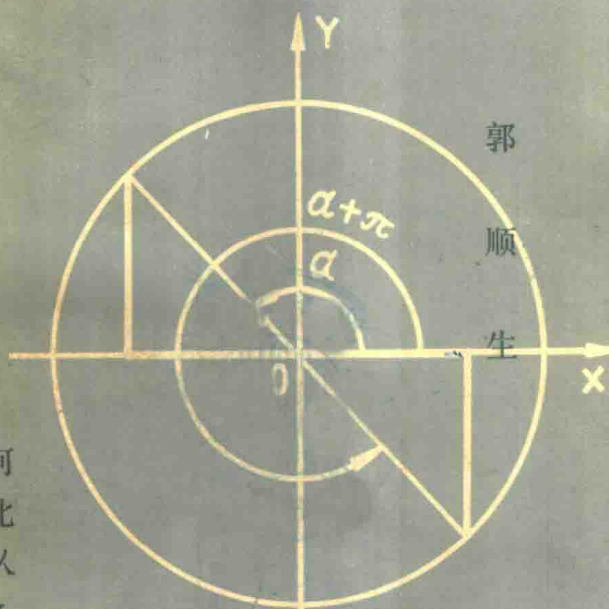


三角习题解

郭顺生



河北人民出版社

三角习题解

郭 顺 生

河北人民出版社

一九八〇年一月

封面设计：王保进

三角习题解

郭顺生

河北人民出版社出版
(石家庄市北马路19号)

河北新华印刷一厂印刷
河北省新华书店发行

787×1092毫米 1/32 14 1/2印张 333,000字
1980年12月第1版 1980年12月第1次印刷

印数1—28,500

统一书号7086·1003 定价1.00元

前 言

本书是为提高中学生解三角题的能力而编，也可供中学教师参考。

全书共分六章，包括三角函数、加法定理、反三角函数、三角方程、解三角形、复数与三角函数等。每章前都有内容提要，是该章的公式、定理。例题分 A、B 两类，A 类是简单、基本的题目，B 类具有一定难度和灵活性。习题分 A、B、C 三类，C 类难度较大，顺序是先易后难，并全部给出解答。但希望读者一定要经过自己独立思考再看答案，这样才会有较大的收获。

本书插图由李惠芳同志绘制。

限于编者水平，虽经多次修改，书中缺点错误仍在所难免，望读者指正。

编 者

1979.7.23

目 录

第一章 三角函数	(1)
I. 任意角三角函数的定义	(1)
II. 同角三角函数间的关系	(1)
III. 三角函数在各象限的符号与变化	(3)
IV. 诱导公式	(3)
V. 特殊角的三角函数	(4)
VI. 弧度与度的关系	(5)
VII. 三角函数的定义域、奇偶性及周期	(5)
例题 A	(6)
习题一 · A	(15)
例题 B	(18)
习题一 · B	(28)
习题一 · C	(32)
第二章 加法定理	(35)
加法定理及有关公式表	(35)
例题 A	(35)
习题二 · A	(52)
例题 B	(55)
习题二 · B	(66)
习题二 · C	(70)
第三章 反三角函数、三角方程、杂例	(74)

I. 反三角函数	(74)
例题 A	(76)
II. 三角方程	(83)
例题 A	(85)
III. 杂例	(89)
1. 三角不等式	(89)
2. 三角函数式的最值, 最小值	(90)
3. 三角级数的和	(90)
例题 A	(90)
习题三 · A	(94)
例题 B	(97)
习题三 · B	(115)
习题三 · C	(119)

第四章 三角形与三角函数 (123)

I. 符号说明	(123)
II. 正弦定理	(123)
III. 余弦定理	(123)
IV. 正切定理	(124)
V. 半角定理	(124)
VI. 三角形面积	(125)
VII. 内切圆的半径	(125)
VIII. 傍切圆的半径	(126)
例题 A	(126)
习题四 · A	(132)
例题 B	(134)
习题四 · B	(147)
习题四 · C	(152)

第五章 解三角形.....(155)

I. 解直角三角形.....(155)

II. 解斜三角形.....(155)

例题 A.....(158)

习题五 · A.....(166)

例题 B.....(168)

习题五 · B.....(179)

习题五 · C.....(182)

第六章 复数与三角函数.....(184)

I. 复数的三角表示式.....(184)

II. 复数的运算.....(184)

III. 棣莫弗公式.....(185)

IV. 复数的 n 次方根.....(185)

V. 复数的指数式 (欧拉公式).....(185)

例题 A.....(186)

习题六 · A.....(190)

例题 B.....(192)

习题六 · B.....(196)

习题六 · C.....(198)

习题解答

习题一 · A.....(200)

习题一 · B.....(205)

习题一 · C.....(225)

习题二 · A.....(237)

习题二 · B.....(248)

习题二 · C.....(269)

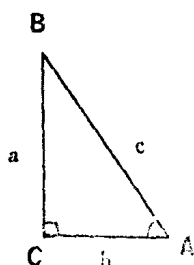
习题三 · A.....(291)

习题三 • B	(306)
习题三 • C	(331)
习题四 • A	(350)
习题四 • B	(357)
习题四 • C	(383)
习题五 • A	(398)
习题五 • B	(410)
习题五 • C	(422)
习题六 • A	(435)
习题六 • B	(439)
习题六 • C	(444)

第一章 三角函数

I. 任意角三角函数的定义

锐角三角函数是用直角三角形定义的。如图 1。



(图 1)

$$\sin A = \frac{a}{c}, \quad \cos A = \frac{b}{c},$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{ctg} A = \frac{b}{a}.$$

任意角三角函数是用坐标来定义的。如图 2。在角 α 终边上任取一点 P ，设其坐标为 (x, y) ， P 到原点的距离为 r ，那么：

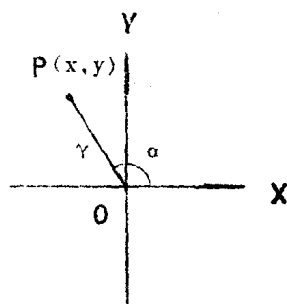
$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{x}{r},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}.$$

另外还有两个函数：正割

$$\sec \alpha = \frac{r}{x}; \text{ 余割 } \operatorname{cosec} \alpha = \frac{r}{y}.$$

此两个函数有时也会用到。



(图 2)

II. 同角三角函数间的关系

由三角函数定义容易推出以下三组关系：

(1) 比的关系

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \left(\alpha \neq n\pi + \frac{\pi}{2} \right), \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} (\alpha \neq n\pi).$$

(2) 倒数关系

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \left(\alpha \neq \frac{n\pi}{2} \right), \quad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \left(\alpha \neq n\pi + \frac{\pi}{2} \right),$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} (\alpha \neq n\pi).$$

(3) 平方关系

常用的重要关系式是: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. 此式两端除以 $\cos^2 \alpha$ 或 $\sin^2 \alpha$ 便得:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha \left(\alpha \neq n\pi + \frac{\pi}{2} \right),$$

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \operatorname{cosec}^2 \alpha (\alpha \neq n\pi).$$

(以上 n 均表示整数)

应用上述公式, 若已知 α 的一个三角函数值, 则可求其他各三角函数值.

例如: 已知 $\operatorname{tg} \alpha = a$ ($a \neq 0$)

$$\text{则有 } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{a};$$

$$\sec \alpha = \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 + a^2};$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sec \alpha} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}};$$

$$\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha = \pm \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}};$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} = \pm \frac{\sqrt{1 + a^2}}{a}.$$

式中正负号可由 α 所在的象限确定。

另外上述公式也常用来化简三角函数式或证明某些三角恒等式。

III. 三角函数在各象限的符号与变化。

三角函数在各象限的符号可列成下表：

三角函数 \ 象限	一	二	三	四
$\sin \alpha, \operatorname{cosec} \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha, \sec \alpha$	+	-	-	+
$\operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha$	+	-	+	-

三角函数在各象限的变化也可列表如下：

三角函数 \ 象限	第一象限 $0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$	第二象限 $\frac{\pi}{2} \rightarrow \pi$	第三象限 $\pi \rightarrow \frac{3\pi}{2}$	第四象限 $\frac{3\pi}{2} \rightarrow 2\pi$
$\sin x$	$0 \nearrow 1$	$1 \searrow 0$	$0 \searrow -1$	$-1 \nearrow 0$
$\cos x$	$1 \searrow 0$	$0 \searrow -1$	$-1 \nearrow 0$	$0 \nearrow 1$
$\operatorname{tg} x$	$0 \nearrow$ 不存在	不存在 $\nearrow 0$	$0 \nearrow$ 不存在	不存在 $\nearrow 0$
$\operatorname{ctg} x$	不存在 $\searrow 0$	$0 \searrow$ 不存在	不存在 $\searrow 0$	$0 \searrow$ 不存在

表中的不存在实际表示的是 $+\infty$ 或 $-\infty$ 。

IV. 诱导公式

设 α 是任意角， n 是整数：

$n \cdot 360^\circ + \alpha$ 、 $360^\circ - \alpha$ 、 $180^\circ \pm \alpha$ 、 $-\alpha$ 的三角函数值，等于

α 的同函数的值，放上把 α 看作是锐角时原来函数在相应象限内的符号。

$90^\circ \pm \alpha$, $270^\circ \pm \alpha$ 的三角函数值，等于 α 的相应余函数的值，放上把 α 看成锐角时原来函数在相应象限的符号。

以上所说内容可概括为：“奇变偶不变，符号看象限。”以帮助记忆。

具体的公式列表如下：（ n 为整数）

$$\begin{aligned}\sin(n \cdot 360^\circ \pm \alpha) &= \pm \sin \alpha; \\ \cos(n \cdot 360^\circ \pm \alpha) &= \pm \cos \alpha; \\ \operatorname{tg}(n \cdot 360^\circ \pm \alpha) &= \pm \operatorname{tg} \alpha; \\ \operatorname{ctg}(n \cdot 360^\circ \pm \alpha) &= \pm \operatorname{ctg} \alpha.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(180^\circ \pm \alpha) &= \mp \sin \alpha; \\ \cos(180^\circ \pm \alpha) &= -\cos \alpha; \\ \operatorname{tg}(180^\circ \pm \alpha) &= \pm \operatorname{tg} \alpha; \\ \operatorname{ctg}(180^\circ \pm \alpha) &= \pm \operatorname{ctg} \alpha.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(90^\circ \pm \alpha) &= \cos \alpha; \\ \cos(90^\circ \pm \alpha) &= \mp \sin \alpha; \\ \operatorname{tg}(90^\circ \pm \alpha) &= \mp \operatorname{ctg} \alpha; \\ \operatorname{ctg}(90^\circ \pm \alpha) &= \mp \operatorname{tg} \alpha.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(270^\circ \pm \alpha) &= -\cos \alpha; \\ \cos(270^\circ \pm \alpha) &= \pm \sin \alpha; \\ \operatorname{tg}(270^\circ \pm \alpha) &= \mp \operatorname{ctg} \alpha; \\ \operatorname{ctg}(270^\circ \pm \alpha) &= \mp \operatorname{tg} \alpha.\end{aligned}$$

V. 特殊角的三角函数

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \operatorname{tg} 45^\circ = 1, \quad \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3};$$

$$\operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}, \quad \operatorname{ctg} 45^\circ = 1, \quad \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

VI. 弧度与度的关系

$$1 \text{ 弧度} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ 17' 45''$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ 弧度} = 0.017453 \text{ 弧度}$$

一般地，若一角大小为 θ 度，同时为 α 弧度，则：

$$\theta = \frac{180}{\pi} \alpha, \quad \alpha = \frac{\pi}{180} \theta.$$

在半径为 R 的圆中， α 弧度的圆心角所对弧长为：

$$L = R \cdot \alpha.$$

VII. 三角函数的定义域、奇偶性及周期

函 数	定 义 域	奇偶性	周 期
$y = \sin x$	一 切 实 数	奇	2π
$y = \cos x$	一 切 实 数	偶	2π
$y = \operatorname{tg} x$	$x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$	奇	π
$y = \operatorname{ctg} x$	$x \neq n\pi$	奇	π

注：1. 若 $y = f(x)$ 满足 $f(-x) = -f(x)$ ，称为奇函数；满足 $f(-x) = f(x)$ ，称为偶函数。

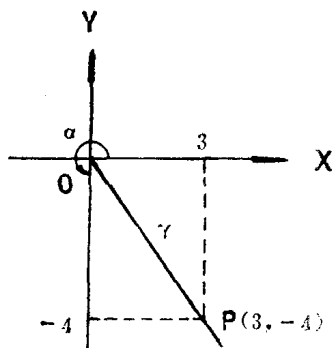
2. $y = \sin \omega x$, $y = \cos \omega x$ 的周期为 $\frac{2\pi}{\omega}$ ，

$y = \operatorname{tg} \omega x$, $y = \operatorname{ctg} \omega x$ 的周期为 $\frac{\pi}{\omega}$ 。

例 题 A

例 1. 已知角 α 终边上一点 P 的坐标为 $(3, -4)$, 求 α 的各个三角函数值.

解: 如图 3, α 为第四象限的角.



(图 3)

由 $x = 3$, $y = -4$, 可求出

$$r = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5.$$

$$\therefore \sin \alpha = \frac{y}{r} = -\frac{4}{5},$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{3}{5},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = -\frac{4}{3},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y} = -\frac{3}{4}.$$

注: 三角函数值与角终边上 P 点选择无关, 如在 α 的终边上另选一点 $Q(1, -\frac{4}{3})$, 计算出的结果是一样的.

例 2. 决定下列各角的三角函数的符号:

(1) 850° ;

(2) -30° .

解:

(1) 由 $850^\circ = 2 \times 360^\circ + 130^\circ$ 知 850° 是第二象限的角. 因而:

$$\sin 850^\circ > 0, \cos 850^\circ < 0, \operatorname{tg} 850^\circ < 0, \operatorname{ctg} 850^\circ < 0,$$

(2) -30° 显然是第四象限的角.

$$\sin(-30^\circ) < 0, \quad \cos(-30^\circ) > 0,$$

$$\operatorname{tg}(-30^\circ) < 0, \quad \operatorname{ctg}(-30^\circ) < 0.$$

例3. 决定下列各差的符号:

(1) $\sin 20^\circ - \sin 21^\circ$, (2) $\cos 380^\circ - \cos 21^\circ$,

(3) $\operatorname{tg} 120^\circ - \operatorname{tg} 121^\circ$, (4) $\operatorname{ctg} 210^\circ - \operatorname{ctg} 50^\circ$,

(5) $\sin 40^\circ - \cos 40^\circ$, (6) $\operatorname{tg} 224^\circ - \operatorname{ctg} 44^\circ$.

解:

(1) 在第一象限, $\sin \alpha$ 是增函数.

$$\therefore \sin 20^\circ < \sin 21^\circ,$$

$$\text{故有 } \sin 20^\circ - \sin 21^\circ < 0.$$

$$\begin{aligned} (2) \cos 380^\circ - \cos 21^\circ &= \cos(360^\circ + 20^\circ) - \cos 21^\circ \\ &= \cos 20^\circ - \cos 21^\circ. \end{aligned}$$

在第一象限, $\cos \alpha$ 是减函数,

$$\text{故 } \cos 380^\circ - \cos 21^\circ = \cos 20^\circ - \cos 21^\circ > 0.$$

(3) 在第二象限, $\operatorname{tg} \alpha$ 是增函数.

$$\therefore \operatorname{tg} 120^\circ - \operatorname{tg} 121^\circ < 0.$$

$$\begin{aligned} (4) \operatorname{ctg} 210^\circ - \operatorname{ctg} 50^\circ &= \operatorname{ctg}(180^\circ + 30^\circ) - \operatorname{ctg} 50^\circ \\ &= \operatorname{ctg} 30^\circ - \operatorname{ctg} 50^\circ. \end{aligned}$$

在第一象限, $\operatorname{ctg} \alpha$ 是减函数.

$$\text{故 } \operatorname{ctg} 210^\circ - \operatorname{ctg} 50^\circ = \operatorname{ctg} 30^\circ - \operatorname{ctg} 50^\circ > 0.$$

$$\begin{aligned} (5) \sin 40^\circ - \cos 40^\circ &= \sin 40^\circ - \cos(90^\circ - 50^\circ) \\ &= \sin 40^\circ - \sin 50^\circ < 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6) \operatorname{tg} 224^\circ - \operatorname{ctg} 44^\circ &= \operatorname{tg}(180^\circ + 44^\circ) - \operatorname{ctg} 44^\circ \\ &= \operatorname{tg} 44^\circ - \operatorname{ctg} 44^\circ = \operatorname{tg} 44^\circ - \operatorname{ctg}(90^\circ - 46^\circ) \\ &= \operatorname{tg} 44^\circ - \operatorname{tg} 46^\circ < 0. \end{aligned}$$

例4. 已知 $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$, ($\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$), 求 $\cos \alpha$ 、 $\operatorname{tg} \alpha$ 和

$\operatorname{ctg} \alpha$ 的值.

解: 由于 α 是第三象限的角, 故 $\cos \alpha$ 为负.

由 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ 可得:

$$\cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{-4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{3}{4}.$$

例 5. 化简下列各式:

(1) $\sqrt{1 - \sin^2 100^\circ}$;

(2) $\cos\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha \cdot \sqrt{\sec^2\alpha - 1}$. ($270^\circ < \alpha < 360^\circ$).

解:

(1) $\sqrt{1 - \sin^2 100^\circ} = \sqrt{\cos^2 100^\circ}$

$\because \cos 100^\circ < 0$, 而 $\sqrt{\cos^2 100^\circ}$ 应取正值,

故 $\sqrt{1 - \sin^2 100^\circ} = \sqrt{\cos^2 100^\circ} = -\cos 100^\circ$.

(2) $\sqrt{\sec^2\alpha - 1} = \sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha}$, 由于 α 是第四象限的角, 所以

$\operatorname{tg}\alpha < 0$, 因而 $\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha$.

$\therefore \cos\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha \cdot \sqrt{\sec^2\alpha - 1} = \cos\alpha \cdot \frac{1}{\sin\alpha} \cdot (-\operatorname{tg}\alpha)$

$= \cos\alpha \cdot \frac{1}{\sin\alpha} \left(-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) = -1.$

例 6. 求证下列各恒等式:

(1) $(\sin\alpha + \cos\alpha)(1 - \sin\alpha \cos\alpha) = \sin^3\alpha + \cos^3\alpha$;

(2) $\sin^2\theta \operatorname{tg}\theta + \cos^2\theta \operatorname{ctg}\theta + 2\sin\theta \cos\theta = \operatorname{tg}\theta + \operatorname{ctg}\theta$;

(3) $(\sin\theta + \cos\theta)(\operatorname{tg}\theta + \operatorname{ctg}\theta) = \sec\theta + \operatorname{cosec}\theta$.

证明:

$$\begin{aligned}(1) \text{ 右端} &= (\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha) \\ &= (\sin \alpha + \cos \alpha)(1 - \sin \alpha \cos \alpha).\end{aligned}$$

$\therefore$ 左端 = 右端.

式中用到关系式, $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

$$\begin{aligned}(2) \text{ 左端} &= \sin^2 \theta \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \cos^2 \theta \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= \frac{\sin^4 \theta + \cos^4 \theta + 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\cos \theta \sin \theta} \\ &= \frac{(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^2}{\cos \theta \sin \theta} = \frac{1}{\cos \theta \sin \theta},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{右端} &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos \theta \sin \theta} \\ &= \frac{1}{\cos \theta \sin \theta}.\end{aligned}$$

$\therefore$ 左端 = 右端.

$$\begin{aligned}(3) \text{ 左端} &= (\sin \theta + \cos \theta) \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) \\ &= (\sin \theta + \cos \theta) \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos \theta \sin \theta} \\ &= \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\cos \theta \sin \theta},\end{aligned}$$

$$\text{右端} = \frac{1}{\cos \theta} + \frac{1}{\sin \theta} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\cos \theta \sin \theta}.$$

$\therefore$ 左端 = 右端.

注: 证明较简单的恒等式时, 可以将一端变形为另一端. 或者将两端同时变形, 比较所得结果是否相等. 另外在证明含有正弦、余弦、正切、余切等函数的恒等式时, 常将正切、余切等用正弦、余弦表示出来, 这样往往容易使问题得到证明.