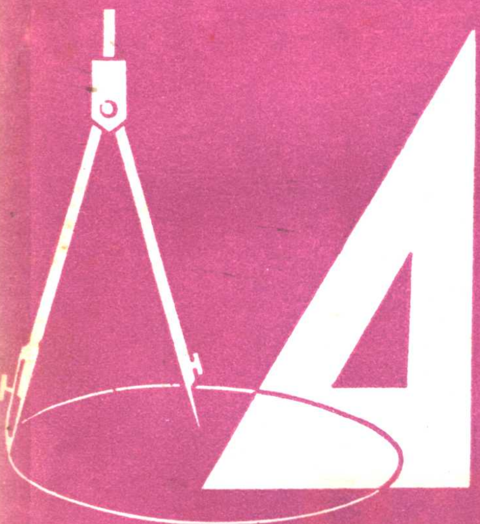
日本各大学历年入学试题集

$S=\pi r^2$



数学题解

中册

科学普及出版社广州分社

日本各大学历年入学试题集

数　学　题　解

（中　册）

李策韶　朱颖濠
李丽丽　朱广淶　译

科学普及出版社广州分社

日本各大学历年入学试题集
数学题解（中册）

李策韶　朱颍濠
李丽丽　朱广滦　译
绘图：蔡永插　　封面设计：莫梓顺

科学普及出版社广州分社出版
广州市教育北路大华街兴平里2号
广东省韶关市粤北印刷厂印刷
广东省新华书店发行
787×1092毫米32开本　印张：12.625　字数：260千字
1982年1月第1版　1982年1月第1次印刷
印数：56000册　统一书号：7051·60104
定价：1.25元

编译说明

本书主要根据日本各大学历年入学数学考试题集编译而成。

本书包括空间矢量、矩阵和数列等部分。它可作为中学数学教师和学生的参考书。对理工科大学及师范院校数学系、物理系的师生，也有一定的参考价值。

本书的特点是：

1．内容精炼而丰富，形式新颖而多样，解题严谨而简捷，技巧独特而易懂。

2．编排。每类内容分如下五部分：

（1）要点和说明：每章节列出定理、公式，注明重要的思考方法和解题技巧或必要的说明。

（2）例题：通过典型例题的分析，交待思考方法，其目的是培养学生的思维能力和解题的熟练技巧。

（3）习题：除从升学考试题中选出较好的习题外，还编集了大量的新习题。

（4）提示：对一些较难的题目给予简明扼要的提示。

（5）测验题：书中附有三份测验题，每份题规定在120分钟内做完。如能用更短时间完成，则说明解题能力有所增强。

在编译过程中曾得到华南师范学院外语系侯德富老师具体指导和热情帮助，本书译完后由暨南大学数学系林德荫和侯德富同志编辑审校，冯志通同志参加校对工作并提出宝贵

意见。此外，姚建生、吴龙达、伍光、林坚等同志参加部分翻译工作。蔡永懋同志为本书绘制了全部插图。在此表示感谢。

译 者
一九八一年十二月

目　录

试 题

一、空间座标和矢量

（一）空间座标

〔要点〕

1．空间的点

设空间两点为$A(x_1, y_1, z_1)$，$B(x_2, y_2, z_2)$。

（1）它们之间的距离为：

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

特别地，原点O和$P(x, y, z)$之间的距离为

$$\overline{OP}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

（2）分线段AB为m:n的内分点C，外分点D的座标为：

$$C\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n}, \frac{ny_1+my_2}{m+n}, \frac{nz_1+mz_2}{m+n}\right)$$

$$D\left(\frac{-nx_1+mx_2}{m-n}, \frac{-ny_1+my_2}{m-n}, \frac{-nz_1+mz_2}{m-n}\right)$$

在$m=n$时，点C为AB的中点M，AB的中点M的座标为：

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

（3）以$A(x_1, y_1, z_1)$，$B(x_2, y_2, z_2)$，$C(x_3,$

y_3，z_3）三点为顶点的ΔABC的重心的座标为：

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3},\ \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$

2．与座标平面平行的平面方程（a，b，c是常数）

（1）与xy平面平行的平面方程　$z=a$

（2）与yz平面平行的平面方程　$x=b$

（3）与xz平面平行的平面方程　$y=c$

3．球面方程

球心为（a，b，c），半径为r（$r>0$）的球面方程为：

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)=r^2$

特别地，球心为原点时，球面方程为

$x^2+y^2+z^2=r^2$

〔说明〕

1．设空间有两点A、B，则线段AB的长度（两点A、B间的距离）$\overline{AB}$可由上面的〔1．（1）〕得出。

2．外分线段AB为m:n的外分点的座标，可把内分点座标公式中的比换成m:（－n）得到。

3．外分线段AB为m:n的外分点D的座标公式，经常写成如下形式，较为易记好用。

$$D\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \frac{my_2-ny_1}{m-n},\ \frac{mz_2-nz_1}{m-n}\right)$$

4．与xy平面平行的平面 $z=a$，通过z轴上的点（0，0，a），且垂直于z轴。

空间平面一般方程为$ax+by+cz+d=0$，则与座标平面平行的平面（1）$z=a$，（2）$x=b$，（3）$y=c$，各

为：

$(1)\ 0\cdot x+0\cdot y+1\cdot z+(-a)=0$

$(2)\ 1\cdot x+0\cdot y+0\cdot z+(-b)=0$

$(3)\ 0\cdot x+1\cdot y+0\cdot z+(-c)=0$

因此，在（1）式中，只要取 $z=a$，无论 x，y 取任何实数都得 $0\cdot x+0\cdot y+1\cdot z+(-a)=0$，即 $z=a$。因此可知点的集合 $\{(x,y,z)\mid z=a\}$ 是一个通过点 $(0,0,a)$，且与xy平面平行的平面。

〔例〕

1。设空间内有四点 $O(0,0,0)$，$A(3,0,0)$，$B(0,4,0)$，$C(0,0,5)$。

（1）求从O点向AB所作垂线与AB的交点座标。

（2）求通过A，B，C三点的平面与xy平面夹角的正切（tg）值。

〔思考方法〕从O点向AB作垂线，与AB交于D，连结CD，则 $CD\perp AB$，$OD\perp AB$。故欲求的值为 $\text{tg}(\angle ODC)$

〔**解**〕设从O向AB所作的垂线与AB的交点为D，其座标为 $(x,y,0)$，因为D把AB内分 $9:16$，所以

$$(x,y,0)=\left(\frac{16\times3+9\times0}{9+16},\ \frac{16\times0+9\times4}{9+16},0\right)$$

$$=\left(\frac{48}{25},\ \frac{36}{25},\ 0\right)$$

根据三垂线线定理得：$CD\perp AB$，故所求的正切值为：

$$\text{tg}(\angle ODC)=\frac{CO}{DO}$$

其中 $CO=5$，$DO=\sqrt{\left(\frac{48}{25}\right)^2+\left(\frac{36}{25}\right)^2}=\frac{12}{5}$

$$\therefore \ \mathrm{tg}(\angle ODC)=\frac{5}{\frac{12}{5}}=\frac{25}{12}$$

〔要领〕根据三垂线定理，OD，CD同时垂直于AB，故两平面之夹角为$\angle ODC$。

〔另解〕 $\triangle OAB=\frac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{OB}=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{OD}$

$$\therefore \frac{1}{2}\times 3\times 4=\frac{1}{2}\times 5\times\overline{OD}$$

$$\therefore \overline{OD}=\frac{12}{5}$$

$$\therefore D\left(\frac{12}{5}\times\frac{4}{5},\ \frac{12}{5}\times\frac{3}{5},\ 0\right)=\left(\frac{48}{25},\ \frac{36}{25},\ 0\right)$$

设通过A，B，C三点的平面与xy平面所夹的角为α，则

$\triangle OAB=\triangle CAB\cos\alpha$……①

$\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}-1$……②

从①，②得：$\mathrm{tg}\alpha=\sqrt{\frac{(\triangle CAB)^2}{(\triangle OAB)^2}-1}$ （$\because \mathrm{tg}\alpha>0$）

其中 $\triangle OAB=6$， $\triangle CAB=\frac{1}{2}\sqrt{769}$

$$\therefore \ \mathrm{tg}\alpha=\sqrt{\frac{769}{144}-1}=\frac{25}{12}$$

〔要领〕设两个平面之夹角为α，若果一平面上面积为S的图形，在另一平面上的正投影的面积为S'，则$S'=S\cos\alpha$。

〔试题〕

2．分别求下列各点的座标

（1）x轴上与（1，-2，3），（-4，5，6）两点等距离的点。

（2）以（3，6，1），（12，4，9）（6，2，14）三点为顶点的三角形的重心。

3．设从点P（7，8，-9）向x轴，y轴，z轴，xy平面，yz平面，xz平面所引的垂线足各为Q_x，Q_y，Q_z，Q_{xy}，Q_{yz}，Q_{xz}，求这些点的座标。

4．设空间有一点P（3，4，6），

（1）求P点对于xy平面的对称点Q的座标。

（2）求P点关于z轴的对称点R的座标。

（3）求以P，Q，R三点为顶点的△PQR的面积。

〔提示〕注意$\angle RPQ=90°$

5．设从原点O，作通过点（2，$\sqrt{3}$，3）的射线为l。

（1）求l上与原点的距离为t（$t>o$）的点的座标。

（2）在x轴，y轴及射线l上，分别选取适当的点A，B，C，此外，再取一点D（K，3，-3）。使得顺次连接A，D，B，C四点所成的四边形为长方形时，问K应取何值？

〔提示〕（1）设l上的点为（x，y，z），则$x:y:z=2:\sqrt{3}:3$。

（2）对角线AB，CD的中点重合，且$\angle ADB=\angle R$。

6．空间中有一以A（1，1，1），B（1，3，4），C（3，4，1），D（4，1，3）四点为顶点的四面体。

（1）求△BCD的重心G的座标。

（2）求四面体ABCD的体积。

答案用既约分数表示。

〔提示〕（2）注意$AG\perp\triangle BCD$。

7． 分别求下列球面的方程。

（1）以点（3，2，4），（5，4，8）为直径两端点的球面。

（2）以点（1，0，0）为球心，且与yz平面交线为圆$y^2+z^2=4$（$x=0$）的球面。

〔提示〕（2）令所求球面方程式为$(x-1)^2+y^2+z^2=r^2$（$r>0$）。

8． 求与点A(3，2，-1)及点B(-3，8，2)的距离之比为2∶1的点的轨迹。

（二）空间矢量

〔要点〕

1． 矢量性质

设**a**，**b**，**c**为任意矢量，k，*l*为任意数量，则下列恒等式成立。其中**o**为零矢量。

（1）$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$

（2）$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$

（3）$k(\mathbf{a}+\mathbf{b})=k\mathbf{a}+k\mathbf{b}$

（4）$(k+l)\mathbf{a}=k\mathbf{a}+l\mathbf{a}$

（5）$k(l\mathbf{a})=(kl)\mathbf{a}$

（6）$1\mathbf{a}=\mathbf{a}$

（7）$\mathbf{a}+\mathbf{o}=\mathbf{a}$

（8）$0\mathbf{a}=\mathbf{o}$

2. 矢径

设O为空间一定点，P为空间任意点，则称矢量$\overrightarrow{OP}$为P对于O点的矢径，定点O称为原点。

3. 矢径公式

设空间中A，B，C三点的矢径分别为$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，则

（1）内分线段AB为m：n的内分点P的矢径$\vec{p}$为，

$$\vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$$

（2）线段AB的中点M的矢径$\vec{m}$为，

$$\vec{m}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$$

（3）△ABC的重心G的矢径$\vec{g}$为，

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

〔说明〕

1. 矢量运算的基本法则：

（1）交换法则　$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$

（2）结合法则　$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$

（3）矢量和的实数倍的分配法则　$k(\mathbf{a}+\mathbf{b})=k\mathbf{a}+k\mathbf{b}$

（4）实数和与矢量乘积的分配法则　$(k+l)\mathbf{a}=k\mathbf{a}+l\mathbf{a}$

（5）矢量的实数倍与实数乘积的恒等式 $k(l\mathbf{a})=(kl)\mathbf{a}$

这些运算法则与平面矢量的运算法则完全相同，因此无论平面或空间都用同一式子表示。

2．外分线段AB为m：n的外分点Q的矢径$\vec{q}$，可用内分点P的矢径公式$\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$表示，只是n换成－n，写成

$$\vec{q}=\frac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}。$$

3．矢径公式〔前面（1）（2）（3）〕，无论是平面矢径或空间矢径都可以用同样的式子表示。

〔例〕

9．设某一四面体的顶点的矢径为**a**，**b**，**c**，**d**。

（1）求把连接一个顶点和它所对的面的重心的线段内分为3：1的内分点G的矢径。

（2）证明G点是连接对边中点的线段的中点。（对边是指不在同一平面上的四面体的两条边）。

〔思考方法〕重心、内分点都用矢径公式计算，点用矢径表示。

〔解〕（1）设△BCD的重心为G_W，其矢径为$\mathbf{g}_A$，内分线段AG_A为3:1的内分点G_1矢径为$\mathbf{g}_1$。

$$\mathbf{g}_1=\frac{1\times\mathbf{a}+3\mathbf{g}_A}{3+1},\quad \mathbf{g}_A=\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{3}\quad\therefore\ \mathbf{g}_1=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{4}$$

同理，设△CDA的重心为G_B，将BG_B内分为3:1的内分点G_2的矢径也为$\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{4}$

这样，把四面体的某一顶点与它所对的面的重心连线内分为3：1的内分点的矢径都等于$\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{4}$，可知它是一个定点。

因此，所求点G的矢径是$\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{4}$。

（2）连接四面体对边中点线段的中点矢径，在取对边AB，CD时为：

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}+\frac{\mathbf{c}+\mathbf{d}}{2}\right)=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{4}$$

无论取哪两条对边，连接其中点线段的中点的矢径都等于$\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{4}$，这与（1）中G点的矢径相等。因此，G点就是连接对边中点线段的中点。

〔要领〕为了证明P点和Q点是一致的，只要证明这两点的矢径$\vec{p}$，$\vec{q}$相等。

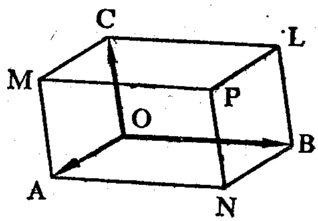
〔注意〕通常，当P，Q两点的矢径为$\vec{p}$、$\vec{q}$时，

$$P=Q \Longleftrightarrow \vec{p}=\vec{q}$$

这不论在平面还是空间都成立。

〔试题〕

10. 设从平行六面体的顶点O引出的边为OA，OB，OC，从P点引出的边为PL，PM，PN（如图）。又设$\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$，$\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$，$\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$。



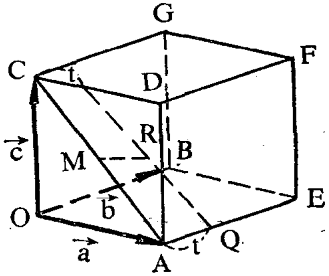
（1）用a，b，c表示矢量$\overrightarrow{OL}$、$\overrightarrow{AL}$。

（2）试证明$\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{OP}$。

〔提示〕空间矢量的加法、减法运算，与平面矢量一样，可以运用三角形法则和平行四边形法则。

11. 设以原点O为起点的空间矢量$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，线段OA，OB，OC的中点各为K，L，M，线段BC，CA，AB的中点各为P，Q，R时，试用$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$表示矢量$\overrightarrow{KP}$，$\overrightarrow{LQ}$，$\overrightarrow{MR}$。

12. 右图是各边长为1的立方体。取$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$设CD上有点P，AE上有点Q，CP＝AQ＝t，AC，PQ的中点为M，R。



（1）用$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，t表示矢量$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$，$\overrightarrow{PQ}$，$\overrightarrow{MR}$。

（2）用矢量证明MR∥OE。

〔提示〕$\overrightarrow{MR}=K\overrightarrow{OE}$，K为实数。

13. 设空间中A，B，C，D四点的矢径分别为$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$，同时设α，β，γ，δ是不同时为零的实数，试证明：如果

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}+\delta\vec{d}=O,\text{且}(\alpha+\beta)^2+(\gamma+\delta)^2=O$$

则A，B，C，D在同一直线上或AB∥CD。

〔提示〕因为$(\alpha+\beta)^2+(\gamma+\delta)^2=O$（α，β，γ，δ均为实数），故将β＝－α，δ＝－γ代入第一式。

14. 读下文并填空。

设空间中有不在同一直线上的三点A、B、C，其矢径为$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$。在线段BC，CA，AB上分别取P，Q，R三点，使得BP：PC＝l：1，CQ：QA＝m：1，AR：RB