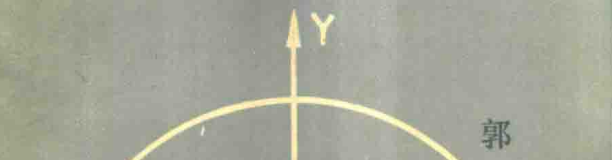
三角习题解

郭顺生



河北人民出版社

三角习题解

郭 顺 生

河北人民出版社

一九八〇年·石家庄

封面设计：王保进

三角习题解

郭顺生

河北人民出版社出版
(石家庄市北马路19号)
河北新华印刷一厂印刷
河北省新华书店发行

787×1092毫米 1/32 14 1/2印张 333,000字
1980年12月第1版 1980年12月第1次印刷
印数1—28,500
统一书号7086・1003 定价1.00元

前　　言

本书是为提高中学生解三角题的能力而编，也可供中学教师参考.

全书共分六章，包括三角函数、加法定理、反三角函数、三角方程、解三角形、复数与三角函数等. 每章前都有内容提要，是该章的公式、定理. 例题分A、B两类，A类是简单、基本的题目，B类具有一定难度和灵活性. 习题分A、B、C三类，C类难度较大，顺序是先易后难，并全部给出解答. 但希望读者一定要经过自己独立思考再看答案，这样才会有较大的收获.

本书插图由李惠芳同志绘制.

限于编者水平，虽经多次修改，书中缺点错误仍在所难免，望读者指正.

编　者

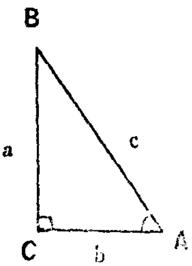
1979.7.23

目　录

第一章　三角函数

Ⅰ. 任意角三角函数的定义

锐角三角函数是用直角三角形定义的。如图1.



（图1）

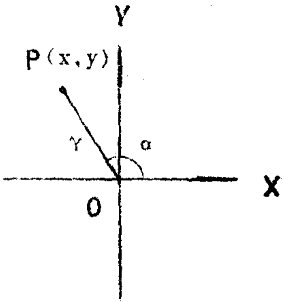
$$\sin A=\frac{a}{c},\qquad \cos A=\frac{b}{c},$$

$$\operatorname{tg}A=\frac{a}{b},\qquad \operatorname{ctg}A=\frac{b}{a}.$$

任意角三角函数是用坐标来定义的。如图2. 在角α终边上任取一点P，设其坐标为(x,y)，P到原点的距离为r，那么：

$$\sin\alpha=\frac{y}{r},\qquad \cos\alpha=\frac{x}{r},$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x},\qquad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}.$$



（图2）

另外还有两个函数：正割 $\sec\alpha=\frac{r}{x}$；余割 $\operatorname{cosec}\alpha=\frac{r}{y}$. 此两个函数有时也会用到.

Ⅱ. 同角三角函数间的关系

由三角函数定义容易推出以下三组关系：

(1) 比的关系

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\left(\alpha\neq n\pi+\frac{\pi}{2}\right),\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\ (\alpha\neq n\pi).$$

(2) 倒数关系

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\left(\alpha\neq\frac{n\pi}{2}\right),\quad \sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}\left(\alpha\neq n\pi+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}\ (\alpha\neq n\pi).$$

(3) 平方关系

常用的重要关系式是：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$. 此式两端除以 $\cos^2\alpha$ 或 $\sin^2\alpha$ 便得：

$$\operatorname{tg}^2\alpha+1=\sec^2\alpha\ \left(\alpha\neq n\pi+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\operatorname{ctg}^2\alpha+1=\operatorname{cosec}^2\alpha\ (\alpha\neq n\pi).$$

(以上 n 均表示整数)

应用上述公式，若已知 α 的一个三角函数值，则可求其他各三角函数值.

例如：已知 $\operatorname{tg}\alpha=a$ $(a\neq 0)$

则有 $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{1}{a}$;

$$\sec\alpha=\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\pm\sqrt{1+a^2};$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sec\alpha}=\pm\frac{1}{\sqrt{1+a^2}};$$

$$\sin\alpha=\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha=\pm\frac{a}{\sqrt{1+a^2}};$$

$$\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}=\pm\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}.$$

式中正负号可由 α 所在的象限确定。

另外上述公式也常用来化简三角函数式或证明某些三角恒等式。

Ⅲ. 三角函数在各象限的符号与变化。

三角函数在各象限的符号可列成下表：

象限 三角函数	一	二	三	四
$\sin\alpha$，$\operatorname{cosec}\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$，$\sec\alpha$	+	−	−	+
$\operatorname{tg}\alpha$，$\operatorname{ctg}\alpha$	+	−	+	−

三角函数在各象限的变化也可列表如下：

象限 三角函数	第一象限 $0\longrightarrow\frac{\pi}{2}$	第二象限 $\frac{\pi}{2}\longrightarrow\pi$	第三象限 $\pi\longrightarrow\frac{3\pi}{2}$	第四象限 $\frac{3\pi}{2}\longrightarrow2\pi$
$\sin x$	$0\nearrow1$	$1\searrow0$	$0\searrow-1$	$-1\nearrow0$
$\cos x$	$1\searrow0$	$0\searrow-1$	$-1\nearrow0$	$0\nearrow1$
$\operatorname{tg}x$	$0\nearrow$不存在	不存在$\nearrow0$	$0\nearrow$不存在	不存在$\nearrow0$
$\operatorname{ctg}x$	不存在$\searrow0$	$0\searrow$不存在	不存在$\searrow0$	$0\searrow$不存在

表中的不存在实际表示的是 $+\infty$ 或 $-\infty$。

Ⅳ. 诱导公式

设 α 是任意角，n 是整数：

$n\cdot360^\circ+\alpha$、$360^\circ-\alpha$、$180^\circ\pm\alpha$、$-\alpha$ 的三角函数值，等于

α 的同函数的值，放上把 α 看作是锐角时原来函数在相应象限内的符号。

$90°\pm\alpha$，$270°\pm\alpha$ 的三角函数值，等于 α 的相应余函数的值，放上把 α 看成锐角时原来函数在相应象限的符号。

以上所说内容可概括为"奇变偶不变，符号看象限."以帮助记忆。

具体的公式列表如下：（n 为整数）

$\sin(n\cdot 360°\pm\alpha)=\pm\sin\alpha$;	$\sin(180°\pm\alpha)=\mp\sin\alpha$;
$\cos(n\cdot 360°\pm\alpha)=\cos\alpha$;	$\cos(180°\pm\alpha)=-\cos\alpha$;
$\mathrm{tg}(n\cdot 360°\pm\alpha)=\pm\mathrm{tg}\,\alpha$;	$\mathrm{tg}(180°\pm\alpha)=\pm\mathrm{tg}\,\alpha$;
$\mathrm{ctg}(n\cdot 360°\pm\alpha)=\pm\mathrm{ctg}\,\alpha$.	$\mathrm{ctg}(180°\pm\alpha)=\pm\mathrm{ctg}\,\alpha$.
$\sin(90°\pm\alpha)=\cos\alpha$;	$\sin(270°\pm\alpha)=-\cos\alpha$;
$\cos(90°\pm\alpha)=\mp\sin\alpha$;	$\cos(270°\pm\alpha)=\pm\sin\alpha$;
$\mathrm{tg}(90°\pm\alpha)=\mp\mathrm{ctg}\,\alpha$;	$\mathrm{tg}(270°\pm\alpha)=\mp\mathrm{ctg}\,\alpha$;
$\mathrm{ctg}(90°\pm\alpha)=\mp\mathrm{tg}\,\alpha$.	$\mathrm{ctg}(270°\pm\alpha)=\mp\mathrm{tg}\,\alpha$.

V. 特殊角的三角函数

$$\sin30°=\frac{1}{2},\quad \sin45°=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \sin60°=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos30°=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos45°=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos60°=\frac{1}{2};$$

$$\mathrm{tg}30°=\frac{\sqrt{3}}{3},\quad \mathrm{tg}45°=1,\quad \mathrm{tg}60°=\sqrt{3};$$

$$\mathrm{ctg}30°=\sqrt{3},\quad \mathrm{ctg}45°=1,\quad \mathrm{ctg}60°=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ⅵ. 弧度与度的关系

$$1\text{弧度}=\frac{180^\circ}{\pi}=57^\circ17'45''$$

$$1^\circ=\frac{\pi}{180}\text{弧度}=0.017453\text{弧度}$$

一般地，若一角大小为 θ 度，同时为 α 弧度，则：

$$\theta=\frac{180}{\pi}\alpha,\qquad \alpha=\frac{\pi}{180}\theta.$$

在半径为 R 的圆中，α 弧度的圆心角所对弧长为：

$$L=R\cdot\alpha.$$

Ⅶ. 三角函数的定义域、奇偶性及周期

函　数	定　义　域	奇偶性	周　期
$y=\sin x$	一切实数	奇	2π
$y=\cos x$	一切实数	偶	2π
$y=\operatorname{tg} x$	$x\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$	奇	π
$y=\operatorname{ctg} x$	$x\neq n\pi$	奇	π

注：1. 若 $y=f(x)$ 满足 $f(-x)=-f(x)$，称为奇函数；满足 $f(-x)=f(x)$，称为偶函数.

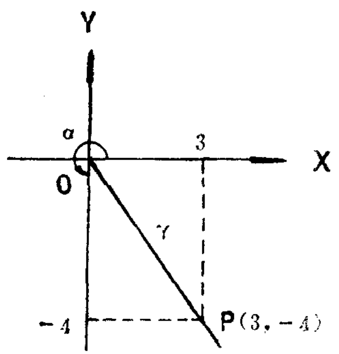
2. $y=\sin\omega x$，$y=\cos\omega x$ 的周期为 $\frac{2\pi}{\omega}$；

$y=\operatorname{tg}\omega x$，$y=\operatorname{ctg}\omega x$ 的周期为 $\frac{\pi}{\omega}$。

例　　题　　A

例 1．已知角 α 终边上一点 P 的坐标为 $(3, -4)$．求 α 的各个三角函数值．

解： 如图 3，α 为第四象限的角．



（图 3 ）

由 $x=3$，$y=-4$．可求出

$$r=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5.$$

$$\therefore\quad \sin\alpha=\frac{y}{r}=-\frac{4}{5},$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{3}{5},$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}=-\frac{4}{3},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}=-\frac{3}{4}.$$

注：三角函数值与角终边上 P 点选择无关，如在 α 的终边上另选一点 $Q\left(1, -\frac{4}{3}\right)$，计算出的结果是一样的．

例 2．决定下列各角的三角函数的符号：

(1) 850°；　　　　(2) -30°．

解：

(1) 由 $850^\circ=2\times360^\circ+130^\circ$ 知 850° 是第二象限的角．因而：

$\sin850^\circ>0$，$\cos850^\circ<0$，$\operatorname{tg}850^\circ<0$，$\operatorname{ctg}850^\circ<0$，

(2) -30° 显然是第四象限的角．

$\sin(-30^\circ)<0$，　　$\cos(-30^\circ)>0$，

$\operatorname{tg}(-30^\circ)<0$，　　$\operatorname{ctg}(-30^\circ)<0$．

例 3. 决定下列各差的符号：

(1) $\sin 20^\circ - \sin 21^\circ$，　　(2) $\cos 380^\circ - \cos 21^\circ$，

(3) $\operatorname{tg} 120^\circ - \operatorname{tg} 121^\circ$，　　(4) $\operatorname{ctg} 210^\circ - \operatorname{ctg} 50^\circ$，

(5) $\sin 40^\circ - \cos 40^\circ$，　　(6) $\operatorname{tg} 224^\circ - \operatorname{ctg} 44^\circ$。

解：

(1) 在第一象限，$\sin\alpha$ 是增函数。

$\therefore\quad \sin 20^\circ < \sin 21^\circ$，

故有 $\sin 20^\circ - \sin 21^\circ < 0$。

(2) $\cos 380^\circ - \cos 21^\circ = \cos(360^\circ + 20^\circ) - \cos 21^\circ$

$= \cos 20^\circ - \cos 21^\circ$，

在第一象限，$\cos\alpha$ 是减函数，

故 $\cos 380^\circ - \cos 21^\circ = \cos 20^\circ - \cos 21^\circ > 0$。

(3) 在第二象限，$\operatorname{tg}\alpha$ 是增函数。

$\therefore\quad \operatorname{tg} 120^\circ - \operatorname{tg} 121^\circ < 0$。

(4) $\operatorname{ctg} 210^\circ - \operatorname{ctg} 50^\circ = \operatorname{ctg}(180^\circ + 30^\circ) - \operatorname{ctg} 50^\circ$

$= \operatorname{ctg} 30^\circ - \operatorname{ctg} 50^\circ$。

在第一象限，$\operatorname{ctg}\alpha$ 是减函数，

故 $\operatorname{ctg} 210^\circ - \operatorname{ctg} 50^\circ = \operatorname{ctg} 30^\circ - \operatorname{ctg} 50^\circ > 0$。

(5) $\sin 40^\circ - \cos 40^\circ = \sin 40^\circ - \cos(90^\circ - 50^\circ)$

$= \sin 40^\circ - \sin 50^\circ < 0$。

(6) $\operatorname{tg} 224^\circ - \operatorname{ctg} 44^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ + 44^\circ) - \operatorname{ctg} 44^\circ$

$= \operatorname{tg} 44^\circ - \operatorname{ctg} 44^\circ = \operatorname{tg} 44^\circ - \operatorname{ctg}(90^\circ - 46^\circ)$

$= \operatorname{tg} 44^\circ - \operatorname{tg} 46^\circ < 0$。

例 4. 已知 $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$，$(\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi)$，求 $\cos\alpha$、$\operatorname{tg}\alpha$ 和 $\operatorname{ctg}\alpha$ 的值。

解：由于 α 是第三象限的角，故 $\cos\alpha$ 为负。

由 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 可得：

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{-4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5},$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=\frac{4}{3},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{3}{4},$$

例5．化简下列各式：

(1) $\sqrt{1-\sin^2 100^\circ}$；

(2) $\cos\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha\cdot\sqrt{\sec^2\alpha-1}$． $(270^\circ<\alpha<360^\circ)$。

解：

(1) $\sqrt{1-\sin^2 100^\circ}=\sqrt{\cos^2 100^\circ}$

∵ $\cos 100^\circ<0$，而$\sqrt{\cos^2 100^\circ}$应取正值，

故 $\sqrt{1-\sin^2 100^\circ}=\sqrt{\cos^2 100^\circ}=-\cos 100^\circ$。

(2) $\sqrt{\sec^2\alpha-1}=\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha}$，由于 α 是第四象限的角，所以

$\operatorname{tg}\alpha<0$，因而$\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha$。

∴ $\cos\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha\cdot\sqrt{\sec^2\alpha-1}=\cos\alpha\cdot\frac{1}{\sin\alpha}\cdot(-\operatorname{tg}\alpha)$

$$=\cos\alpha\cdot\frac{1}{\sin\alpha}\left(-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)=-1.$$

例6．求证下列各恒等式：

(1) $(\sin\alpha+\cos\alpha)(1-\sin\alpha\cos\alpha)=\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$；

(2) $\sin^2\theta\operatorname{tg}\theta+\cos^2\theta\operatorname{ctg}\theta+2\sin\theta\cos\theta=\operatorname{tg}\theta+\operatorname{ctg}\theta$；

(3) $(\sin\theta+\cos\theta)(\operatorname{tg}\theta+\operatorname{ctg}\theta)=\sec\theta+\operatorname{cosec}\theta$。

证明：

(1) 右端 $=(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha)$

$=(\sin\alpha+\cos\alpha)(1-\sin\alpha\cos\alpha)$.

∴ 左端 = 右端.

式中用到关系式：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

(2) 左端 $=\sin^2\theta\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\cos^2\theta\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}+2\sin\theta\cos\theta$

$$=\frac{\sin^4\theta+\cos^4\theta+2\sin^2\theta\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}$$

$$=\frac{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2}{\cos\theta\sin\theta}=\frac{1}{\cos\theta\sin\theta},$$

右端 $=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}$

$$=\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}.$$

∴ 左端 = 右端.

(3) 左端 $=(\sin\theta+\cos\theta)\left(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$

$$=(\sin\theta+\cos\theta)\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}$$

$$=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta\sin\theta},$$

右端 $=\dfrac{1}{\cos\theta}+\dfrac{1}{\sin\theta}=\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta\sin\theta}$.

∴ 左端 = 右端.

注： 证明较简单的恒等式时，可以将一端变形为另一端。或者将两端同时变形，比较所得结果是否相等。另外在证明含有正弦、余弦、正切、余切等函数的恒等式时，常将正切、余切等用正弦、余弦表示出来，这样往往容易使问题得到证明。