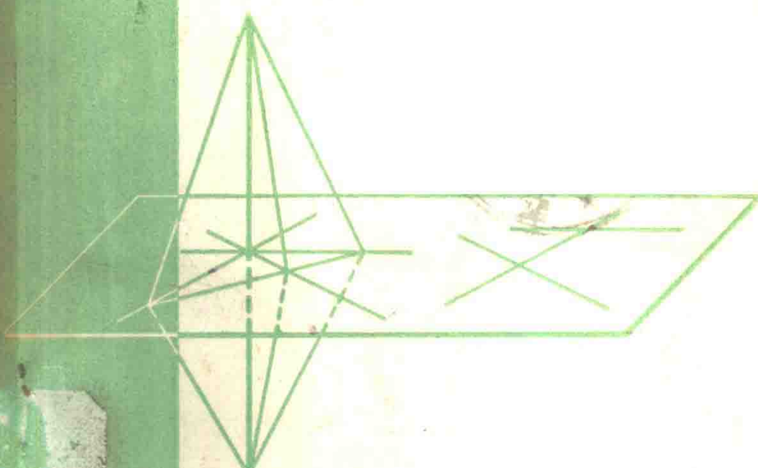
高中数学教学法

（几何部分）

薩·耶·利亚平 主編



人民教育出版社

高中数学教学法

（几何部分）

薩·耶·利亚平 主編

鍾善基　刘牧 譯

人民教育出版社

ПОД ОБЩЕЙ РЕДАКЦИЕЙ

С. Е. ЛЯПИНА

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

ЧАСТЬ II

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

8—10 КЛАССОВ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

УЧПЕДГИЗ—1956

*

高中数学教学法

（几何部分）

〔苏联〕 薩·耶·利亚平主編

鍾善基　刘　牧鐸

北京市书刊出版业營业許可証出字第二号

人民教育出版社出版（北京景山东街）

新华书店北京发行所发行

全国新华书店經售

人民教育印刷厂印装

統一书号：7012 · 475　字数：126 千

开本：850×1168 毫米　1/32　印張：$5\frac{1}{8}$ 插頁：1

1959 年 12 月第一版

1962 年 4 月第一次印刷

北京：1—11,700 册

定价 0.54 元

目　录

几何教学法

中学八到十年級的几何教学，是有助于完成摆在中学几何教学面前的一般目的的．我們考慮到高年級学生的年龄特征，几何观念的发展，以及邏輯思維的发展(几何观念和邏輯思維是通过中学以前各年級得到发展的)，八、九、十年級的几何教学方法，和五、六、七年級的比較起来，必須作某些改变．

对于揭露出几何概念之間內在的邏輯联系必須特別注意，計学生熟悉几何的邏輯結构，熟悉基本概念、定义、公理以及定理的作用，熟悉存在定理以及它們在引进新概念时的作用．应当向学生着重指出：圓周长、圓面积以及棱錐的体积等等，都以数列的极限作定义，这时必須証明这数列的极限是存在的．在引进直綫和平面平行的定义的时候，必須証明直綫和平面的这种相互位置关系是存在的．

在开始研究一个課題的时候，必須指出本課題的任务以及和其他課題的联系．例如学到"多边形的面积"課題的时候，应当指出求多边形面积的問題和度量綫段問題間的联系，并且指出新問題的特点．我們考慮到学生所获得的几何知識已經有了足够的积累，所以必須特別注意它們的实际应用，以便实現摆在中学面前的基本生产技术教育的有价值的任务．

第一章 中学八、九年級平面几何課的基本課題和內容

1956—57学年度的中学数学教学大綱指示了課題的安排如下:

八年級

I.綫段的比和比例关系.

在这課題里包括有:

a) 綫段的度量;

b) 关于比例綫段的定理;

c) 三角形內角平分綫的性质.

II.位似形和相似形.

在这課題里包括有:

a) 把一个已知图形变换为一个位似形;

b) 相似形. 相似三角形的特征. 相似多边形;

c) 用相似法解习題.

III.三角形中和圓中綫段間的度量关系.

在这課題里包括有銳角三角函数.

IV.多边形面积的度量.

V.实习作业.

在这課題里包括有: 三角函数在求不可到达的高度和距离时的应用. 平板測量. 对角綫尺的使用. 計算地段面积.

象以前各課題所指出的,八、九年級平面几何課的基本內容,是量的度量問題,以及图形各元素間的度量关系. 只是在“位似形和相似形”課題里和在“正多边形”課題里, 另外还包括有图形的变換(多边形的相似变換)以及图形的相互位置关系(正多边形的內切圓和外

接圓).

§1. 綫段的度量

象上面所指出的，綫段的度量問題包括在第一个課題："綫段的比和比例关系"之內，八年級的几何課就从研究这个問題开始.

綫段的度量，是量的度量問題中的一个.

具有下面的三种性質的几何形象統称为几何量(这些几何形象分别成为已知量的不同的値)：

1. 可比較性　这就是說，如果已知某一个量的两个値，那末这两个値之間有下面关系之中的一个："相等"，"大于"或者"小于".

2. 可加性　这就是說，如果已知某一个量的两个値，那末我們可以找到叫做它們的和的完全确定的第三个値.

3. 連續性①

"綫段、角、二面角和弧，是几何量的四个不同的种类". 量的度量的任务，就在于使几何量的每一个値都对应着满足一定条件的一定的正数.

綫段长度的度量的任务，在一般形式上就是每一条綫段都对应着叫做綫段长的一个正数. 它具有下面的性質：

a) 相等的綫段对应着同一的长度，就是說綫段的长度不因位置变动而改变(不变性). ②

b) 綫段的和的长度等于相加綫段的长度的和(可加性).

c) 任意选定的某一条綫段，它所对应的长度，等于一个单位.

为了解决綫段的度量問題，就必須扩大数的領域，而引进新的数——无理数. 因此几何課里的綫段的度量，应当和代数課里引进无理数的概念平行起来学习. 关于这一点，在代数部分的大綱內指

① С. А. 勃格莫洛夫：几何系統教程，教育出版社，1949.

② Д. И. 別列标尔金：初等几何学教程，国家技术出版社，1948.

出：无理数概念包括在八年級代数課的第一个課題："幂与方根"之内.

在教材文献里，提出学习綫段的度量的两种途徑：

第一种途徑，是最普遍的，它是由 A.П. 吉西略夫課本提出的.在这里它以求两条綫段的最大公度的純几何方法(連續截取的方法)作为度量綫段的基础. 这个方法的历史是很悠久的，它是由希腊几何学家欧几里得在紀元前三世紀找到的. 由于这个方法，无公度綫段的存在就被建立起来了.

研究綫段的度量的第二种途徑，叙述在 H.A. 格拉哥列夫几何課本里.① 这时度量綫段的方法是按照造成十进分数的途徑来进行的，从无理数的概念过渡到无公度綫段的概念：但是对于无公度綫段的存在并沒有予以証明.

綫段的度量的学习，可以从考察如何度量一条綫段开始. 預先把亚儿默得公理叙述出来，再提出精确地度量一条綫段的問題；这时要考察下面的三种情形：

1）用度量单位在一条已知綫段上截取整数次；

2）用度量单位截取若干次后，剩下小于单位长度的一条綫段.然后考察下面的度量过程：用单位的十分之一在剩余綫段上截取，用单位的百分之一在新的剩余綫段上截取等等，一直到沒有剩余为止，結果所得的是有限十进分数.

3）用度量单位截取若干次后，剩有小于单位长度的剩余綫段.考察度量的过程象上述情形一样，但是每一次都得到某一个剩余綫段.結果所得到的是无限十进分数. 沒有引进公度的概念，也沒有考察用連續截取方法求最大公度的問題，就引进了下面的定义：如果取綫段 B 作为度量的单位，而表示綫段 A 的长度的为有理数，那末綫段

① H.A. 格拉哥列夫：初等几何学，教育出版社，1954

A 叫做和綫段 B 为有公度的綫段. 如果取綫段 B 作为度量的单位，而表示綫段 A 的长度的为无理数，那末綫段 A 叫做和綫段 B 为无公度的綫段.

研究了从一种度量单位換成另一种度量单位之后，进入到研究“比例綫段”問題的一节. 在这一节里，研究了两条綫段的比. 給出两条綫段的比的定义和吉西略夫課本是一样的；証明了两条綫段的比和度量单位无关以后，进一步研究四条綫段所組成的比例，比例的性質，誘导比例，以及等比的性質，然后进入两条已知綫段的比例中項的概念.

在 1956—57 学年度新大綱的总說明里，指示出学习綫段的度量这一节的途徑，基本上是和 H.A. 格拉哥列夫几何課本中这一部分教材的叙述相符合的.

我們来就这两本課本中綫段的度量的叙述加以比較分析：

象以前所指出的，A.II. 吉西略夫課本中关于本問題的叙述，是这样安排的，使得学生在几何課里用純几何的方法就能够感到必須引入新数——无理数.

对于 A.II. 吉西略夫課本中上面所說的叙述方法，我們来指出其中的一些缺点：利用連續截取的方法求两条綫段的最大公度的問題，是要花費很多时間的，而且教会学生連續截取的方法也是不容易的，他們不懂得利用“輾轉相除法”求最大公約数的方法. 此外，在 A.II. 吉西略夫課本里关于“綫段的度量”中的基本問題照顧得不够，关于綫段的比的問題也注意得很少，并且也沒有引进“比例綫段”的概念.

在格拉哥列夫課本里，对于綫段的度量給以很大的重視；度量的过程是按照极其自然的途徑，用长度单位或者它的若干分之一截取的方法来进行的. 可是在吉西略夫課本里，为了求綫段的长度，預先提出已知綫段的最大公度的求法和度量的单位. 在格拉哥列夫課本里研究了度量的基本法則，也就是綫段的长度应当具有的性質. 但是

我們对于其中沒有使用“公度”这一术語，是不能同意的，因为公度在解决已知两条綫段的比的問題上是有很大用处的．例如解这样的問題：已知 $a:b=3:5$（在这里 a、b 是两条綫段），并且 a、b 的和等于 $40cm$，求这两条綫段．这时最好設 $a=3m$，$b=5m$，在这里 m 就是它們的公度．公度相当算术里的公約数．引进了綫段的公度的概念，就用不着証明在格拉哥列夫所引进的下面的定理了：如果綫段 A 和綫段 B 有公度，那末綫段 B 也是和綫段 A 有公度．

两种学习綫段的度量的途徑都是可能的．

我們来研究一下按照格拉哥列夫課本学习本課題的一个示范計划，其中对于格拉哥列夫課本中的教材加以相应的改动．

头两課用在教学綫段的度量．度量一条綫段的結果，或者得到整数、有限小数、或者得到无限小数．在这两課里应当引进綫段的公度的概念，向学生指出：在度量一条綫段的結果得到整数时，长度单位或者它的若干等分之一都是这条已知綫段和长度单位綫段的公度；在度量一条綫段的結果得到有限小数时，单位的十进等分或者它的若干等分之一都是公度，例如已知綫段的长度等于 2.457 单位，那末它的最大公度是千分之一单位；在得到无限循环小数时，单位的某一定等分之一，是它們的最大公度，因为任何循环小数都可以化为普通分数（应当向学生指出：在九年級里这个命题将会得到証明），例如小数 $0.666\cdots\cdots=\frac{2}{3}$．如果綫段长等于 $1.666\cdots\cdots$，那末这綫段和长度单位的最大公度等于单位的三分之一．度量一条綫段必須附有图形，例如在后一种情形，建議取两条綫段：一条长 $20cm$，另一条长 $12cm$，以第二条綫段当做长度单位，用度量的方法来求第一条綫段的长度．公度的意义可以当作一个普通术語来引入．有公度綫段和无公度綫段的定义也应当用相应的方法予以变动．在这种学习計划下可以更强烈地引起引入无理数概念的需要．

无公度綫段的存在，必須給出証明，这个証明可以当代数課里証

明$\sqrt{2}$不能等于任何有理数之后来进行．这个証明可以不同于A.П.吉西略夫課本中所作的証明．

以下各节課，可以用在研究下面問題上：有关从一种度量单位換成另一种度量单位的問題，有关两条綫段的比，以及复习在比例綫段中所用到的比例性质的問題．此外还要研究导出的比例关系以及等比的性质．

有关“当一条已知綫段和长度单位是无公度綫段时，从一种度量单位換成另一种度量单位”的定理，可以在学生熟悉无理数的积以后，再加以証明．最后，在“綫段的度量”之后可以按照大綱来进行．

因此在最后，教学可以仅限于証明已知綫段和度量单位間、以及新的度量单位和已知綫段間有公度的情况．

当按照吉西略夫課本学习綫段的度量的时候，象格拉哥列夫課本所作的，从研究綫段的度量过程（学生懂得很有限）开始是适当的．要指出普通的度量是不精确的，然后給出求长度单位若干等分、使得这长度单位的一个等分能够在已知綫段上截取整数次的問題．在轉到两条綫段的最大公度的求法以前，应当指出这个問題是和求两个数的最大公約数相类似的．通过个别例子让学生認識利用輾轉相除法求两个数的最大公約数的方法．在証明关于正方形的对角綫和它的一条边是无公度綫段的定理以后，应当研究度量一条和长度单位无公度的綫段的問題．

我們来講一講亚几默得公理的敘述和它的作用．在理論課里亚几默得公理大致是这样敘述的：无論怎样的两条綫段，总可以求出較短綫段的若干倍，使它大于較长綫段．

在上述命題的基础上可以証明：如果$a>b$，那末存在着一个而且只存在一个正整数m，使得$mb\leqslant a<(m+1)b$．

在格拉哥列夫課本里对于亚几默得公理給出如下的敘述：如果已知两条任意的綫段AB和$CD(AB>CD)$，那末在直綫AB上从A

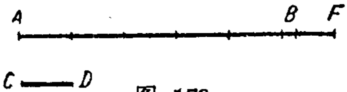


图 172

点起可以連續截取綫段 CD 若干次，使所得的綫段 AF 大于或者等于 AB(图172).

于是作出下面的結論，就是說，可以求出一个整数n，使下面的两个不等式能够成立：

$n \cdot CD \leqslant AB$; $(n+1)CD > AB$.

吉西略夫課本里的叙述是：較长綫段(A)无論怎样长，較短綫段(B)无論怎样短，用較短綫段在較长綫段上連續截取1、2、3以至若干次；当到达m次时，或者沒有剩余，或者得到小于較短綫段(B)的剩余.

在上面所引用的叙述中，应当推荐最后的一个，虽然它包括了多余的条件. 这是因为它清楚地給出关于不等式 $Bm \leqslant A$ 和 $B(m+1) > A$ 的观念，这两个不等式在度量綫段的时候是要用到的.

应当向学生指出：亚儿默得公理肯定了截取綫段的过程总是可能的，即用較短綫段在較长綫段上截取有限次来完成上面的不等式总是可能的. 綫段的連續性就是亚儿默得公理的推論.

教学綫段的度量課題的困难，还在于在教材文献里为这一課題头几課所配备的习題是很少的. 在 H. 雷布金习題汇編里仅仅有联系綫段的比的概念的5个习題.

本課題的习題类型

1) 用两条已知綫段中的較短綫段，在較长綫段上截取3次后有剩余，再用剩余綫段在較短綫段上截取，正好截取7次. 如果以較短綫段的长度当作单位，求較长綫段的长.

2) 求1米和1分米的最大公度；1分米和10米的最大公度.

3) 两条綫段中的較长綫段含公度75倍，較短綫段含35倍，每一条綫段含最大公度多少倍？

4) 一条綫段和长度单位是无公度的，用长度单位在这綫段上截取 2 次后有剩余；用长度单位的 0.1 在剩余綫段上截取 4 次，有新的剩余；用长度单位的 0.01 在这剩余綫段上截取 5 次后又有剩余；再用长度单位的 0.001 在剩余綫段上截取 9 次，仍有剩余．求已知綫段的长度的不足近似値和过剩近似値，精确到 0.001．

5) 已知两条綫段的长分别是 $5\sqrt{3}$ cm和$2\sqrt{3}$ cm．它們是不是有公度綫段？如果是的話，它們的最大公度等于什么？（长$\sqrt{3}$ cm 的綫段是它們的最大公度）．

6) 求下面三条綫段的最大公度：一条长 $2dm$；另一条长$3\frac{1}{3}dm$；第三条长$1\frac{1}{2}cm$．

7) 在綫段 AB 上取一点 C，使得 $AC:CB=m:n$．如果 m 和 n 是：a)整数；b)分数（或小数）；c)无理数；d)一个是有理数，另一个是无理数；AC 和 CB 是有公度綫段，还是无公度綫段？

当解这个題目的时候，后两种情形有些困难：

在情形 c)：如果这两条綫段的比等于有理数，那末这两条綫段是有公度的．这和第 5 題一样，它們的比等于$\frac{5}{2}$，意思就是第一条綫段含最大公度的 5 倍，第二条含最大公度的 2 倍．如果这两条綫段的比等于无理数，例如$\frac{2\sqrt{10}}{3\sqrt{5}}=\frac{2}{3}\sqrt{2}$，那末这两条綫段是无公度的．

在情形 d)：这两条綫段总是无公度的．

8) 已知两条綫段 A 和 B 的比等于$\frac{5}{4}$和綫段 B 的长，求作綫段 A．

§ 2. 位似形和相似形

相似形是从两个观点来研究的：一个单一的点从一个图形到另一个图形相互变换的結果怎样，以及图形的元素間数量关系的种类怎样．在中学的数学課里相似形也是从这两个观点来研究的，但是

只研究一种相似变换—配景相似变换或者位似形. 象前面所指出的，本課題包括位似变换，然后研究相似三角形以及相似多边形.

在大多数課本里①，关于比例綫段的定理，都是安排在相似形的前面. 这样作，应当認为是必需的，因为从两方面观点来研究的相似形，是和比例綫段的概念或者說和它們的几何观念有联系的. 在1956—57学年度的大綱里也是这样安排的. 在 A.П. 吉西略夫課本里，把这个問題放在相似多边形之后.

研究"位似形和相似形"課題，有两种途徑. 在大多数課本里，其中包括 A.П. 吉西略夫課本在內，图形的相似变换是在相似多边形(相似多边形的学习是从相似三角形开始的)之后来研究的. 在 A.П. 吉西略夫課本里引进相似三角形定义之前，关于图形的相似变换仅仅提到这样一点：改变图形的大小而不改变它的形状，叫做已知图形的相似变换.

第二种途徑是在 H. A. 格拉哥列夫課本里所見到的：相似形是从相似变换开始学习的.

給出相似形的定义如下："如果用相似变换的方法，可以从两个图形中的一个得出和另一个全等的图形，这两个已知图形就叫做相似形(不用添加'配景'这个詞)."这以后証明了相似三角形的4个判定定理，又研究了相似多边形的性質. 研究相似形的第二种途徑，即学习相似形从相似变换开始——应当認为是較妥当的. 相似变换不仅可以提供作出相似图形的方法，同时也可以用来証明相似形的存在. 当学习相似形从相似三角形开始的时候，預备定理(在这定理里証明了在一个三角中平行于一边、并且和其他两边相交的一条直綫截取和原三角形相似的一个三角形)可以看做相似三角形的存在定理. 根据預备定理所得到的作出和已知三角形相似的三角形的方

① A. 达威多夫：初等几何学；Ю. О. 吉尔維英和 P. B. 剛格努斯：几何系統教程，1933；H. A. 格拉哥列夫：初等几何学，教育出版社，1954.

法，是三角形配景相似变换的一种特殊情形.

为了証明相似多边形的存在，也可以研究一个多边形的作图题："給出对应于已知多边形的一条边，求作一个多边形和已知多边形相似." 如果学习相似形是从相似变换开始的，相似多边形的学习就不需要从解上述作图题开始了．这个题目应当放在解这样的作图题的練习之內：在已知相似系数（几何上借助两条綫段来表示）的条件下用相似法来解的作图题．如果学习相似形是从相似变换开始的，那末学生很容易理解相似变换的意义．在这种情况下，已經使相似变换和解上面的作图题一致起来了.

我們来研究一下学习相似形第二种途徑的一个示范計划，这計划基本上和H.A.格拉哥列夫課本里的編排是一致的．預先应当学习有关比例綫段的定理：給出比例綫段的几何作图方法．这以后必須举出一些解题时需要变更图形的大小而不改变它們的形状的实际問题①；从而指出：从已知图形的一种类型改变为它的另一种类型叫做这个图形的变换，而我們所研究的变换叫做相似变换；随后完成配景相似变换，并且引进下面的定义：当进行图形变换的时候，在平面上选取一点，把它和已知图形上所有的点連結起来，所得的綫段按已知比变化，于是它們的端点組成一个新的图形，这种图形变换，叫做图形的配景相似变换或者位似变换．用相似变换的方法从一个图形改变为另一个图形时所得的两个图形叫做配景相似．应当証明：和已知綫段配景相似的图形，是平行于已知綫段、并且和已知綫段的比等于相似系数的一条新的綫段．这以后应当研究一下三角形、五边形的相似变换的习题．在这种习题里，相似系数是已知的，相似中心取內相似中心或者外相似中心都可以.

其次，要更进一步建立起两个配景相似图形的性质．証明关于

① 平板测量繪图可以作为一个实际問题（参看第19頁）.

"在所有配景相似图形里，对应綫段成比例，对应角相等"的定理．在証明的时候，使用关于比例綫段的定理．在作出一个三角形等于两个配景相似三角形中的一个以后，我們可以确定：新三角形和已知三角形比較起来，在对应边之間和对应角之間都有同样的关系；同时还可以确定：和已知三角形全等的新三角形和已知三角形比較起来，所改变的只是它們的相对位置．这以后可以指出：新多边形和已知多边形叫做相似的（不要添上"配景"这个詞），接着給出相似多边形的一般定义．我們不同意 H.A. 格拉哥列夫課本里所引进的定义．研究相似形是不管它們的相关位置的．所以我們可以只从图形的元素間数量关系的观点来研究，因此相似形的定义，也应当以图形元素間的数量关系作为特征．采用的定义应当更多地联系今后定理的条件，例如联系相似三角形的特征，联系計算題的条件等等．在 *H.A.* 格拉哥列夫課本里，象全等三角形的 4 个特征一样，研究了相似三角形的 4 个特征．相似直角三角形的特征，可以作为一般特征的推論而得到．相似三角形的第 4 个特征，如果以前証明过三角形全等的第 4 个特征，那末把它研究一下是适宜的．

应当和学生一起規定：全等三角形是相似系数等于 1 的相似三角形的特殊情况，还应当把全等三角形的特征和相似三角形的特征作一番比較①．在 H.A. 格拉哥列夫課本里把对应角相等和对应边成比例作为相似多边形的特征；当把这个特征采用为定义的时候，它就不需要証明了．可以証明下面的定理作为一个練习：如果两个多边形相似，那末可以作一个多边形，使它和这两个多边形中的一个配景相似，并且和另一个全等．

A.П. 吉西略夫課本，是按照头一个途徑来学习相似形的．它的学习从相似三角形的定义开始．在这定义里，引进了两个条件——对

① 詳見第 16 頁．

应角相等和对应边成比例. 其中的一个条件是多余的，因此所引进的定义不能滿足对定义所提出的要求. 这个命題往往給教师增加了困难. 在教材文献里有的采取了相似三角形的另外一种定义:"对应角分别相等的两个三角形叫做相似三角形."[1] 采取这个定义的时候，需要部分地变更定理的体系和它們的証明，需要証明有关相似三角形对应边成比例的定理，但是可以缺少相似三角形的两个对应角相等的特征. 在这种情况下，对于相似三角形和相似多边形給出不同的定义应当認为是合适的. 这时应当从一般的定义——相似多边形的定义开始，然后提出研究特殊种类的相似多边形(三角形)的問題，其次証明肯定相似三角形存在的定理(預备定理)，最后証明相似三角形的特征. 当解作图題"求作一个多边形和已知多边形相似"的时候，应当和預备定理联系起来；为了解題尽量把这多边形分成若干个三角形: 在平面上取一点，把这点和多边形的各个頂点联結出来，并且使用以前曾經証明过的預备定理作出和所分得的各个三角形相似的三角形，然后研究作图的各种不同情况(在平面上所取的一点可以和多边形的頂点重合，可以在一条边上或者在多边形以外). 这以后可以引进关于多边形的配景相似变换的概念，并且在給出相似系数的数值之后，指出变换的另一种方法，利用这种方法，相似变换就会和作一个多边形和已知多边形相似的作图題一致起来.

我們来談一談相似形的两种叙述方法所引起的困难.

学生往往发生下面的錯誤，例如說"一个三角形(多边形)的边 AB 和另一个三角形(多边形)的边 AB 成比例"，他們不懂得錯在哪里. 究竟为什么可以說:"当速度一定的时候，路程的长和时間成比例"呢？应当指出在后一种情况，談到"路程的长"，我們指的是一个量的各值的总和，这时一个量的各值的比等于另一个量的相应的值的

---

[1] A. 达威多夫: 初等几何学, 1903.