

242190

基本館藏

高等学校教学用书

弹性及塑性理论

王光远 编

建筑工程出版社

321

5(8)321

1093

彈性及塑性理論

王光遠 編

建筑工程出版社出版

• 1959 •

內 容 提 要

本书系編者根据本人在哈尔滨工业大学的講稿加以整理补充編写成的。全书內容包括“弹性理論”的基本理論和方法、弹性理論的平面問題、弹性波、板的計算、板的稳定、用有限差分法来解弹性理論問題的近似方法，以及弹塑小变形理論的基本理論和方法等等。其中以闡明物理概念为主，尽量避免复杂的数学証明。此外，各章后均附有一定数量的习题，以帮助讀者更深入理解該章內容。

本书可以作为高等工业学校土木、机械等系有关专业的教学参考书，亦可作为未学过这门課程的工程技術人員的自学参考书。

彈 性 及 塑 性 理 論

丑 光 远 編

1950年3月第1版 1959年3月第1次印刷 4,080册

850×1168 · 1/32 · 210千字 · 印張7 $\frac{5}{16}$ · 定价(10)1.35元

成都印制厂印刷 新华書店發行 書号: 747

建筑工程出版社出版(北京市西郊百万庄)

(北京市書刊出版業營業許可証出字第052号)

目 录

編者前言	7
------------	---

第一部分 彈性理論

第一章 緒 論	9
§ 1-1 彈性理論的性質及其任务	9
§ 1-2 彈性理論的基本假設	11
§ 1-3 圣文南原理	13
§ 1-4 彈性理論解決問題的基本方法	16
第一篇 彈性理論的基本方程式及空間問題	18
第二章 靜力学方面(应力理論)	18
§ 2-1 外力及应力的符号	18
§ 2-2 平衡微分方程式	21
§ 2-3 表面条件	25
§ 2-4 任意斜面上的应力	27
§ 2-5 应力张量的概念	28
§ 2-6 主应力及应力张量的几个不变量	30
§ 2-7 最大切应力	34
第三章 几何方面(变形理論)	37
§ 3-1 位移及变形的符号	37
§ 3-2 变形分量与位移分量間的微分关系	39
§ 3-3 变形連續方程式(变形諧調方程式)	41
§ 3-4 一点附近变形之分析	44
§ 3-5 变形张量的概念	46
第四章 物理方面(应力与变形間的关系)	48
§ 4-1 广义虎克定律	48
§ 4-2 体积虎克定律	49
§ 4-3 广义虎克定律的其他表示形式	60

第五章 基本方程式的分析及解題方法	52
§ 5-1 概 論	52
§ 5-2 用位移表示的平衡微分方程式	53
§ 5-3 用位移表示的表面条件	53
§ 5-4 用应力表示的变形連續方程式(体积力为常数)	54
§ 5-5 应力法解題的步驟及所用公式	55
§ 5-6 位移法解題的步驟及所用公式	56
§ 5-7 彈性理論答案的唯一性	58
第六章 空間問題簡例	60
§ 6-1 等直杆件的純彎曲	60
§ 6-2 等直杆件的純扭轉	68
§ 6-3 橢圓断面等直杆件的扭轉	73
§ 6-4 圓断面等直杆件的扭轉	76
§ 6-5 薄膜比拟法	76
§ 6-6 寬度相同的窄条断面杆件之扭轉	79
第二篇 彈性理論的平面問題	83
第七章 平面問題及其基本方程式	83
§ 7-1 广义的平面应力状态	83
§ 7-2 平面变形	85
§ 7-3 以应力法解平面問題的基本方程式	88
§ 7-4 利用应力函数解平面問題	90
第八章 利用直角座标解平面問題	92
§ 8-1 用多項式作为应力函数	92
§ 8-2 端面受力的悬臂梁之計算	96
§ 8-3 承受均布荷載的簡支梁之計算	103
§ 8-4 三角形断面坝的計算	106
§ 8-5 长方形断面坝的計算	109
§ 8-6 承受任意荷載的簡支梁之計算	110
第九章 利用极座标解平面問題	114
§ 9-1 引 言	114
§ 9-2 極座标平面問題的基本方程式	114
§ 9-3 軸对称問題	120

§ 9-4	厚壁管之計算	122
§ 9-5	曲杆的純彎曲	125
§ 9-6	具有圓孔的受拉平板	128
§ 9-7	尖端承受集中力的楔形体	132
§ 9-8	半無限平面體的計算	136

第三篇 應用彈性理論及近似方法 145

引 言 145

第十章 板的計算 146

§ 10-1	板的彎曲	146
§ 10-2	附加假設	148
§ 10-3	板的基本方程式	151
§ 10-4	內力及應力的公式	154
§ 10-5	边界条件	157
§ 10-6	具有固定周边的橢圓板之計算	159
§ 10-7	具有鉸支邊的長方形板之計算	162
§ 10-8	窄長方形板的柱面彎曲	167
§ 10-9	利用極座標計算圓板	170

第十一章 用有限差分法解彈性理論問題 175

§ 11-1	有限差分法的基本概念	175
§ 11-2	用有限差分法解扭轉問題	178
§ 11-3	用有限差分法解平面問題	180
§ 11-4	牆梁的計算	183
§ 11-5	板的薄膜比拟	186
§ 11-6	用有限差分法計算板	188

第二部分 塑性理論簡論

第十二章 彈塑小變形理論 193

§ 12-1	序 論	193
§ 12-2	應力張量及變形張量的分解	195
§ 12-3	八面體應力及變形	197
§ 12-4	廣義應力及廣義變形	199
§ 12-5	廣義應力及廣義變形間的关系	200

§ 12-6	塑性理論的物理方程式	202
§ 12-7	主动变形及简单施荷	204
§ 12-8	卸荷理論	205
§ 12-9	弹塑小变形理論的基本方程式	207
§ 12-10	純弯曲	207
§ 12-11	理想塑性体極限情况下的平面問題	210
§ 12-12	厚壁管的極限荷載	212

第三部分 补充材料

补充材料 I	板的弹性稳定	215
§ I-1	关于临界状态及临界荷載的概念	215
§ I-2	在稳定問題中弹性体系的自由度	218
§ I-3	求临界荷載的方法	220
§ I-4	板的平衡微分方程式	222
§ I-5	四周簡支的长方形板之稳定	226
§ I-6	承受压力的两边为簡支, 另外两边为各种支承的 长方形板之稳定	230
§ I-7	长方形板的临界应力	234
§ I-8	加劲肋的安置	234
补充材料 II	在弹性介質中波的传播	239
§ II-1	引 言	239
§ II-2	运动微分方程式	239
§ II-3	无限弹性介質中的集散波和畸变波	240
§ II-4	无限弹性介質中的平面波(縱波及橫波)	244
§ II-5	无限弹性介質中的球面波	247
§ II-6	表面波(瑞利波)	249

編者前言

本書的目的是向讀者介紹彈性及塑性理論的基本知識，並指出這些理論是怎樣用來解決實際問題的。它所涉及的范围基本上符合哈爾濱工業大學現用“彈性及塑性理論教學大綱”（它以蘇聯的教學大綱為藍本）所包括的內容。因此本書的主要對象是五年制高等工業學校土木及機械等系有關專業的学生，同時也可以作為工程技術人員的參考書。

本書共分為三個部分。在第一部分中介紹了“彈性理論”的基本理論和方法、彈性理論的平面問題、板的計算、用有限差分法解彈性理論問題等。這一部分的講授時間約需40學時。

在第二部分中介紹了“彈塑小變形理論”的基本概念和方法，講授時間約需8—10學時。

以上兩部分，為基本部分，是一般教學計劃中必須要講的內容。在第三部分中給了一些補充材料，包括板的彈性穩定及有關彈性波的基本知識。這一部分的講授時間約需10學時。

在編寫此書時，編者力求闡述問題時條理清楚、物理概念明確，使讀者易于理解，並在本書篇幅所許可的範圍內尽可能使理論聯系工程實際。因此，某些與物理概念關係較少的比較複雜的數學運算只指出參考資料而未加闡述。另外有些十分簡單的運算或證明，編者也未加推演，而作為練習留給讀者自己去作。此外，在本書中還附有一定數量的習題。

彈性及塑性理論的范疇極為豐富廣泛。我國學者錢學森、錢令希、胡海昌等在這方面都曾作出貢獻。可惜本書由於篇幅的限制未能給以應有的反映。

在編寫本書的過程中主要參考了以下資料和教本：

- 1) Н. Л. Кузьмин, "Краткий курс теории упругости", 1951, (哈工大专家讲义)。
- 2) Н. Л. Кузьмин, "Краткий курс теории пластичности", 1952, (哈工大专家讲义)。
- 3) П. Н. Чистяков 1953年在哈工大讲课的讲稿。
- 4) S. Timoshenko and J. N. Goodier, "Theory of Elasticity", 1951。
- 5) С. П. Шкифоров, "Теория упругости и пластичности", 1955。
- 6) Н. И. Безухов, "Теория упругости и пластичности", 1953。
- 7) Б. Н. Жемочкин, "Теория упругости" 1948。
- 8) М. М. Филоненко-Бородич, "Теория упругости", 1947。
- 9) S. Timoshenko, Theory of Plates and Shells, 1940。
- 10) 金夢石, "弹性理論例題与習題", 1956, (哈工大建筑力学教研室师資研究生結业工作)。

本书虽曾作为讲义由編者讲授过几次, 但不妥之处仍在所难免, 希望讀者多予指正。此外編者对苏联专家Н. Л. Кузьмин教授及П. Н. Чистяков副教授的指导和帮助表示衷心的感谢。

編 者

1958年2月

第一部分 彈性理論

第一章 緒 論

§ 1-1 彈性理論的性質及其任務

彈性理論是建筑力学的一个組成部分，是研究靜止的或運動着的彈性體在外力作用下所引起的應力及變形的科學。

從這一定義可以看出彈性理論和建筑力学的其他組成部分——材料力学及結構力学——的性質和任務都是一致的。但是它們之間也有一定的區別。這些區別主要表現在以下三個方面。

1. 出發條件不同。在材料力学及結構力学中除了一些必要的基本假設以外，還根據不同的研究對象為了簡化問題而添加了一些所謂“附加假設”（例如，對梁所作的斷面平面假設）。這些假設往往只是在一定條件下才與實際情況趨於接近，而當不符合這些條件時就會造成很大的誤差。例如图1所示的梁，當其斷面高度 h 與其跨度 l 相較為值不大時，認為垂直應力 σ 沿斷面高度直線分布（图1, a），是與實際情況相符的；但當 h 大於 $l/4$ 時應力的分布情況將大不相同（图1, b），此時如果仍按材料力学的公式進行計算將造成錯誤。又如图2所示之變斷面梁，在斷面A-A處的垂直應力 σ 與

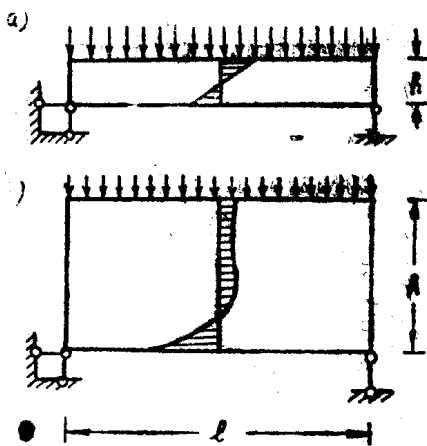


图 1

切应力 τ 沿断面高度的分布图(按弹性理論所得出者)与用材料力学直梁公式計算的結果有很大的差別，尤其是切应力 τ 的分布图与用材料力学分析的結果是截然相反的。由以上二例可以看出材料力学計算的結果只在一定范围内才与实际的情况出入不大，在此范围以外就不能应用。其原因就是它所采取的一些附加假設往往是粗糙的，不能与某些条件下的实际情况相一致。因此，在弹性理論中摒弃了这些附加假設。所以說，这两門科学的出发条件是不相同的。但应說明的是，在所謂“应用弹性理論”(如平板及薄壳的計算等問題)中还是要采用一些附加假設的，所以“应用弹性理論”与材料力学之間的區別就更是微不足道了

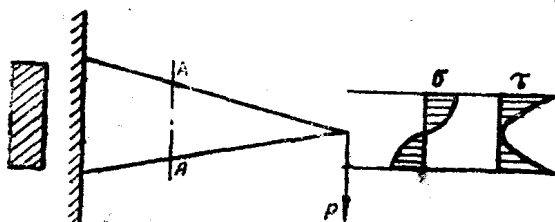


图 2

2. 所用方法不同。材料力学及結構力学在研究平衡条件及变形諧調条件时，所考虑的对象是由一个构件或若干相互联系的构件中切截出来的“切离体”，因而往往不能保証构件各細小部分的平衡和变形的諧調。如图 3 所示之杆件按材料力学的方法計算时，認為横断面上的垂直应力是平均分布的，而且在断面上沒有切应力。现在如果在杆件边缘上切下一小部分(图3)来看，显然这一部分将无法平衡。

弹性理論也要研究平衡条件及变形諧調条件，但它考虑的对象是組成該弹性体的一切“微单元体”，因而可

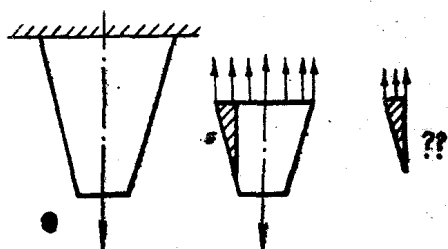


图 3

以保證彈性體所有各部分的平衡和變形的諧調(參閱本章 § 1-4)。

所以說，材料力學和結構力學與彈性理論所用的方法不同。與此相應，它們所使用的數學工具也不盡相同，所得結果的精確程度也不相同。

3. 解決問題的范围不同。彈性理論是比材料力學更為有力的一件武器。許多材料力學不能解決的問題，如非圓斷面杆件的扭轉問題，應力集中的問題，接觸應力的問題，平板、薄殼、彈性地基等等的計算問題都必須用彈性理論的方法來解決。當然這並不是說所有問題都已經能用彈性理論的方法來解決。在任何時候都不可能把所有問題解決無遺，因為物質是無窮無盡的，是無限發展的，雖然人類具有無限的認識的可能性，但在一定階段中人們的認識水平仍有歷史的局限性。人們認識的無限可能性和一定時代人們認識的有限水平之間的矛盾在不斷解決中，就推動着科學前進。

以上就是彈性理論和材料力學之間的主要區別。但這些區別都具有相對的意義，決不能把材料力學、結構力學和彈性理論截然分開，它們之間具有密切的聯繫，共同組成廣義的建築力學。很多問題我們可以說它們是彈性理論的問題，也可以說它們是材料力學的問題，同樣，也可以說它們是結構力學的問題。尤其是“應用彈性理論”和材料力學之間的界限是很難劃清的。

從以上所述也可以看出彈性理論的基本任務有二：

- (1) 解決材料力學及結構力學所不能解決的問題；
- (2) 校核材料力學的結果，並明確材料力學公式的適用範圍。

因此，決不應該認為彈性理論是脫離實際的純抽象的科學。首先，彈性理論所解決的問題都是實踐活動所提供出來的；其次，彈性理論的問題都是在實踐的基礎上得到解決的；最後，彈性理論的結果都是用實踐檢驗過的。這樣，也就保證了彈性理論的實用性及其認識的客觀性和正確性。

§ 1-2 彈性理論的基本假設

如果認為彈性理論不需要假設，這是完全錯誤的。恩格斯在

“自然辯証法”一書中曾經寫道：“只要自然科學在思惟着，它的發展形式就是假說”^①。彈性理論研究的對象是物體，物體有各種各樣，並且是千變萬化的；因而，作為一門科學，要想找出一般的規律和計算方法，勢必要將千變萬化的現象加以簡化和概括，這就不能離開假設。所以，列寧在其所著的“哲學筆記”中也寫道：“如果不把不間斷的東西割斷，不使活生生的東西簡單化、粗糙化，不加以割碎，不使之僵化，那末我們就不能想像、表達、測量、描述運動。思惟對運動的描述總是粗糙化、僵化。不僅思惟是這樣，而且感覺也是這樣；不僅對運動是這樣，而且對任何概念也都是這樣”^②。所以，任何一門科學都不能完全離開假設，只不過這些假設必須是根據實際由實踐中得來，而不是主觀臆想的罷了。

彈性理論的幾個重要的基本假設如下。

1. 認為材料是理想彈性體，也就是認為在溫度不變的條件下應力和變形呈綫性關係，同時當外力全部卸除後物體能完全地恢復未加外力時原有的形狀。對多數材料而言，在外力不大時（應力不超過彈性極限）這一假設基本上與實際情況是符合的。當超出了此一範圍時即屬塑性理論研究的範疇。

2. 認為材料是連續的。為了解決彈性理論中的問題，可以不必考慮材料是由分子所組成的這一事實，而認為材料是連續性的介質充滿了該材料所佔據的空間。從對物體的宏觀來看，這一假設是完全可以允許的。而且事實也証明了根據此一假設所得的彈性理論的結果是符合實驗結果的。

3. 認為材料是均質的和各向同性的，也就是認為在物體所有各點和在所有方向上材料的性質是相同的。這一假設對一般的金屬材料來說基本上是符合的。因為雖然金屬材料是由細小的晶體所組成，但由於晶體很小而且排列方向很不規則，所以在各個方向上表現出來的是材料的平均的性質。有關各向異性的材料的問

① 恩格斯，自然辯証法，人民出版社1956年版，第201頁。

② 列寧，哲學筆記，人民出版社1957年版，第263頁。

題形成了彈性理論中一個特殊的部門。

4. 認為位移和變形很小，也就是說與物體的尺寸比較起來，可以將變形及位移當作“微量”看待，而在同一方程式中高次的微量可以忽略不計。

5. 認為彈性體內並無初應力，也就是認為彈性體在未受外界影響（外力及溫度變化等）以前其內部並無應力。

以上就是彈性理論的基本假設，它們和材料力學的基本假設並無區別。所不同的，就是在材料力學中除了這些基本假設以外還要針對不同的具體問題作出一些粗糙的“附加假設”而已。

§ 1-3 聖文南原理

因為用彈性理論的方法解題時不僅要使所得結果能保證物體內部各點的平衡，而且還要保證物體表面上各點的平衡，所以當外力的分布情況一有改變時，所得的解也應不同。但在工程實踐中我們往往只知道某一部分所受外力的合力，而不能確知外力的分布情況。例如，對一個承受純彎曲的梁而言，我們只知道梁的兩端承受等值反向的兩個力偶，而組成這些力偶的外力在梁端表面上是如何分布的則往往不能確知。即使能夠確知，但要對此外力的每一種分布情況（可有無限多種情況）求出一個解來，也是不勝其煩的。事實上，對實踐來說，也無此必要。解決此一問題的基础就是本節所要闡明的聖文南(St. Venant)原理。

根據聖文南原理，作用在物體表面某一小部分上的自相平衡的外力，只在靠近受力表面處引起局部應力，在離受力表面稍遠（與受力表面之尺寸相較）之處的應力便小得可以忽略不計。

目前尚不能對聖文南原理進行周密的理論的證明，但可以證明上述外力影響的局部性是與變形位能最小相適應的^①。同時，此一原理也被很多實驗及理論研究的結果所証實。例如一條很長的梁（其斷面寬度等於1）受到一對集中力 P 的作用（圖4. a），根據

① 參閱論文 J. N. Goodier, Phil. Mag., Series 7, vol. 24, p. 325, 1937; J. Applied, phys. vol. 13, p. 167, 1942; 或參見 S. Timoshenko and J. N. Goodier, Theory of Elasticity, p. 150, 1951.

精确的解,在 $y=0$ 的平面上垂直应力 σ_y 的分布情况将如图4, b所示。由图可以看出,在离开 O 点 $0.5h$ 处应力已变得很小。此外,日常的生活经验也告诉我们此一原理的正确性。例如,以钳夹指尖,则只能感到局部的疼痛。

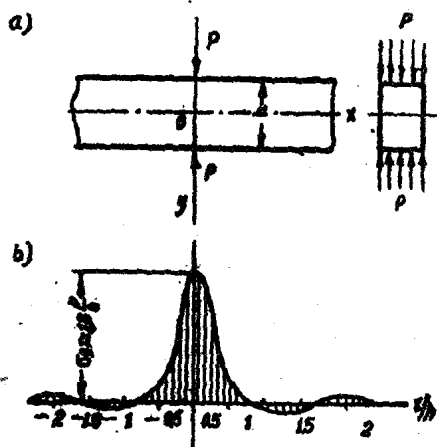


图 4

同理,如果弹性体在某处被固定起来,而在被固定处或其附近施加外力,则也只能引起局部的应力。

利用上述的圣文南原理可以很容易地证明圣文南原理的另一种表现形式:如果作用在物体表面某一小部分的外力被静力相当的另一组外力(作用在同一部分上)所代替,则只引起局部的应力及变形的改变,而对较远处(与受力部分的尺寸相较)的影响小得可以忽略不计。例如在图5(a)、(b)、(c)所示的三种情况中,如果梁断面的高度与梁长相较很小的话,这些外力 P 所引起的应力,除在靠近外力所作用的自由端一小部分外,基本上是相同的。因为事实上,情况(b)等于情况(a)加情况(d),情况(c)等于情况(a)加情况(e),而情况(d)与情况(e)的外力只能引起局部的应力和变形。所以情况(a)、(b)及(c)都可以利用同一个解答。这样,弹性理论中各个问题解答的应用范围便大大地扩大了。

在叙述上述原理时,我们所理解的物体都是实心的;对薄壁结

构而言，应用起来要特别当心。例如图 6 所示之空心杆件在自相

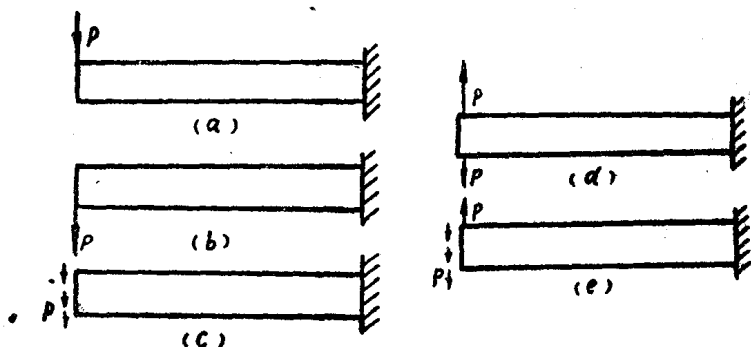


图 5

平衡的力系（二个 P ）作用下所引起的应力和变形自然不是局部的。双力偶对工字梁的影响也不是局部的。但我们不应将此一情况视作圣文南原理的失效，而是应该更正确地理解外力所作用的范围。Филоненко-Бородич 对此一原理作了如下的补充：自相平衡的力系所作用的范围与该受力处之最小尺寸比较起来必须是不大的。这样，要想符合圣文南原理，图 6 中之梁所受之二力 P 就应该作用在同一翼缘上，如图 7 所示。

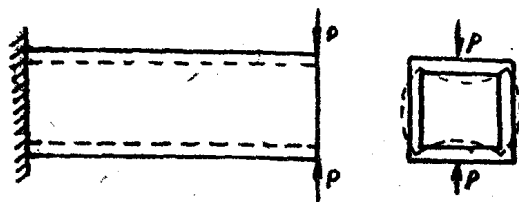


图 6

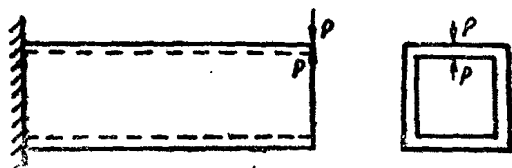


图 7

§ 1-4 彈性理論解決問題的基本方法

任何一个弹性体承受外力时，其内部所产生的应力和变形都是坐标值的函数，也就是说各个点的应力和变形可能是不相同的。因而应力和变形的未知数都有无限多个。即使对一个受二集中力中心拉伸的等直杆件而言也不例外，材料力学中由于假设这种杆件断面中的应力平均分布，所以才能把无限多个未知数化为一个未知数，并利用一个静力学方程式求出其解。因为弹性理论摒弃了这一类的假设，所以从弹性理论的观点来看，根本没有所谓静定问题，一切问题都是静不定的，也就是说只靠静力学条件都是无法解决的（严格的说明见 § 2-2）。所以弹性理论中解决任何问题时都要考虑三个方面：静力学方面、几何方面、物理方面。同时，为了保证物体各部分的平衡和变形的协调，就必须把物体想像地分割成无限多个极限小的单元体，研究它们的平衡和各单元体之间变形的协调。又因为这些单元体比较规则，所以可以得出它们的典型的平衡方程式和变形协调方程式。这些方程式都是微分方程式。为了确定这些微分方程式的解中的常数，自然还要利用边界条件，即所谓表面条件。在第一篇中将分别研究上述三个方面。

在“静力学方面”这一章中将研究平衡条件、表面条件及应力分析，即研究所谓“应力理论”。

在“几何方面”这一章中将研究位移、变形及变形协调条件，即研究所谓“变形理论”。

在“物理方面”这一章中将研究应力和变形之间的关系，即所谓“广义的虎克定律”。

在所得的各方程式中，并非每个方程式都包括所有的未知函数。因此，可以首先将一部分未知函数作为“基本未知函数”，先将它们求出，然后再求出其他未知函数。采用应力作基本未知函数时，则称为“应力法”。采用位移作基本未知函数时，则称为“位移法”。采用一部分应力和一部分位移作基本未知函数时，则称为“混合法”。这和结构力学中计算刚架的所谓力法、位移法、混合法的