华似韵 编

东南大学出版社

随机过程

STOCHASTIC PROCESSES

SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

随 机 过 程

华似韵 编

东 南 大 学 出 版 社

内 容 提 要

本书共十章，前六章从工程应用角度全面系统地介绍随机过程的基本理论、基本概念和基本分析方法，后四章介绍随机过程的应用基础，主要包括线性动态系统、随机信号和噪声、均方估计和点过程、排队论等。本书含有大量例题，各章习题均附答案。

本书可作理工科高等院校无线电类和控制类有关专业的研究生、高年级本科生的教材或教学参考书，也可供有关教师和科技工作者自学和参考之用。

随 机 过 程

华 似 韵 编

东南大学出版社出版

南京四牌楼2号

江苏省新华书店发行　大丰县印刷二厂印刷

开本787×1092毫米1/16　印张 30　字数693千字

1988年10月第1版　1988年10月第1次印刷

印数：1-5000册

ISBN 7—81023—140—5

O·27　　定价：5.90元

序

在过去，工程和科技人员一般都接受了研究有关确定性现象的基本训练。例如，信号是作为某种确定的时间函数的，并由此出发，来研究它们的时域和变换域特性以及它们通过各种系统的分析方法。但实际上，人们要处理的却是大量不确定性或随机性的现象，带有信息的信号就不是确定的时间函数。而对于随机过程的教学，以往在大学里常常只是附属在某些课程之中。例如，在通信理论中研究噪声时才作适当介绍。虽然，从研究确定性现象出发所导得的结论，有许多也能适用于随机过程，但这并不是必然的，特别是因为混淆了确定性和随机性的前提，就难免会产生观念上的含混和逻辑上的困难。

由于科技的迅速发展，对具有随机性质的物理现象的研究领域也在不断扩大，早已超出了如通信理论等少数学科的范畴。所以过去那种仅仅偏重于确定性观念的教学内容，显然已经难以满足现代需要了。不确定性和概率，应当作为科技人员基本概念的一个组成部分。因此，有些学者如A。帕普里斯曾倡议为大学生单独设立有关概率、随机变量和随机过程的课程，不少高等学校也都先后这样做了。这是教学为适应发展需要而作出的必然回答。

在我国，目前也已有不少大学开设了这方面的课程，但是有关该课程的教材却出版得很少。本书作者华似韵同志在南京工学院对研究生和本科高年级学生多年讲授随机过程课程，她曾以其所积累较丰富的教学经验编写了该课教材讲义，使用效果良好，受到有关兄弟院校好评。近年来，华似韵同志又广泛地调查和参考了国内、外许多有关资料，征求有关专家的意见，修改充实原讲义而编写成这本教材，由所在系、组推荐出版。

本书从工程应用角度出发，全面、系统地介绍了随机过程基本理论及其应用，取材恰当，结构合理，概念清楚、层次分明。我相信，本书的出版，必能为我国高校学生及有关工程、科技人员在加强或补充基础理论和基本概念方面，提供一本好教材，这对培养我国建设人才无疑是一件有益的工作。

管 致 中

一九八八年元月

目　录

前　言

随着科学技术特别是计算机科学和技术的发展，随着我国四化建设的逐步展开和深入发展，在许多领域（如通信、控制、生物等）的工程与信息处理问题以及在管理科学、人口统计、心理学与社会学等应用中所要解决问题的模型已不再是确定性的，而是随机变量和随机过程；甚至，如果对随机过程理论的新成果缺乏一定的了解，对一些复杂的物理系统就会无法理解。而且每个在电子学领域工作的人总要接触到噪声问题，而噪声总是随机性的。因此，随机过程的理论越来越受到人们的重视，随机方法作为一种更为一般和统一的分析方法越来越得到广泛的应用。当前随机过程已成为许多专业的一门必修课程。

1982年以来，我曾为我院通信与电子系统及其他学科的硕士研究生多次讲授“随机过程”课程，开始时，发现多数学生对随机性感到生疏，概率论基础薄弱，他们反映该课程的不确定性内容不如确定性课程的内容那么明确，感到难学；经过一段时间教学实践的探索，我逐渐地形成了从工程应用角度出发来讲授本课程的如下基本指导思想，这也是我编写本教材的意图：

（1）帮助学生建立有关随机问题的思维方法和应有的知识水平；

（2）使之具有描述和分析研究应用中随机问题模型和统计特性、为解决工程应用问题提供随机方法的能力。

（3）让学生了解随机过程理论及其应用中的新进展，建立进一步学习系统理论和阅读文献资料关于随机过程的必要背景基础，以适应不断发展的需要。

本书共分十章，前六章从工程应用出发较详细地介绍随机过程的基本理论包括具体模型、基本概念和基本分析方法。其中：第一章在公理的基础上建立概率空间，确定随机事件的概率，并由此引出随机变量与随机过程的定义、概念及其概率特性的描述方法。第三、四章介绍随机过程的三种期望（矩函数与相关函数、条件期望、特征函数）以及随机过程的（非线性）无记忆变换与时域变换的定义、概念、运算方法及应用，并由条件均值是常数的性质引出一类称为鞅的增量不可测过程。第二、五章分别介绍在实用中常见的两类随机过程模型。其中一类是用概率特性描述的，按记忆特性它们是：（纯）独立过程、马尔可夫过程（包括马尔可夫链、纯不连续与纯连续马尔可夫过程）、独立增量过程和确定性即奇异过程；另一类是用一、二阶矩函数描述的二阶过程：平稳过程、各态遍历过程与正态过程，以上内容分别对离散型、连续型和离散参数、连续参数过程进行讨论，矢量过程也作适当介绍。第六章对连续参数过程讨论随机微积分，着重于均方连续与均方微积分，同时也介绍伊藤积分和维纳积分。本书后四章是：第七章介绍连续和离散时间过程通过线性动态系统的稳态和瞬态统计特性的（复）频域和时域分析方法和结果。第八章在随机过程杜勃-梅叶分解的基础上，讨论不同类型随机信号、噪声统计特性的表示和分析方法，作为随机过程的应用基础。本章以随机信号和噪声为线索组织内容，各节内容均可独立。第九章作为随机过程应用的一个方面，运用新息介绍随机过程线性均方估计的基本理论。第十章介绍点过程与排队论，以适应通信、模拟和其它方面对离散事件的描述和分析研究之需。

在上述内容的安排中，有时为了及时建立基本理论的物理观念或证明定理之需要，难免发生内容交叉，但这并不影响全书的系统性，书中列举大量例题，帮助读者理解内容并引导应用。解算随机过程的习题不能光凭记住一些定理和公式，必须对题意进行思考和琢磨，将概念、定理与公式结合运用。作者希望经过如此学习和训练的学生能逐步形成并不断强化随机思维的结构。

本书是在两次编写该课程教材的基础上重新整理编写而成。内容比较详尽、丰富，篇幅较大，选用本书作教材时可根据不同专业、学科、不同程度的学生灵活选取有关内容。本书除适用无线电类有关专业学科的研究生和高年级大学生作为教材或参考书外，也可作为希望得到较多随机过程知识的教师、科研人员和工程技术人员的参考书或自学教材。

学习本课程除了要具备一定的概率论基础知识外，还要有微积分学、微分方程、复变函数和线性代数等数学基础以及信号与系统的基础。

本教材主审人是上海交通大学无线电系陈鸿彬教授，他在百忙中精心审阅、修改了全部书稿，提出了许多指导性的宝贵意见 还蒙我的老师南京工学院前院长管致中教授为本书作序，他早在六年前就鼓励我开设这门课程和编写讲义，长期来对我指导和帮助。在此谨向他们两位前辈致以衷心感谢。另外，在这五年进行的七次教学期间，有不少学生对本课程表现出浓厚的兴趣，前后对原编讲义提出过不少有益的意见和颇有启迪的问题，并不断鼓舞我将它出版成书。李桦和陈立军两位研究生还协助我整理抄写了本书的习题并作了部分题解，借此机会向他们一并致谢。

华似韵 于南京工学院 1988年元月

第一章　概率、随机变量与随机过程

概率和随机变量的基本理论与概念是随机过程的基础，我们认为读者已熟悉这些基本内容。本章将运用公理阐明概率和随机变量的定义及意义，进而引出随机过程的定义及概念。

§1.1　引　　言

人们对于概率的研究起源于赌博问题。早在二、三百年前，人们就解决了出现在诸如滚骰子一类赌博中的概率问题。当时，大多数科学家只关心揭露与描述物理世界的物理定律，未能将概率与日常科学联系起来。而且证明这些物理定律的实验也很粗浅，试验结果都是可以再现的，即总是假定在同样条件下完成同样的试验，得到在同样测量精度内的相同结果。例如，伽里略（Galileo）所揭示的重力加速度与重量无关的结论，便是从比萨（Pisa）斜塔上将一个轻球和一个重球自由落体的落地时间相同的试验中得到的。随着科学的逐渐成熟，人们对物理现象中的细节有了更多的了解和研究，物理模型也更精练了，于是在许多领域中，不确定性得到了揭示，概率推理也得到了应用。事实上，对相当精密的仪器而言，没有一个实验的试验结果，是可以再现的。若伽里略能用纳秒（ns）测量球落地时间的话，就能发现轻、重两球落地时间并不相同，而且各次试验的落地时间也不一样，两球落地时差亦非常数。这些细微差异都是由空气阻力、重力异常等随机因素引起的。

描述不可再现实验的具体试验结果必须运用概率。众所周知，电子的行走是随机的，其轨迹是不可再现的。若用白炽灯丝作电子源，在屏 a 上开孔 A，电子计数器在屏 b 上下移动，记录穿过孔 A 到达屏 b 的电子数，如图1.1所示。由于穿过孔 A 的电子不是直线投射（不服从古典物理学定律），到达屏 b 的位置不是肯定可再现的，所以计数器不能只在一处计数，亦即不能确定电子到达屏 b 的固定位置，最多只能得到在同样试验条件（电子源和孔的位置不变、电子能量相同、空间是空旷的）下电子到达屏 b 上某点的概率。如果大量电子轰击屏幕，在屏 b 上 dx 单元内可计得电子数目为 ndx，其分布如图1.1中曲线所示。在此意义上，电子行走轨迹看来是可再现的。但对古典物理学家来说，这个新定律（可再现的概率分布）也只给出一个近似相同的结果，未说出到达各点的电子数究竟有多少，缺少具体确定数的概念。因此，对问题的描述是很不精确的。但也只有用此新定律以概率统计的方法才能定量描述诸如电子运动性质之类的定律，建立起种种随机现象的物理模型。

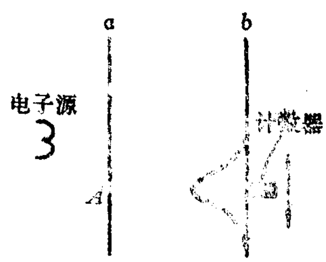


图 1.1

有现代工程问题中，许多随机现象和随机实验的基本概率模型必须由以下两部分组成：

(1)随机现象和实验中事件的集合体及其集。即随机变量 X 或随机过程 $X(t)$ 及它们的值集 ε_X 或 $\varepsilon_{X(t)}$。

(2)对每个事件 $A=\{X\in\mathscr{A}\}$（$\mathscr{A}$ 是随机变量集 ε_X 的子集，即 $\mathscr{A}\in\varepsilon_X$）指定一个称为概

率的数 $P(A)$的规律，且此概率规律要满足三个公理（见§1.3中概率的公理定义C）。

若把在集ε_x中对事件指定概率的某个规律称为包含在随机变量或随机过程中的概率律，便可把概率模型简要地归结为集ε_x和概率律两部分。

在讨论概率之前，先简要介绍集论，它是概率论的理论基础。

§1.2 集　论

集

在现代数学中广泛应用的集或集合，是指在一定场合所考察、研究的某些对象的全体，它可以是具有某种特定性质的具体或抽象的事物。集中的具体对象或事物称为集的元素。例如，滚骰子所可能出现结果的全体，学院中的全体学生，一个靶板上的全体点子，球落地试验中的落地时间全体等都是事件集合；又如自然数、偶数、素数的全体各自形成的数集，0、1两个数组成一个数集；平面上某个象限内点的全体形成一个点集，直线、曲线和曲面是由点所形成的点集；实数集，连续函数集，某函数的定义域等都是集。常用英文大写字母表示集，小写字母表示元素，也有用文字表示集中元素的（见§1.3）。集中元素与排列无关，与重复无关，如$\{2, 1\}=\{1, 2\}=\{2, 1, 1\}$。具有某种特定性质的集往往表示为$A=\{x;\ x$具有的性质$P\}$，如$\{x;\ a\leqslant x\leqslant b\}=[a, b]$，$\{x;\ x^2-1=0\}=\{-1, 1\}$。

对象x是或不是集A的元素分别用$x\in A$和$x\overline{\in}A$（或$x\notin A$）表示，并称x属于A和不属于A，二者必居其一。

若集A中的元素都属于集B，A被包含于B，是B的一个子集，而B是含有A，是A的一个包集，用$A\subset B$或$B\supset A$表示，显然有$A\subset A$。

若$A\subset B$和$B\subset A$同时存在，即两个集恰好有同样的元素，便说集A等于或相当集B，表示为$A=B$。

不含有任何元素的集合称为空集（用0表示），含有有限个元素和无限个元素的集分别称为有限集和无限集。无限集中元素可与所有正整数一一对应排列的称为可数（或可列）集，否则便是不可数（或不可列）集。所有正整数组成的集是可列集，实线上或某个直线段上的所有点集是不可列集。由一些集组成的集合称类（或类集）用草体字母$\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$，$\mathscr{C}$…表示。包含所研究问题中所有集的所有元素的最大集称为空间，用$\mathscr{S}$表示。因此，对任意集A，有$0\subset A\subset\mathscr{S}$。

集运算

余集和差集　设A是$\mathscr{S}$的子集，$\mathscr{S}$中所有不属于A的元素的集合称为A的余集，用$\bar{A}=\{x;\ x\overline{\in}A\}$表示（见图1.2）。显然，$\bar{\mathscr{S}}=0$，$\bar{0}=\mathscr{S}$。而且，若连续对$A$作两次求余运算，可重新得到集$A$，即$\bar{\bar{A}}=A$。差集$A-B=\{x;\ x\in A$和$x\overline{\in}B\}$，但不要求$A\supset B$，显然，若$A\subset B$，则$A-B=0$。因此，余集是$A\supset B$的差集。显然，$\bar{A}=\mathscr{S}-A$。若$B\subset A$，则$\bar{B}\supset\bar{A}$。若$A=B$，则$\bar{A}=\bar{B}$。

并集（或和集）　$A\cup B$（或$A+B$）$=\{x;\ x\in A$或$x\in B\}$。

｛　｝中“或”的意思是“和与或”。它表示和集$A+B$是属于A或属于B或同时属于二者

（即至少属于A，B之一）的元素的集合（见图1.3）。若$B\subset A$，则$A+B=A$，因此$A+A=A$，$A+0=A$，$A+\mathscr{S}=\mathscr{S}$。

交（或积）集　$A\cap B$(或AB)$=\{x;\ x\in A$和$x\in B\}$。

它表示同时属于集A和集B(即A，B中一切公有元素）的集合（见图1.3）。若$A\subset B$，则$AB=A$，因此，$AA=A$，$A0=0$，$A\mathscr{S}=A$。

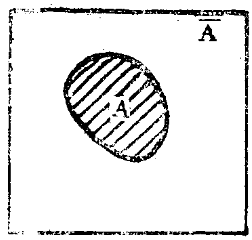


图 1.2

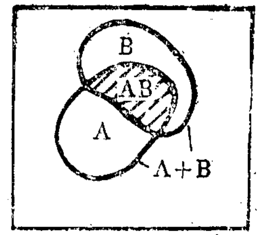


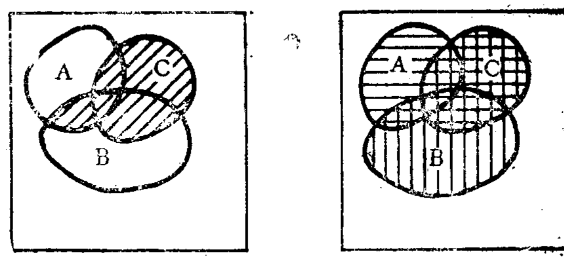
图 1.3

互斥（或不相交）集　若$AB=0$，即集A与集B无公共元素，则集A与集B称互斥集。显然$A\overline{A}=0$。

若设$\mathscr{S}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$，

$A=\{x;\ x=$偶数$\}$，$B=\{x;\ x>3\}$，则

$$\mathscr{S}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$
$$=\{1\}+\{2\}+\cdots+\{6\},$$



AB+C=(A+C)(B+C)

图 1.4

$AB=\{x;\ x=$偶数，$x>3\}=\{x;\ x=$偶数$\}\{x;\ x>3\}=\{4,\ 6\}$。

集运算的性质

交换律　　$A+B=B+A$　　　$AB=BA$

结合律　　$(A+B)+C=A+(B+C)=A+B+C$，$(AB)C=A(BC)=ABC$

分配律　　$(A+B)C=AC+BC$，$(AB)+C=(A+C)(B+C)$

上述性质可根据定义由图形直观地证实(见图1.4)。

德·摩根(De·morgan)定律　以上所定义的差、和、积还服从

$$\overline{A+B}=\overline{A}\overline{B}\qquad\qquad \overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$$

这便是德·摩根定律（见图1.5）。可以从下例看出其正确性：如果$A=$便宜的，$B=$真正好的，显然$\overline{A+B}$ =不便宜的也不是真正好的，即是价高的低劣品，这与$\overline{A}\overline{B}=$既贵而又不真正好的意思一样。第二式也可类似验证。

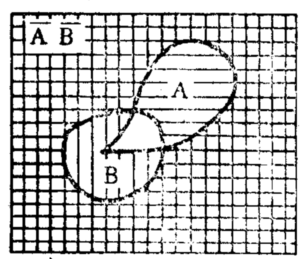


图 1.5

德·摩根定律指出：如果有了求余运算，则和、积运算可以互相表示而使等式不变，因此可得到

$$\overline{A}+\overline{B}\overline{C}=(\overline{A}+\overline{B})(\overline{A}+\overline{C})\qquad A+B=A+\overline{A}B$$

$$\overline{\left(\prod_1^n A_j\right)}=\sum_1^n\overline{A}_j\qquad \overline{\left(\sum_1^n A_j\right)}=\prod_1^n\overline{A}_j$$

§1.3 概率与概率空间

对随机现象进行概率研究时大致有这样三个步骤：首先，是用实验或推理方法，利用

$$P(A) \simeq \frac{n_A}{n} \tag{1-1}$$

确定某事件A的概率 $P(A)$ 。自然这是不精确的。然后在假设概率满足三个公理的条件下，使用归纳推理的方法由$P(A)$求得另一事件B的概率$P(B)$。最后，将所得$P(B)$在具体问题中进行预测。其中一、三两步是统计学的问题，第二步便是概率论所要解决的。

1.3-1 概率三定义

A．古典概率定义

$$P(A) = \frac{N_A}{N} \tag{1-2}$$

即事件A的概率等于实验E的所有结果（或选择）中支持数N_A与总数N之比。此定义是假设实验E的所有结果都是等可能的。按此定义，事件A的概率 $P(A)$ 是用先验的（而不是用具体实验的）方法得到的。例如在滚骰子实验中，若骰子是光滑的，骰子的六面出现是等可能的，于是便可得到出现 3 的概率 $P(3)=1/6$。

此定义的不足是：(1) 由于等可能(即等概率)，定义中应用的概念正是要定义的，所以定义本身是循环的，是不精确的；(2) 由于某些事件的等可能结果依赖于不同的实验，往往难于确定具体N_A与 N 的数值，如贝脱伦特疑题①(Bertrand paradox)。因此在讲事件的概率时必须规定基本实验，否则将是无意义的；(3) 由于古典定义只适于结果是等可能出现的实验，对于不光滑的或加重的骰子便无法从式（1-2）中获得 $P(A)$；(4) 当问题的结果数目是无限时，用此定义也无法获得 $P(A)$。

所以古典定义只能用于等可能的结果，且假设是由长期实验证实了的问题中。如在一堆 n 个白球和 m 个红球中随机选取一白球的概率等于$\frac{n}{m+n}$。在有无限个结果的问题中，例如，在（0，T）时间内随机发生的电话呼唤中，在（t_1，t_2）时间内发生呼唤的概率等于$\frac{t_2-t_1}{T}$。对于这类问题，写出它的概率就相当于表达了问题的随机性。

在不少问题中，用大量重复试验确定 $P(A)$ 也是不实际的，因此古典定义的等可能结果可作为运算的假设，若运算结果与实验相符便接受，否则便剔除。

最后，可用古典定义建立事件的独立性。当一个实验E 同时具有另外两个实验 E_1 和 E_2 的性质，且实验E_1的结果不影响实验E_2的结果时，则实验E 中两事件 A_1 和 A_2 同时发生的概率，可由先验推理得知为 $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)$。这是无需证明的。而关于事件独立性

① 《概率论》第一册，复旦大学编，P.40.

的概念常是十分有用的。

需要指出，古典定义虽是先验的，但等可能的结果却是经统计学的大量积累并将影响结果的所有因素都去除后而得到的。如出生婴孩是男或女的等可能结果是在去除了影响结果的家族史、地区等因素后才得出的，因而它也含有相对频率的实验意义。

古典定义一经假设就意味着它满足三个公理①，所以可作为概率推演的基础。

B. 相对频率的定义

$$P(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{n_A}{n} \tag{1-3}$$

即在实验E的n次重复中，事件A发生的概率$P(A)$等于事件A发生的次数n_A与n之比（事件A的相对频率）的极限。

初学者对此定义较易接受，因为人们习惯于用相对频率叙述概率，它消除了先验概率中的神秘性。然而，由于实验重复次数n虽可很大，但总是有限值，因此n_A/n与一个极限相等或近似相等是不可能的，故式（1-3）也只是关于极限存在的假设而非实验量，可见此定义也并非是建立在实验基础上的。但由概率的公理定义所推出的大数定律指出，这个假设存在的极限几乎必然等于$P(A)$。事实上，我们常把在测量基础上利用相对频率概念确定的概率值作为计算概率的物理量。在一定意义上，相对频率定义也是满足三个公理的②。

C. 公理定义

事件A的概率$P(A)$是对此事件指定的一个数，此数服从以下三个公理：

Ⅰ 事件A的概率是正的，$P(A)\geqslant 0$； (1-4)

Ⅱ 必然事件$\mathscr{S}$的概率等于1，$P(\mathscr{S})=1$； (1-5)

Ⅲ 对两个互斥事件A、$B(AB=0)$，有$P(A+B)=P(A)+P(B)$ (1-6)

我们把事件A的概率解释为对该事件指定的一个数，犹如我们对物体可指定一个数称为质量一样。这个满足三个公理的数的具体物理意义，会在问题的推导过程中得到。利用由此而得的理论可满意地解释许多物理问题。

我们认为这是引进概率最清楚的方法。这个公理定义便于概率论的理论推导，概念清楚，易于理解和应用，且在进一步研究概率问题时也无需重建新的基础。

由上面三个公理可继续推出③

Ⅳ $P(0)=0$ (1-7)

Ⅴ $P(\bar{A})=1-P(A)\leqslant 1 \quad \bar{A}=\mathscr{S}-A$ (1-8)

Ⅵ 若$AB\neq 0$，则

$$\begin{aligned}P(A+B)&=P(A)+P(B)-P(AB)\\&\leqslant P(A)+P(B)\end{aligned} \tag{1-9}$$

① 见 Larson/shubert "Probabilistic models in Engineering Sciences" vol I 1979. p. 23.

②③ A. Papoulis, "Probability, Random Variables and stochastic processes" 1984. p. 21.

Ⅶ 若$B\subset A$，则$P(A)=P(B)+P(A\bar{B})\geqslant P(B)$ (1-10)

Ⅷ 若$A_iA_j=0$，$i\neq j=1, 2, \cdots, n$ 则

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i) \tag{1-11}$$

式(1-11)是式(1-6)的推广，称有限可加性。

需要指出：概率只能应用于满足下列条件的事件中，即该事件的频率可在一定条件下直接或间接地确定的，或可用公理作逻辑推理确定它们的性质的。为此我们还需对能够定义概率的事件作进一步的认识。

1.3-2 概率空间

与基本实验联系的事件　一般，事件的概率总是与基本实验E相联系的。完成单独一次规定的实验称为试验或观测，试验或观测中发生的一个结果用元素ζ_i表示，实验E中所有结果或元素ζ_i的全体组成的集称为样本空间，用$\mathscr{S}$表示。其中的元素ζ_i称为样本点。由空间$\mathscr{S}$中的一个、二个或几个元素组成的集称为空间$\mathscr{S}$的子集A_i。对于有可数(n)个元素的样本空间$\mathscr{S}$，其子集数有2^n个。若试验结果ζ_i是子集$A_i\subset\mathscr{S}$的元素，则称此试验中事件A_i发生了，若子集A_i只有一个元素，则事件A_i称为基本事件。必然事件是指每次试验的结果ζ_i都发生在其中的子集，亦即样本空间$\mathscr{S}$，不可能事件是在每次试验中永不发生的空集0。可见事件是试验结果的集合，又是空间$\mathscr{S}$的某个子集。

例1.1 由滚光滑骰子的实验得到出现1，2，3，4，5，6六个面的结果。样本空间$\mathscr{S}=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，其中试验结果1或2…或6为元素或样本点。$\mathscr{S}$中有$2^6=64$个子集：

$$0;\ \underbrace{\{1\}\cdots\{6\}}_{C_6^1};\ \underbrace{\{1,2\}\cdots\{5,6\}}_{C_6^2};\ \underbrace{\{1,2,3\}\cdots\{4,5,6\}}_{C_6^3};$$

$$\underbrace{\{1,2,3,4\}\cdots\{3,4,5,6\}}_{C_6^4};\ \underbrace{\{1,2,3,4,5\}\cdots\{2,3,4,5,6\}}_{C_6^5};\ \{1,2,3,4,5,6\}。$$

其中由一个元素组成的某个子集$A_1=\{1\}$称{投掷结果为1}的基本事件。由三个元素组成的某子集$B_2=\{2, 3, 4\}$称{投掷结果为2，3，4}的事件。

例1.2 将一钱币投掷两次得到的各种结果看作是一个对象，得正面记为h，得背面记为t，因此投掷两次都得正面便是元素$\{hh\}$，乃有四种这样的元素形成空间$\mathscr{S}=\{hh, th, ht, tt\}$，由这些元素可形成$2^4=16$个子集，即

$\{hh\}$，$\{ht\}$，$\{th\}$，$\{tt\}$；

$\{hh,ht\}$，$\{hh, th\}$，$\{hh, tt\}$，$\{ht, th\}$，$\{ht, tt\}$，$\{th, tt\}$；

$\{hh, ht, th\}$，$\{hh, ht, tt\}$，$\{ht, th, tt\}$，$\{hh, th, tt\}$；

$\{hh, th, ht, tt\}$；0。

把其中由二个元素组成的空间$\mathscr{S}$的某个子集$A=\{hh, th\}$称{第二次投掷结果均得正面}的事件，把由三个元素组成的某个子集$C=\{hh, ht, th\}$称{每两次投掷结果至少出现一次正面}

的事件。

由例可见，集中的元素可由一个以上对象组成，包括用其它子集作为类集中的元素。

例1.3 某实验的所有结果是直线上的所有数或某个区间，$\mathscr{S}=(-\infty,\infty)$或$\mathscr{S}=[a,\ b]$。空间$\mathscr{S}$包含无限个元素，是一个不可数集。它可是某地区的气象或气温资料，亦可是电阻器制造中所有可能的阻值。

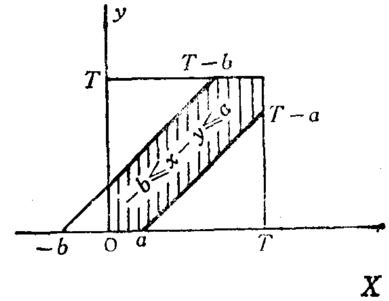


图 1.6

此时，直线上每个实数都是基本事件，子集是这些数的集合，如区间$x_1\leqslant x\leqslant x_2$，$x<x_1$或点$x=x_1$。

例1.4 若试验结果是$[0,\ T]\times[0,\ T]$正方形内的所有点。样本空间$\mathscr{S}$便是正方形内序数点对$\{(x,\ y);\ 0\leqslant x\leqslant T,\ 0\leqslant y\leqslant T\}$的集合。如图 1.6 所示。子集是包含在正方形中的所有平面集，如图中阴影面积是由满足$-b\leqslant x-y\leqslant a$和$0\leqslant x\leqslant T,\ 0\leqslant y\leqslant T$的所有点$(x,\ y)$组成的子集，表示为$A=\{-b\leqslant x-y\leqslant a\}$。

在具体问题中，建立样本空间是描述随机现象的第一步。通常认为这是预先给定的。由于在样本空间中可以定义的事件不止一个，当我们由已知简单事件（如基本事件）的概率推求另一个较复杂事件的概率时，需要进一步认识事件的概率本质和它们之间的相互联系。

事件的公理定义 事件A是$\mathscr{S}$的某个子集，且要对其规定概率$P(A)$。为了能对定义为事件的子集进行任何集运算后仍能定义概率，我们不是把$\mathscr{S}$的所有子集而只是把$\mathscr{S}$中的某些子集定义为事件。

那么为什么不把$\mathscr{S}$中所有子集都当作事件呢？这是因为：(1) 在实用中，我们不需要对结果的每个集合（即$\mathscr{S}$的所有子集）指定概率，例如，在滚骰子实验中，当我们只要对『奇数』或『偶数』打赌时，就只要考虑四个子集$\{0\}$，$\{$奇数$\}$，$\{$偶数$\}$，和$\{\mathscr{S}\}$作为事件即可；(2) 在数学上，对于有不可数结果的集合$\mathscr{S}$，不可能对所有子集指定满足公理Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ和Ⅲ$_a$的概率。我们的公理只能研究某些可数个子集。

为此，我们把满足以下三个公理的类定义为波雷尔(Borel)体$\mathscr{B}$①。这三个公理为：

Ⅰ $\mathscr{S}\in\mathscr{B}$，$0\in\mathscr{B}$

Ⅱ $A\in\mathscr{B}$，则$\overline{A}\in\mathscr{B}$ $\overline{A}$为集A的余集。

Ⅲ 若$A_i\in\mathscr{B}$ $i=1,\ 2,\ \cdots$，则 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{B}$ 且

$$\prod_{i=1}^{\infty}A_i=\overline{\sum_{i=1}^{\infty}\overline{A}_i}\in\mathscr{B}\quad\text{（由德·摩根定律）}$$

因此，波雷尔体$\mathscr{B}$是由空间$\mathscr{S}$的某些（可能所有）子集组成的类，它的元素具有经任何集运算（和、差、积与极限）仍在$\mathscr{B}$上的性质。一般，我们研究$\mathscr{S}$中子集的最小类，它们

① 一般，称满足此三个公理的类为σ-域或σ-代数。

既构成波雷尔体又包含所要研究的一切元素和集。可以看出此波雷尔体是一个微妙的概念，而在一般实际问题中它都是存在的。

例1.5 设$\mathscr{S}=\{a, b, c, d\}$，类$\mathscr{A}$由集$\{a\}$和$\{b\}$组成，对类$\mathscr{A}$中子集$\{a\}$，$\{b\}$作和、积等运算所得子集与$\{a\}$、$\{b\}$一起构成最小波雷尔体为

$$\mathscr{B}=\{0\}, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{c,d\}, \{b,c,d\}, \{a,c,d\}, \mathscr{S}。$$

定义 若$\mathscr{B}$是由样本空间$\mathscr{S}$的某些子集构成的波雷尔体，则$\mathscr{B}$中元素便称为事件。$\mathscr{S}$称必然事件，0称不可能事件。

这样，我们便有可能不仅对有限个事件而且对可数无限个事件作集运算得到的事件指定概率。为了使波雷尔体内的可数无限集(事件)具有如式(1-11)那样的可加性，故引入可数或完全可加性公理

III_a 若$A_iA_j=0$，$i\neq j=1,2,\cdots$，则

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i) \tag{1-12}$$

事件的公理定义保证了对事件作任何集运算所得的结果还是事件，以便能对它们指定满足概率三个公理的数(概率)。由此可见，波雷尔体$\mathscr{B}$是空间$\mathscr{S}$的概率可测集合，而概率则是可测集合的函数(见图1.7)，这便是事件公理概念的映射意义。

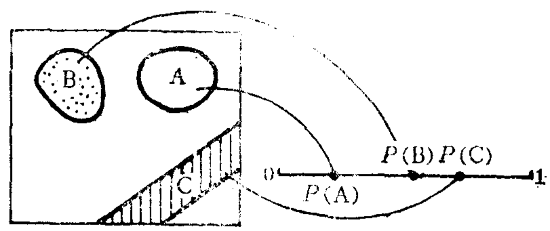


图 1.7

至此，我们完成了对基本实验E的公理描述，它有三个基本要素：

1. $\mathscr{S}$(样本空间)：所有试验结果的集合；
2. $\mathscr{B}$(波雷尔体)：空间$\mathscr{S}$中某些子集(事件)的类集；
3. P(概率)：对这些事件指定满足公理Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ和III_a的数。

我们把这三个量称为与基本实验E有关的概率空间或概率场，用

$$E: (\mathscr{S}, \mathscr{B}, P)$$

表示。这实际上是基本实验E的公理定义，也是我们讨论随机问题的出发点。三要素都通常被认为是已知的。至于在实际问题中如何选定$\mathscr{S}$，怎样构造$\mathscr{B}$和怎样指定P，则由具体问题而定。

例1.6 可数概率空间

(1) 在$\mathscr{S}=\{\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_N\}$，其中$N$为有限数，波雷尔体$\mathscr{B}$为$\mathscr{S}$的所有子集，因此是子集总数为$2^N$的有限集合。所有事件的概率可通过基本事件$\{\zeta_i\}i=1, 2, \cdots N$的概率$P(\zeta_i)=p_i$表示。

由概率公理知

$$p_i\geqslant 0 \qquad p_1+\cdots+p_N=1 \tag{1-13}$$

若事件 $A\in\mathscr{B}$ 是由 r 个元素 ζ_{ki} $i=1, 2, \cdots r$ 组成，由式(1-11)便可得到事件 A 的概率为

$$P(A)=P\{\zeta_{k1}\}+\cdots+P\{\zeta_{kr}\}=p_{k1}+\cdots+p_{kr} \tag{1-14}$$

若 $\mathscr{S}$ 中 N 个结果（即基本事件）有相同的概率 p_i

$$p_i=\frac{1}{N} \tag{1-15}$$

则含有 r 个元素的事件 A 的概率便为

$$P(A)=\frac{r}{N} \tag{1-16}$$

这便是通过公理推算出的结果，它与由古典概率定义得到的结果相同。

(2) 若 $\mathscr{S}$ 是由可数无限个元素组成，即 $\mathscr{S}=\{\zeta_1, \zeta_2, \cdots\}$，$\mathscr{B}$ 还是选 $\mathscr{S}$ 中的全体子集，此时基本事件的概率亦满足

$$p_i\geqslant 0 \qquad \sum_{i=1}^{\infty}p_i=1$$

则事件 $C\in\mathscr{B}$ 的概率必须取 C 所含元素的概率和，式(1-14)同样成立。

例1.7 不可数无限概率空间

例1.3的样本空间 $\mathscr{S}$ 包含有无限不可数个元素，$\mathscr{B}$ 不能取 $\mathscr{S}$ 中的一切子集。因为不可能对 $\mathscr{S}$ 中所有不可数个子集指定概率满足概率公理 I_a，故把实数的任意集合作为事件也是不可能的。此时，所有事件的概率不能用基本事件的概率来确定。为了在实线 $\mathscr{S}=(-\infty, \infty)$ 上构成概率空间，我们将所有区间 $x_1\leqslant x\leqslant x_2$ 和它们的可数个和、积作为事件，这些事件形成一个最小波雷尔体，可把实用中感兴趣的直线上的点集，如所有点 $x=x_i$，所有开、闭区间 $x_1\leqslant x\leqslant x_2$ 和所有半直线 $x\leqslant x_i$（x_i 为任意实数）都包括在内①。此时对波雷尔体的点集定义概率便十分方便。设 $\alpha(x)$ 具有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\alpha(x)dx=1 \qquad 和\ \alpha(x)\geqslant 0 \tag{1-17}$$

则事件 $\{x\leqslant x_i\}$ 的概率便定义为

$$P\{x\leqslant x_i\}=\int_{-\infty}^{x_i}\alpha(x)dx \tag{1-18}$$

由此便可得到所有事件的概率。若要求由区间 $(x_1, x_2]$ 上所有点组成的事件 $\{x_1<x\leqslant x_2\}$

① 实际上可以证明，此波雷尔体包括 $\mathscr{S}$ 的所有子集，即在直线上存在由区间的不可数和、积形成的点集。不过此集在大多数应用中不感兴趣。