高等学校教学用書

弹性及塑性理論

王光远编

建筑工程出版社

彈性及塑性理論

王光遠 編

建筑工程出版社出版
·1959·

內 容 提 要

本书系編者根据本人在哈尔濱工业大学的讲稿加以整理补充編写成的。全书內容包括"弹性理論"的基本理論和方法、弹性理論的平面問題、弹性波、板的計算、板的稳定、用有限差分法来解弹性理論問題的近似方法，以及弹塑小变形理論的基本理論和方法等等。其中以闡明物理概念为主，尽量避免复杂的数学証明。此外，各章后均附有一定数量的习題，以帮助讀者更深入理解該章內容。

本书可以作为高等工业学校土木、机械等系有关专业的教学参考书，亦可作为未学过这門課程的工程技术人員的自学参考书。

彈性及塑性理論

王光远　編

1959年3月第1版　1959年3月第1次印刷　4,060册

850×1168 · 1/32 · 210千字 · 印張 7 15/16 · 定价(10)1.35元

成都印制厂印刷 · 新华書店發行 · 書号：747

建筑工程出版社出版(北京市西郊百万庄)

(北京市書刊出版業营業許可証出字第052号)

目 录

第二部分　塑性理論簡編

第三部分 补充材料

編者前言

本书的目的是向讀者介紹弹性及塑性理論的基本知識，并指出这些理論是怎样用来解决实际問題的。它所涉及的范围基本上符合哈尔濱工业大学现用“弹性及塑性理論教学大綱”（它以苏联的教学大綱为藍本）所包括的內容。因此本书的主要对象是五年制高等工业学校土木及机械等系有关专业的学生，同时也可以作为工程技术人員的参考书。

本书共分为三个部分。在第一部分中介紹了“弹性理論”的基本理論和方法、弹性理論的平面問題、板的計算、用有限差分法解弹性理論問題等。这一部分的講授时間約需40学时。

在第二部分中介紹了“弹塑小变形理論”的基本概念和方法，講授时間約需 8—10 学时。

以上两部分，为基本部分，是一般教学計划中必須要講的內容。在第三部分中給了一些补充材料，包括板的弹性稳定及有关弹性波的基本知識。这一部分的講授时間約需10学时。

在編写此书时，編者力求闡述問題时条理清楚、物理概念明确，使讀者易于理解，并在本书篇幅所許可的范围內尽可能使理論联系工程实际。因此，某些与物理概念关系較少的比較复杂的数学运算只指出参考資料而未加闡述。另外有些十分簡单的运算或証明，編者也未加推演，而作为練习留給讀者自己去作。此外，在本书中还附有一定数量的习题。

弹性及塑性理論的范疇极为丰富广泛。我国学者錢学森、錢令希、胡海昌等在这方面都曾作出貢献。可惜本书由于篇幅的限制未能給以应有的反映。

在編写本书的过程中主要参考了以下資料和教本：

1) Н.Л. Кузьмин,“Краткий курс теории упругости”, 1951,(哈工大专家講义)。

2) Н.Л. Кузьмин, “Краткий курс теории пластичности”, 1952,(哈工大专家講义).

3) П.Н. Чистяков 1953年在哈工大講課的講稿。

4) S.Timoshenko and J.N. Goodier, “Theory of Elasticity”, 1951。

5) С.П. Никифоров, “Теория упругости и пластичности”, 1955。

6) Н.И. Безухов, “Теория упругости и пластичности”, 1953。

7) Б.Н. Жемочкин, “Теория упругости” 1948。

8) М.М. Филоненко-Бородич, “Теория упругости”, 1947。

9) S.Timoshenko,Theory of Plates and Shells, 1940.

10) 金夢石,“弹性理論例題与習題”, 1956,(哈工大建筑力学教研室师資研究生結业工作)。

本书虽曾作为講义由編者講授过几次，但不妥之处仍在所难免，希望讀者多予指正。此外編者对苏联专家Н.Л.Кузьмин教授及П.Н.Чистяков副教授的指导和帮助表示衷心的感謝。

編 者

1958年2月

第一部分　弹性理論

第一章　緒　　論

§1-1　彈性理論的性質及其任务

弹性理論是建筑力学的一个組成部分，是研究静止的或运动着的弹性体在外力作用下所引起的应力及变形的科学。

从这一定义可以看出弹性理論和建筑力学的其他組成部分——材料力学及結构力学——的性質和任务都是一致的。但是它們之間也有一定的区别。这些区别主要表现在以下三个方面。

1. 出发条件不同。在材料力学及結构力学中除了一些必要的基本假設以外，还根据不同的研究对象为了簡化問題而添加了一些所謂“附加假設”(例如，对梁所作的断面平面假設)。这些假設往往只是在一定条件下才与实际情况趋于接近，而当不符合这些条件时就会造成很大的誤差。例如图1所示的梁，当其断面高度h与其跨度l相較为値不大时，認为垂直应力σ沿断面高度直綫分布（图1,a)，是与实际情况相符的；但当h大于$l/4$时应力的分布情況将大不相同(图1,b)，此时如果仍按材料力学的公式进行計算将造成錯誤。又如图2所示之变断面梁，在断面A-A处的垂直应力σ与

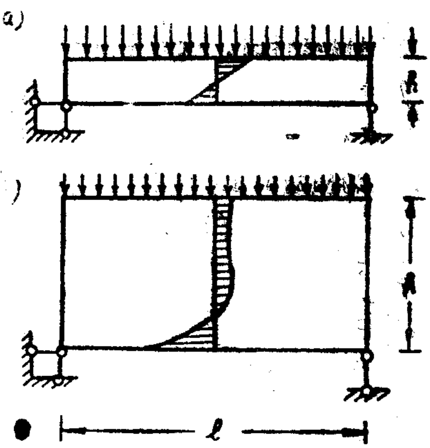

图 1

切应力 τ 沿断面高度的分布图(按弹性理論所得出者)与用材料力学直梁公式計算的結果有很大的差别，尤其是切应力 τ 的分布图与用材料力学分析的結果是截然相反的。由以上二例可以看出材料力学計算的結果只在一定范圍內才与实际的情况出入不大，在此范围以外就不能应用。其原因就是它所采取的一些附加假設往往是粗糙的，不能与某些条件下的实际情况相一致。因此，在弹性理論中摒弃了这些附加假設。所以說，这两門科学的出发条件是不相同的。但应說明的是，在所謂"应用弹性理論"(如平板及薄壳的計算等問題)中还是要采用一些附加假設的，所以"应用弹性理論"与材料力学之間的区别就更是微不足道了

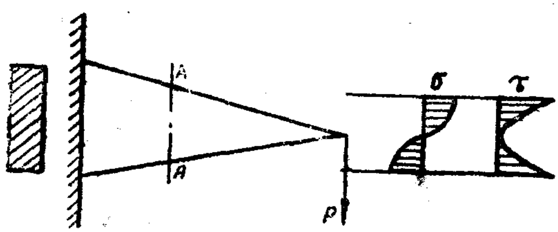

图 2

2. 所用方法不同。材料力学及結构力学在研究平衡条件及变形諧調条件时，所考虑的对象是由一个构件或若干相互联系的构件中切截出来的"切离体"，因而往往不能保証构件各細小部分的平衡和变形的諧調。如图 3 所示之杆件按材料力学的方法計算时，認为横断面上的垂直应力是平均分布的，而且在断面上沒有切应力。现在如果在杆件边緣上切下一小部分(图3)来看，显然这一部分将无法平衡。

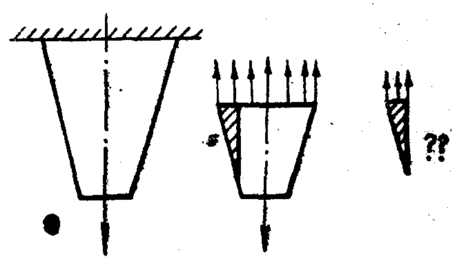

图 3

弹性理論也要研究平衡条件及变形諧調条件，但它考虑的对象是組成該弹性体的一切"微单元体"，因而可

以保証弹性体所有各部分的平衡和变形的諧調(参閱本章 § 1-4)。

所以說，材料力学和結构力学与弹性理論所用的方法不同。与此相应，它們所使用的数学工具也不尽相同，所得結果的精确程度也不相同。

3. 解决問題的范围不同。弹性理論是比材料力学更为有力的一件武器。許多材料力学不能解决的問題，如非圓断面杆件的扭轉問題，应力集中的問題，接触应力的問題，平板、薄壳、弹性地基等等的計算問題都必須用弹性理論的方法来解决。当然这并不是說所有問題都已經能用弹性理論的方法来解决。在任何时候都不可能把所有問題解决无遺，因为物質是无穷无尽的，是无限发展的，虽然人类具有无限的認識的可能性，但在一定阶段中人們的認識水平仍有历史的局限性。人們認識的无限可能性和一定时代人們認識的有限水平之間的矛盾在不断解决中，就推动着科学前进。

以上就是弹性理論和材料力学之間的主要区别。但这些区别都具有相对的意义，决不能把材料力学、結构力学和弹性理論截然分开，它們之間具有密切的联系，共同組成广义的建筑力学。很多問題我們可以說它們是弹性理論的問題，也可以說它們是材料力学的問題，同样，也可以說它們是結构力学的問題。尤其是"应用弹性理論"和材料力学之間的界限是很难划清的。

从以上所述也可以看出弹性理論的基本任务有二：

(1) 解决材料力学及結构力学所不能解决的問題；

(2) 校核材料力学的結果，并明确材料力学公式的适用范围。

因此，决不应該認为弹性理論是脫离实际的純抽象的科学。首先，弹性理論所解决的問題都是实踐活动所提供出来的；其次，弹性理論的問題都是在实踐的基础上得到解决的；最后，弹性理論的結果都是用实踐检驗过的。这样，也就保証了弹性理論的实用性及其認識的客观性和正确性。

§ 1-2 弹性理論的基本假設

如果認为弹性理論不需要假設，这是完全錯誤的。恩格斯在

"自然辯証法"一書中曾經写道："只要自然科学在思惟着，它的发展形式就是假說"❶。弹性理論研究的对象是物体，物体有各种各样，并且是千变万化的；因而，作为一門科学，要想找出一般的規律和計算方法，势必要将千变万化的现象加以簡化和概括，这就不能离开假設。所以，列宁在其所著的"哲学笔記"中也曾写道："如果不把不間断的东西割断，不使活生生的东西簡单化、粗糙化，不加以割碎，不使之僵化，那末我們就不能想像、表达、測量、描述运动。思惟对运动的描述总是粗糙化、僵化。不仅思惟是这样，而且感覚也是这样；不仅对运动是这样，而且对任何概念也都是这样"❷。所以，任何一門科学都不能完全离开假設，只不过这些假設必須是根据实际由实践中得来，而不是主观臆想的罢了。

弹性理論的几个重要的基本假設如下。

1. 認为材料是理想弹性体，也就是認为在溫度不变的条件下应力和变形呈綫性关系，同时当外力全部卸除后物体能完全地恢复未加外力时原有的形状。对多数材料而言，在外力不大时（应力不超过弹性极限）这一假設基本上与实际情况是符合的。当超出了此一范围时即属塑性理論研究的范疇。

2. 認为材料是連續的。为了解决弹性理論中的問題，可以不必考虑材料是由分子所組成的这一事实，而認为材料是連續性的介質充滿了該材料所占据的空間。从对物体的宏观来看，这一假設是完全可以允許的。而且事实也証明了根据此一假設所得的弹性理論的結果是符合实驗結果的。

3. 認为材料是匀質的和各向同性的，也就是認为在物体所有各点和在所有方向上材料的性質是相同的。这一假設对一般的金屬材料来說基本上是符合的。因为虽然金屬材料是由細小的晶体所組成，但由于晶体很小而且排列方向很不規則，所以在各个方向上表现出来的是材料的平均的性質。有关各向异性的材料的問

---

❶ 恩格斯，自然辯証法，人民出版社1956年版，第201頁。

❷ 列寧，哲學筆記，人民出版社1957年版，第263頁。

题形成了弹性理論中一个特殊的部門。

4. 認为位移和变形很小，也就是說与物体的尺寸比較起来，可以将变形及位移当作"微量"看待，而在同一方程式中高次的微量可以忽略不計。

5. 認为弹性体內幷无初应力，也就是認为弹性体在未受外界影响(外力及温度变化等)以前其內部幷无应力。

以上就是弹性理論的基本假設，它們和材料力学的基本假設幷无区别。所不同的，就是在材料力学中除了这些基本假設以外还要針对不同的具体問題作出一些粗糙的"附加假設"而已。

§1-3 圣文南原理

因为用弹性理論的方法解題时不仅要使所得結果能保証物体內部各点的平衡，而且还要保証物体表面上各点的平衡，所以当外力的分布情况一有改变时，所得的解也应不同。但在工程实踐中我們往往只知道某一部分所受外力的合力，而不能确知外力的分布情况。例如，对一个承受純彎曲的梁而言，我們只知道梁的两端承受等值反向的两个力偶，而組成这些力偶的外力在梁端表面上是如何分布的則往往不能确知。即使能够确知，但要对此外力的每一种分布情况(可有无限多种情况)求出一个解来，也是不胜其煩的。事实上，对实踐来說，也无此必要。解决此一問題的基础就是本节所要闡明的圣文南(St. Venant)原理。

根据圣文南原理，作用在物体表面某一小部分上的自相平衡的外力，只在靠近受力表面处引起局部应力，在离受力表面稍远(与受力表面之尺寸相較)之处的应力便小得可以忽略不計。

目前尚不能对圣文南原理进行周密的理論的証明，但可以証明上述外力影响的局部性是与变形位能最小相适应的❶。同时，此一原理也被很多实驗及理論研究的結果所証实。例如一条很长的梁(其断面寬度等于1)受到一对集中力P的作用(图4.a)，根据

❶ 參閱論文 J.N.Goodier, Phil.Mag., Series 7, vol.24, p.325, 1937; J. Applied, phys. vol.13, p.167, 1942; 或參閱S. Timoshenko and J.N. Goodier, Theory of Elasticity, p.150, 1951。

精确的解，在$y=0$的平面上垂直应力σ_y的分布情况将如图4，b所示。由图可以看出，在离开O点$0.5h$处应力已变得很小。此外，日常的生活經驗也告訴我們此一原理的正确性。例如，以鉗夹指尖，則只能感到局部的疼痛。

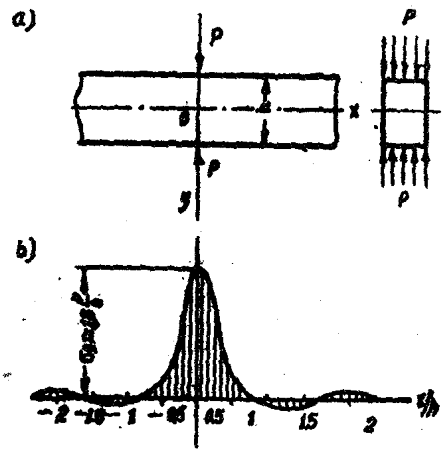

图 4

同理，如果弹性体在某处被固定起来，而在被固定处或其附近施加外力，則也只能引起局部的应力。

利用上述的圣文南原理可以很容易地証明圣文南原理的另一种表现形式：如果作用在物体表面某一小部分的外力被静力相当的另一組外力(作用在同一部分上)所代替，則只引起局部的应力及变形的改变，而对較远处(与受力部分的尺寸相較)的影响小得可以忽略不計。例如在图5(a)、(b)、(c)所示的三种情况中，如果梁断面的高度与梁长相較很小的話，这些外力P所引起的应力，除在靠近外力所作用的自由端一小部分外，基本上是相同的。因为事实上，情况(b)等于情况(a)加情况(d)，情况(c)等于情况(a)加情况(e)，而情况(d)与情况(e)的外力只能引起局部的应力和变形。所以情况(a)、(b)及(c)都可以利用同一个解答。这样，弹性理論中各个問題解答的应用范围便大大地扩大了。

在叙述上述原理时，我們所理解的物体都是实心的；对薄壁結

构而言，应用起来要特别当心。例如图 6 所示之空心杆件在自相

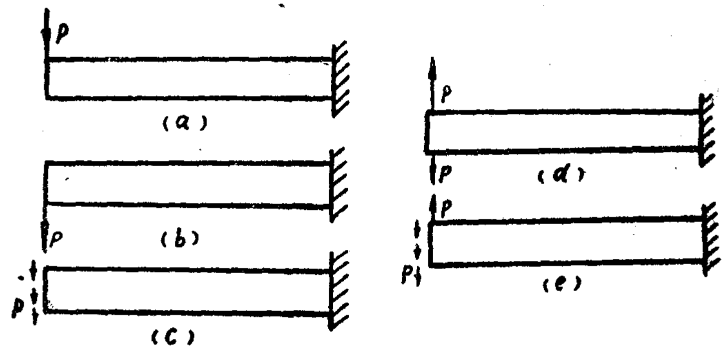

图 5

平衡的力系（二个P）作用下所引起的应力和变形自然不是局部的。双力偶对工字梁的影响也不是局部的。但我們不应将此一情况視作圣文南原理的失效，而是应該更正确地理解外力所作用的范围。Филоненко-Бородич 对此一原理作了如下的补充：自相平衡的力系所作用的范围与該受力处之最小尺寸比較起来必須是不大的。这样，要想符合圣文南原理，图 6 中之梁所受之二力 P 就应該作用在同一翼緣上，如图 7 所示。

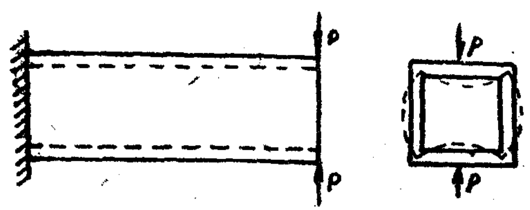

图 6

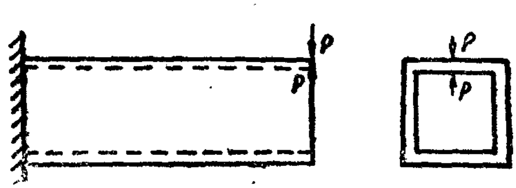

图 7

§1-4 彈性理論解决問題的基本方法

任何一个弹性体承受外力时，其内部所产生的应力和变形都是座标值的函数，也就是說各个点的应力和变形可能是不相同的。因而应力和变形的未知数都有无限多个。即使对一个受二集中力中心拉伸的等直杆件而言也不例外，材料力学中由于假設这种杆件断面中的应力平均分布，所以才能把无限多个未知数化为一个未知数，并利用一个靜力学方程式求出其解。因为弹性理論摒弃了这一类的假設，所以从弹性理論的观点来看，根本沒有所謂靜定問題，一切問題都是靜不定的，也就是說只靠靜力学条件都是无法解决的（严格的說明见§2-2）。所以弹性理論中解决任何問題时都要考虑三个方面：靜力学方面、几何方面、物理方面。同时，为了保証物体各部分的平衡和变形的諧調，就必須把物体想像地分割成无限多个极限小的单元体，研究它們的平衡和各单元体之間变形的諧調。又因为这些单元体比較规则，所以可以得出它們的典型的平衡方程式和变形諧調方程式。这些方程式都是微分方程式。为了确定这些微分方程式的解中的常数，自然还要利用边界条件，即所謂表面条件。在第一篇中将分别研究上述三个方面。

在“靜力学方面”这一章中将研究平衡条件、表面条件及应力分析，即研究所謂“应力理論”。

在“几何方面”这一章中将研究位移、变形及变形諧調条件，即研究所謂“变形理論”。

在“物理方面”这一章中将研究应力和变形之間的关系，即所謂“广义的虎克定律”。

在所得的各方程式中，并非每个方程式都包括所有的未知函数。因此，可以首先将一部分未知函数作为“基本未知函数”，先将它們求出，然后再求出其他未知函数。采用应力作基本未知函数时，则称为“应力法”。采用位移作基本未知函数时，则称为“位移法。”采用一部分应力和一部分位移作基本未知函数时，则称为“混合法”。这和結构力学中計算刚架的所謂力法、位移法、混合法的