是一个波动函数；当 $X \rightarrow \infty$ 时，它们的极限等于0。与指数函数有关的部分是一个单调减函数，当 $X \rightarrow \infty$ 时，它们的极限与座标值 Z 有关：当 $Z \geq 0$ 时，其极限等于0；当 $Z = -h$ 时，其极限等于1。根据此种情况，对于不同的座标点，可按不同的原则来确定积分限 X_1 。对于 $Z \geq 0$ 的那些座标点，应使由0至 X_1 的积分值能保证对数值解所要求的精度，而略去 X_1 至 ∞ 的积分余项。这时，上限 X_1 基本上可按指数函数 $e^{-\left(\frac{h+Z}{\delta}\right)X}$ 项的幂次 $\left(\frac{h+Z}{\delta}\right)X$ 确定之。对于 $Z = -h$ 的那些座标点，可以将积分限由0至 ∞ 的积分值分成两部分来计算，第一部分由0至 X_1 ，第二部分由 X_1 至 ∞ 。积分限 X_1 的确定，应使 X_1 至 ∞ 的积分能足够准确地以如下形式来表示：

$$\begin{aligned} R(\bar{\sigma}_{r1}) &= - \int_{x_1}^{\infty} J_0\left(\frac{r}{\delta}X\right) J_1(X) dX + (1-2\mu_1) \int_{x_1}^{\infty} \frac{J_1\left(\frac{r}{\delta}X\right) J_1(X)}{\frac{r}{\delta}X} dX \\ &= - \left[\int_0^{\infty} J_0\left(\frac{r}{\delta}X\right) J_1(X) dX - \int_0^{x_1} J_0\left(\frac{r}{\delta}X\right) J_1(X) dX \right] \\ &\quad + (1-2\mu_1) \left[\int_0^{\infty} \frac{J_1\left(\frac{r}{\delta}X\right) J_1(X)}{\frac{r}{\delta}X} dX - \int_0^{x_1} \frac{J_1\left(\frac{r}{\delta}X\right) J_1(X)}{\frac{r}{\delta}X} dX \right] \\ R(\bar{\sigma}_{\theta 1}) &= -2\mu_1 \int_{x_1}^{\infty} J_0\left(\frac{r}{\delta}X\right) J_1(X) dX - (1-2\mu_1) \int_{x_1}^{\infty} \frac{J_1\left(\frac{r}{\delta}X\right) J_1(X)}{\frac{r}{\delta}X} dX \\ &= -2\mu_1 \left[\int_0^{\infty} J_0\left(\frac{r}{\delta}X\right) J_1(X) dX - \int_0^{x_1} J_0\left(\frac{r}{\delta}X\right) J_1(X) dX \right] \\ &\quad - (1-2\mu_1) \left[\int_0^{\infty} \frac{J_1\left(\frac{r}{\delta}X\right) J_1(X)}{\frac{r}{\delta}X} dX - \int_0^{x_1} \frac{J_1\left(\frac{r}{\delta}X\right) J_1(X)}{\frac{r}{\delta}X} dX \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(\bar{\epsilon}_{r1}) &= -(1+\mu_1)(1-2\mu_1) \int_{x_1}^{\infty} J_1(X) \left[J_0\left(\frac{r}{\delta}X\right) - \frac{J_1\left(\frac{r}{\delta}X\right)}{\frac{r}{\delta}X} \right] dX \\
&= -(1+\mu_1)(1-2\mu_1) \left\{ \int_0^{\infty} J_1(X) \left[J_0\left(\frac{r}{\delta}X\right) - \frac{J_1\left(\frac{r}{\delta}X\right)}{\frac{r}{\delta}X} \right] dX \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{x_1} J_1(X) \left[J_0\left(\frac{r}{\delta}X\right) - \frac{J_1\left(\frac{r}{\delta}X\right)}{\frac{r}{\delta}X} \right] dX \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(\bar{W}_1) &= (1-\mu_1^2) \int_{x_1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{r}{\delta}X\right) J_1(X)}{X} dX \\
&= (1-\mu_1^2) \times \left[\int_0^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{r}{\delta}X\right) J_1(X)}{X} dX - \int_0^{x_1} \frac{J_0\left(\frac{r}{\delta}X\right) J_1(X)}{X} dX \right]
\end{aligned}$$

式中:

$$\int_0^{\infty} J_0\left(\frac{r}{\delta}X\right) J_1(X) dX = \begin{cases} 1, & r < \delta \text{ 时} \\ \frac{1}{2}, & r = \delta \text{ 时} \\ 0, & r > \delta \text{ 时} \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{J_1\left(\frac{r}{\delta}X\right) J_1(X)}{\frac{r}{\delta}X} dX = \begin{cases} \frac{1}{2}, & r \leq \delta \text{ 时} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{r}\right), & r \geq \delta \text{ 时} \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{r}{\delta}X\right) J_1(X)}{X} dX =$$

$$= \begin{cases} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1; 0\right) = 1 & r = 0 \text{ 时} \\ {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1; \frac{r^2}{\delta^2}\right) \\ \quad = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1)} \left(\frac{r}{\delta}\right)^{2n} & r < \delta \text{ 时} \\ {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2; 1\right) = \frac{2}{\pi} & r = \delta \text{ 时} \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{r} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2; \frac{\delta^2}{r^2}\right) \\ \quad = \frac{\delta}{2r} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{(n+1)\Gamma(n+1)\Gamma(n+1)} \times \left(\frac{\delta}{r}\right)^{2n} & r > \delta \text{ 时} \end{cases}$$

这时, X_1 基本上可按指数函数 $e^{-2\frac{h}{\delta}X}$ 项的幂次 $2\frac{h}{\delta}X$ 确定之。

除前述积分限外, 近似积分式中积分点的步长对数值解的精度亦有重要的影响。在我们所编的程序中, 积分点的步长是可以变化的, 步数可成倍地增加, 直至前后两次计算结果的相对误差小于规定的误差限 0.5×10^{-3} 为止。

(三) 计算结果

现在, 我们对两层接触面完全连续与两层接触面完全无摩阻力的双层弹性半无限体, 一共计算了25个坐标点。除了部分我们认为重要的, 或者应力、变形与位移分量具有极值的坐标点外, 所采用的特征参数之范围大致如下:

$$\frac{h}{\delta} = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4$$

$$\frac{E_2}{E_1} = 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3,$$

$$0.4, 0.5, 0.6, 0.8$$

计算时间采用了 $\mu_1 = 0.25$ 、 $\mu_2 = 0.35$, 因认为这样的数值大致能代表一般柔性路面材料与粘性土路基的实际情况。

计算结果是以表格形式列出的, 见附录一表1-12和附录二表1-13。这些表对应于不同的坐标点, 共 9,000 余个数据。表中对应于一组参数 $\frac{h}{\delta}$ 、 $\frac{E_2}{E_1}$ 的每一单元中, 共有 6 个数值。

这 6 个数值是按如下顺序排列的:

辐向应力系数	$\bar{\sigma}_r (i)$
切向应力系数	$\bar{\sigma}_\theta (i)$
垂直应力系数	$\bar{\sigma}_z (i)$
剪应力系数	$\bar{\tau}_{rz} (i)$
辐向变形系数	$\bar{\epsilon}_r (i)$
垂直位移系数	$\bar{W} (i)$

当需要求得对应于某一组参数的应力、变形与位移分量时, 可将表中所列相应的数值代入公式(9)中。为使用方便计, 已按表列数值绘制了 19 张图解(见附录三附图1~19)。

将表列数值代入公式(9)中可知, 在接触面上, 所有数值解都能很好地满足接合条件。此外, 对应于任何一组参数的每一单元中的数值解都能基本上满足物理方程

$$\epsilon_r (i) = \frac{1}{E (i)} [\sigma_r (i) - \mu_1 (\sigma_\theta (i) + \sigma_z (i))]$$

这些情况表明, 所算得的数值解是可靠的。

附录一 双层弹性半无限体应
(两层接触面
第
($x=0$),

E_2/E_1 各种系数 $\frac{h}{\delta}$		0.05	0.1	0.15	0.2
$\frac{1}{3}$	$\bar{\sigma}_{ri}$	-4.128	-2.658	-2.038	-1.691
	$\bar{\sigma}_{\theta i}$	-4.128	-2.658	-2.038	-1.691
	$\bar{\sigma}_{zi}$	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000
	$\bar{\tau}_{rzi}$	0.000	0.000	0.000	0.000
	$\bar{s}_{rzi}$	-2.846	-1.743	-1.278	-1.018
	$\bar{w}_i$	13.06	7.121	4.952	3.819
$\frac{1}{2}$	$\bar{\sigma}_{ri}$	-3.564	-2.514	-2.015	-1.714
	$\bar{\sigma}_{\theta i}$	-3.564	-2.514	-2.015	-1.714
	$\bar{\sigma}_{zi}$	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000
	$\bar{\tau}_{rzi}$	0.000	0.000	0.000	0.000
	$\bar{s}_{rzi}$	-2.423	-1.635	-1.261	-1.036
	$\bar{w}_i$	10.55	6.037	4.322	3.403
1	$\bar{\sigma}_{ri}$	-2.057	-1.660	-1.446	-1.307
	$\bar{\sigma}_{\theta i}$	-2.057	-1.660	-1.446	-1.307
	$\bar{\sigma}_{zi}$	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000
	$\bar{\tau}_{rzi}$	0.000	0.000	0.000	0.000
	$\bar{s}_{rzi}$	-1.293	-0.9947	-0.8348	-0.7300
	$\bar{w}_i$	6.541	4.041	3.053	2.509
$\frac{3}{2}$	$\bar{\sigma}_{ri}$	-1.436	-1.240	-1.131	-1.058
	$\bar{\sigma}_{\theta i}$	-1.436	-1.240	-1.131	-1.058
	$\bar{\sigma}_{zi}$	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000
	$\bar{\tau}_{rzi}$	0.000	0.000	0.000	0.000
	$\bar{s}_{rzi}$	-0.8270	-0.6798	-0.5983	-0.5437
	$\bar{w}_i$	4.815	3.111	2.430	2.052
2	$\bar{\sigma}_{ri}$	-1.162	-1.047	-0.9823	-0.9387
	$\bar{\sigma}_{\theta i}$	-1.162	-1.047	-0.9823	-0.9387
	$\bar{\sigma}_{zi}$	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000
	$\bar{\tau}_{rzi}$	0.000	0.000	0.000	0.000
	$\bar{s}_{rzi}$	-0.6213	-0.5351	-0.4868	-0.4540
	$\bar{w}_i$	3.887	2.598	2.082	1.794
3	$\bar{\sigma}_{ri}$	-0.9422	-0.8895	-0.8597	-0.8394
	$\bar{\sigma}_{\theta i}$	-0.9422	-0.8895	-0.8597	-0.8394
	$\bar{\sigma}_{zi}$	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000
	$\bar{\tau}_{rzi}$	0.000	0.000	0.000	0.000
	$\bar{s}_{rzi}$	-0.4566	-0.4171	-0.3948	-0.3795
	$\bar{w}_i$	2.925	2.060	1.713	1.519
4	$\bar{\sigma}_{ri}$	-0.8600	-0.8301	-0.8131	-0.8014
	$\bar{\sigma}_{\theta i}$	-0.8600	-0.8301	-0.8131	-0.8014
	$\bar{\sigma}_{zi}$	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000
	$\bar{\tau}_{rzi}$	0.000	0.000	0.000	0.000
	$\bar{s}_{rzi}$	-0.3950	-0.3726	-0.3598	-0.3511
	$\bar{w}_i$	2.433	1.784	1.522	1.376

力、变形与位移系数表 (表1~12)

完 全 连 续)

表 1

层
z=-h)

0.25	0.3	0.4	0.5	0.6	0.8
-1.468	-1.312	-1.107	-0.9776	-0.8872	-0.7685
-1.468	-1.312	-1.107	-0.9776	-0.8872	-0.7685
-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
-0.8510	-0.7341	-0.5805	-0.4832	-0.4154	-0.3264
3.121	2.647	2.044	1.676	1.428	1.114
-1.510	-1.362	-1.159	-1.026	-0.9312	-0.8040
-1.510	-1.362	-1.159	-1.026	-0.9312	-0.8040
-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
-0.8828	-0.7716	-0.6196	-0.5196	-0.4484	-0.3530
2.826	2.429	1.916	1.598	1.381	1.104
-1.206	-1.129	-1.017	-0.9398	-0.8822	-0.8017
-1.206	-1.129	-1.017	-0.9398	-0.8822	-0.8017
-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
-0.6544	-0.5966	-0.5131	-0.4548	-0.4116	-0.3512
2.159	1.914	1.590	1.385	1.243	1.057
-1.005	-0.9633	-0.9025	-0.8595	-0.8271	-0.7814
-1.005	-0.9633	-0.9025	-0.8595	-0.8271	-0.7814
-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
-0.5035	-0.4725	-0.4268	-0.3946	-0.3704	-0.3361
1.808	1.636	1.407	1.261	1.159	1.025
-0.9065	-0.8814	-0.8444	-0.8180	-0.7981	-0.7699
-0.9065	-0.8814	-0.8444	-0.8180	-0.7981	-0.7699
-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
-0.4299	-0.4111	-0.3833	-0.3635	-0.3486	-0.3274
1.607	1.475	1.300	1.188	1.109	1.006
-0.8243	-0.8125	-0.7950	-0.7826	-0.7731	-0.7596
-0.8243	-0.8125	-0.7950	-0.7826	-0.7731	-0.7596
-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
-0.3682	-0.3594	-0.3463	-0.3369	-0.3298	-0.3197
1.393	1.303	1.185	1.108	1.055	0.9845
-0.7928	-0.7860	-0.7760	-0.7688	-0.7634	-0.7556
-0.7928	-0.7860	-0.7760	-0.7688	-0.7634	-0.7556
-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
-0.3446	-0.3395	-0.3320	-0.3266	-0.3225	-0.3167
1.281	1.214	1.124	1.067	1.026	0.9731

E_2/E_1 各种系数		0.05	0.1	0.15	0.2
$\frac{h}{\delta}$					
$\frac{1}{3}$	$\bar{\sigma}_{ri}$	-0.9287	-0.5648	-0.4452	-0.3858
	$\bar{\sigma}_{\theta i}$	-2.474	-1.613	-1.261	-1.064
	$\bar{\sigma}_{zi}$	-0.5000	-0.5000	-0.5000	-0.5000
	$\bar{\tau}_{rzi}$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	$\bar{s}_{rzi}$	-0.1852	-0.0386	-0.0050	-0.0052
	$\bar{w}_i$	9.331	4.879	3.328	2.537
$\frac{1}{2}$	$\bar{\sigma}_{ri}$	-1.149	-0.7151	-0.5486	-0.4608
	$\bar{\sigma}_{\theta i}$	-2.260	-1.554	-1.241	-1.058
	$\bar{\sigma}_{zi}$	-0.5000	-0.5000	-0.5000	-0.5000
	$\bar{\tau}_{rzi}$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	$\bar{s}_{rzi}$	-0.4595	-0.2015	-0.1134	-0.0713
	$\bar{w}_i$	8.196	4.447	3.090	2.384
1	$\bar{\sigma}_{ri}$	-0.9984	-0.7238	-0.5918	-0.5116
	$\bar{\sigma}_{\theta i}$	-1.492	-1.164	-0.9959	-0.8896
	$\bar{\sigma}_{zi}$	-0.5000	-0.5000	-0.5000	-0.5000
	$\bar{\tau}_{rzi}$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	$\bar{s}_{rzi}$	-0.5003	-0.3079	-0.2178	-0.1642
	$\bar{w}_i$	5.646	3.313	2.415	1.930
$\frac{3}{2}$	$\bar{\sigma}_{ri}$	-0.7475	-0.5876	-0.5044	-0.4510
	$\bar{\sigma}_{\theta i}$	-1.081	-0.9050	-0.8104	-0.7484
	$\bar{\sigma}_{zi}$	-0.5000	-0.5000	-0.5000	-0.5000
	$\bar{\tau}_{rzi}$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	$\bar{s}_{rzi}$	-0.3622	-0.2364	-0.1768	-0.1389
	$\bar{w}_i$	4.261	2.615	1.968	1.613
2	$\bar{\sigma}_{ri}$	-0.5860	-0.4849	-0.4304	-0.3945
	$\bar{\sigma}_{\theta i}$	-0.8701	-0.7627	-0.7037	-0.6643
	$\bar{\sigma}_{zi}$	-0.5000	-0.5000	-0.5000	-0.5000
	$\bar{\tau}_{rzi}$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	$\bar{s}_{rzi}$	-0.2435	-0.1692	-0.1295	-0.1034
	$\bar{w}_i$	3.446	2.183	1.682	1.405
8	$\bar{\sigma}_{ri}$	-0.4240	-0.3745	-0.3470	-0.3285
	$\bar{\sigma}_{\theta i}$	-0.6823	-0.6314	-0.6028	-0.5835
	$\bar{\sigma}_{zi}$	-0.5000	-0.5000	-0.5000	-0.5000
	$\bar{\tau}_{rzi}$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	$\bar{s}_{rzi}$	-0.1284	-0.0917	-0.0713	-0.0577
	$\bar{w}_i$	2.551	1.695	1.353	1.162
4	$\bar{\sigma}_{ri}$	-0.3538	-0.3249	-0.3087	-0.2977
	$\bar{\sigma}_{\theta i}$	-0.6067	-0.5773	-0.5607	-0.5494
	$\bar{\sigma}_{zi}$	-0.5000	-0.5000	-0.5000	-0.5000
	$\bar{\tau}_{rzi}$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	$\bar{s}_{rzi}$	-0.0772	-0.0556	-0.0435	-0.0354
	$\bar{w}_i$	2.078	1.432	1.173	1.028