中等專業学校教科書

工業、農林、財經性質專業適用

几　何

上　册

（平面部分）

高等教育出版社

中等專業学校教科書

几　　何

上　册

（平面部分）

工業、農林、財經性質專業適用

高等教育出版社

中等專業学校教科書

几　何

下　册

（立体部分）

工業、農林、財經性質專業適用

高等教育出版社

說　　明

我司組織中等專業学校数学教师汪良材、張子干、張永丰、章景星、曹安祇、楊英明、駱風和七位先生，根据我部1955年批准的300小时和410小时的中等專業学校数学教学大綱，采取分工編寫、集体討論的办法，編出了中等專業学校工業、農林、財經性質專業適用的代数、几何、三角、高等数学教科書。这些書对医藥性質專業也能作参考用。

这本平面几何教科書是張子干先生参照苏联安特烈也夫所著"初等几何学教程"上册編寫的。初稿曾在今年春天印發部分学校征求意見。根据各校寄來的許多宝貴意見，作了較大的修改。本書初步定稿后，曾請北京师范大学梁紹鴻先生審閱。梁先生在百忙中抽时間給本書提供了進一步修改的宝貴意見，使本書在付印前能由編者再作一次修正。在这里，对梁先生的热忱帮助表示感謝。

由於时間倉促，匆匆付印，缺点在所难免。希望中等專業学校教师以及使用本書讀者多提意見（意見請寄北京高等教育出版社轉我司），以便再版时一併修正。

高等教育部中等專業教育司

1956年5月

几　　何

上　册

高等教育部中等專業教育司編

高等教育出版社出版
北京琉璃廠一七〇號
（北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號）

上海协兴印刷厂印刷　　新華書店總經售

書號13010·94　開本850×1168 1/32　印張3 7/16　字數89,000
一九五六年七月上海第一版
一九五六年七月上海第一次印刷
印數1—420,000　　定價(8)￥0.42

說　　明

我司組織中等專業学校数学教师汪良材、張子干、張永丰、章景星、曹安祁、楊英明、駱風和七位先生，根据我部1955年批准的300小时和410小时的中等專業学校数学教学大綱，采取分工編寫、集体討論的办法，編出了中等專業学校工業、農林、財經性質專業適用的代数、几何、三角、高等数学教科書。这些書对医藥性質專業也能作参考用。

这本立体几何教科書是張永丰先生参照苏联安特烈也夫所著初等几何学教程下册編寫的。初稿曾在今年春天印發部分学校征求意見。根据各校寄來的許多宝貴意見，作了較大的修改。本書初步定稿后，曾請北京师范大学鍾善基先生審閱，鍾先生在百忙中抽时間給本書提供了進一步修改的宝貴意見，使本書在付印前能由編者再作一次修正。在这里，对鍾先生的热忱帮助表示感謝。

由於时間倉促，匆匆付印，缺点在所难免。希望中等專業学校教师以及使用本書讀者多提意見（意見請寄北京高等教育出版社轉我司），以便再版时一併修正。

高等教育部中等專業教育司

1956年6月

几　　何

下　　册

高等教育部中等專業教育司編

高等教育出版社出版
北京琉璃廠一七○號
（北京市書刊出版業營業許可證出字第○五四號）
商務印書館上海廠印刷　新華書店總經售

書號13010·122　開本850×1168 1/32　印張3 8/16　字數91,000
一九五六年九月上海第一版
一九五六年九月上海第一次印刷
印數1—300,000　定價(8)￥0.42

目　　錄

目　　錄

第一章　線段的度量　比例線段

I. 線段的度量

§1. 基本概念　直線上任意兩点間的部分叫做**線段**。这兩点叫做**線段的端点**。

線段常用标記它的端点的兩个大寫字母來表示，例如，線段 AB（圖 1）。也有用一个小寫字母來表示的，例如，線段 a（圖 2）。

圖 1.

圖 2.

为了比較兩条線段 AB 和 CD 的長短，我們把線段 AB 放到線段 CD 上，使 A 点和 C 点重合，並順着 CD 落下。如果 B 点和 D 点重合（圖 3），那末就說，線段 AB 就等於線段 CD($AB=CD$)。如果 B 点落

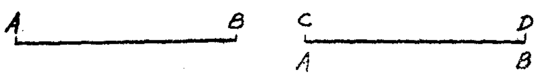

圖 3.

在 C 点和 D 点之間(圖 4)，那末就說，線段 AB 小於線段 CD($AB<CD$)。

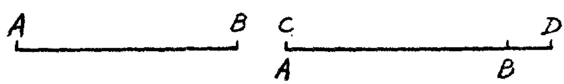

圖 4.

如果 B 点落在 CD 的延長線上(圖 5)，那末就說，線段 AB 大於線段 CD($AB>CD$)。

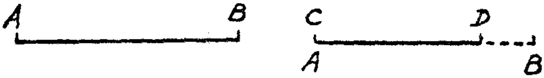

圖 5.

上面所說是兩線段大小关系的概念。我們進一步來研究怎样度量線段，也就是怎样用数來表示線段的長度問題。

線段的度量以下面的公理为基礎。

或不容尺公理① 如果 AB 和 CD 是任意兩条線段，而且 $AB>CD$，在 AB 上从 A 点起連續截取等於 CD 的線段，截到某次后，或者沒有剩余，或者剩下比 CD 小的一段。換句話說，就是存在一个正整数 n，使得 $n\cdot CD\leqslant AB<(n+1)CD$。

§2. **兩条線段的公度** 如果兩条線段都恰好含有第三条線段的整数倍而沒有剩余，第三条線段便叫做原來兩条線段的**公度**。

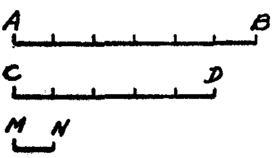

圖 6.

例如，線段 AB 恰好含有線段 MN 的 6 倍(圖 6)，線段 CD 恰好含有線段 MN 的 5 倍，那末線段 MN 就是線段 AB 和 CD 的公度。

兩条線段如果有公度就叫做**有公度線段**，公度中最大的叫做**最大公度**。

顯然，如果一条線段是其他兩条線段的公度，把这条線段分成許多等分，每一等分也是其他兩条線段的公度。因此，如果兩条線段有一个公度，就有無数个公度。而且在这無数个公度中，沒有最小的，但有一个最大的。

§3. **最大公度定理** 求兩条線段的最大公度要根据下面兩个定理：

定理 1. 在兩条線段中，如果較長的線段含有較短的線段的整数倍而沒有剩余，那末較短的線段就是它本身和較長的線段的最大公度。

假設線段 AB(圖 7)恰含有線段 CD 的 n 倍。顯然，線段 CD 是它

① 或不容尺最早見於"墨子"中，他說"窮、或有前不容尺也。"意思是：如果用尺去量东西，或者量完，或者剩下小於一尺的一段。希臘数学家阿基米得(紀元前 287 年—紀元前 212 年)也曾經提过这个公理。他比墨子大約晚 200 年。

本身的1倍。由此可知線段CD是線段AB和線段CD的公度。因为線段CD不可能含有比它本身更大的任何線段的整数倍，所以線段CD是線段AB和線段CD的最大公度。

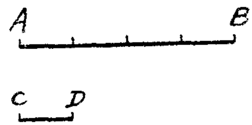

圖 7.

定理 2. 在兩条線段中，如果較長的線段含有較短的線段的整数倍而有剩余，那末这兩条線段的最大公度（如果存在的話）等於較短的線段和剩余線段的最大公度。

設線段AB含有線段CD的n倍而有剩余$MB=r$（圖8）。即：

$$AB=n\cdot CD+r.$$

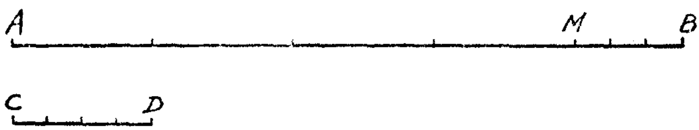

圖 8.

由这个等式知道，(1)如果線段CD和線段r都含有某一線段q的整数倍而沒有剩余，那末線段AB一定也含有q的整数倍而沒有剩余。換句話說，如果q是CD和r的公度，那末它一定也是CD和AB的公度。

例如，在等式$AB=4CD+r$中，設$CD=4q$，$r=3q$，於是$AB==4(4q)+3q=19q$。这說明了如果q是CD和r的公度，它也是CD和AB的公度。

(2)如果線段AB和線段CD都含有某一線段q的整数倍而沒有剩余，那末線段r一定也含有q的整数倍而沒有剩余。換句話說，如果q是AB和CD的公度，那末它一定也是CD和r的公度。

例如，在等式$AB=4CD+r$中，設$AB=19q$，$CD=4q$，於是$r==AB-4CD=19q-4(4q)=3q$。这說明了如果q是AB和CD的公度，它也是CD和r的公度。

因此，兩組線段

$$AB \text{ 和 } CD, \quad CD \text{ 和 } r$$

如果有公度，它們的公度就完全相同，所以它們的最大公度也相同。

§4. 兩条線段的最大公度的求法 設線段 a 和線段 b 有公度，並且 $a>b$，要求線段 a 和線段 b 的最大公度，我們就在線段 a 上从一端起，連續截取等於 b 的線段，截到某次以后，根据或不容尺公理，就会產生下面兩种情况中的一种：

（1）正好截完，一点沒有剩余，也就是線段 a 含有線段 b 的整数倍而沒有剩余。这时根据 §3 定理 1 知道，線段 a 和線段 b 的最大公度就是 b。

（2）沒有截完，而剩下的一段 r_1 小於 b，也就是線段 a 含有線段 b 的整数倍而有剩余 $r_1<b$，这时根据 §3 定理 2 知道，線段 a 和線段 b 的最大公度就是線段 b 和線段 r_1 的最大公度。

为了求这个公度，照上面的方法，在線段 b 上从一端起連續截取等於 r_1 的線段，截到某次以后，也会產生下述兩种情况中的一种：或者正好截完沒有剩余，这时 r_1 就是 r_1 和 b 的最大公度，也是 b 和 a 的最大公度；或者沒有截完，而剩下的一段 $r_2<r_1$。对於 r_2 來說，也有类似的情况發生。

这样繼續輾轉相截，所截得的結果可以表示如下：

$$
\begin{array}{ll}
a=n_1b+r_1, & r_1<b \\
b=n_2r_1+r_2, & r_2<r_1 \\
r_1=n_3r_2+r_3, & r_3<r_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
r_{m-2}=n_mr_{m-1}+r_m, & r_m<r_{m-1} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &
\end{array}
$$

从这些式子我們知道，在剩余線段 r_1、r、r_3、…、r_m、… 中，如果有一条，例如 r_{m-1}，含有下一回剩余線段 r_m 的整数倍而沒有剩余，那末 r_m 就是 a 和 b 的公度。这个道理很明顯，因为 r_{m-1} 含有 r_m 的整数倍而沒有剩余。根据 §3 定理 1，r_m 是 r_m 和 r_{m-1} 的最大公度，再根据 §3 定理 2，r_m 也是 r_{m-1} 和 r_{m-2}、…、r_1 和 b 的最大公度。因而也是 b 和

a 的最大公度。

假若線段 a 和 b 有公度，我們就能夠斷定輾轉相截的过程不会永远不停地繼續進行，也就是在剩余線段 r_1、r_2、r_3、…、r_m、… 中，一定能夠找到这样一条，例如 r_{m-1}，它含有下一回剩余線段 r_m 的整数倍而沒有剩余。下面我們來說明这个道理。

設 s 是線段 a 和 b 的最大公度，那末 s 也是 b 和 r_1、r_1 和 r_2、…、r_{m-1} 和 r_m、… 的最大公度（§3 定理 2）。所以剩余線段 r_1、r_2、r_3、…、r_m、… 都含有 s 的整数倍而沒有剩余。又知道这些剩余線段一条比一条小，所以它們含有 s 的整数倍也一条比一条少。由於这些剩余線段中的任何一条都不能小於 s，那末最小的一条剩余線段，例如 r_m，只能是 s 的 1 倍，卽 $r_m=s$。因此，r_{m-1} 含有 r_m（卽 s）的整数倍而沒有剩余。

例. 設 AB 和 CD 是已知的兩条線段（圖 9），且 $AB>CD$，求 AB 和 CD 的最大公度。

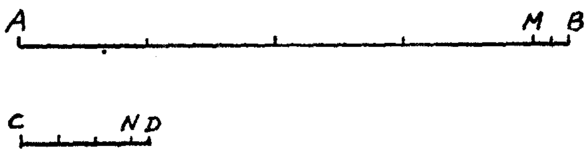

圖 9.

在線段 AB 上，从 A 点起，連續截取等於 CD 的線段，假定截了 4 次，得剩余線段 $MB<CD$。再在線段 CD 上从 C 点起，連續截取等於 MB 的線段，假定截了 3 次，得剩余 $ND<MB$。又在 MB 上从 M 点起，連續截取等於 ND 的線段，假定截了 2 次，正好截完，沒有剩余。於是

$$AB=4CD+MB,$$
$$CD=3MB+ND,$$
$$MB=2ND。$$

所以

$$AB=4(3MB+ND)+MB=4(3\cdot 2ND+ND)+2ND=30ND,$$

$$CD=3\cdot 2ND+ND=7ND。$$

因此 ND 是 AB 和 CD 的最大公度。

§5. 無公度線段 兩条線段如果沒有公度，就叫做**無公度線段**。

上節已經講过，輾轉相截一定能夠求得兩条有公度線段的最大公度。如果兩条線段沒有公度，輾轉相截的过程就要永远不停地繼續進行；不然，已知的兩条線段就有公度了。但是，在輾轉相截时，好像可能得到这样一条剩余線段，从表面上看來，上一回的剩余線段正好含着它的整数倍而沒有剩余，因而怀疑無公度線段的存在，实际上，这时还应該有更小的剩余線段，不过受了仪器和視覺的限制，观察不到罢了。下面的定理說明了無公度線段确实是存在的。

定理 正方形的对角線和它的边無公度。

因为每个正方形都被它的一条对角線分为兩个全等的等腰直角三角形。所以这个定理也可以这样說：等腰直角三角形的斜边和直角边無公度。

我們就用等腰直角三角形來証明这个定理。

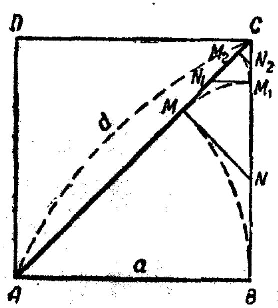

圖 10.

已知：在等腰直角三角形 ABC 中，直角边 $AB=BC=a$，斜边 $AC=d$（圖 10）。

求証：a 和 d 無公度。

証明：首先用 AB 去截 AC。以 A 点为圓心，AB 为半徑画弧交 AC 於 M 点。在三角形 ABC 中，$AB<AC<AB+BC$，也就是 $AB<$ $<AC<2AB$，所以用等腰直角三角形 ABC 的直角边 AB 去截斜边 AC，截 1 次后得剩余線段 $r_1=MC<a$。因此

$$d=a+r_1,\quad r_1<a。$$

其次，用 $r_1=MC$ 去截 AB。因为 $AB=BC$，为了方便，我們就用 $r_1=MC$ 去截 BC。过 M 点作垂直於 AC 的直線 MN 交 BC 於 N 点，

就得 $MN=BN$（由圓外一点向圓上引的兩切線相等），和 $MN=MC$（它們是等腰直角三角形 CMN 的直角边）。因此，用 $r_1=MC$ 去截 BC，截了一段 $BN=MC=r_1$ 后，如果再截下去，就变成了用等腰直角三角形 CMN 的直角边 $r_1=MC$ 去截斜边 NC 的問題了。

由此可見，照这样繼續輾轉截下去，每次总是重行上次的手續，这样就永远不会截完。因此 a 和 d 無公度。

§6. **線段度量的概念** 为了要度量一条線段，例如 AB，我們取另一条線段 CD，把它叫做**長度單位**，並在線段 AB 上从一端起連續截取等於長度單位的線段。这个过程就叫做用**長度單位 CD 去量線段 AB**。由於被量線段 AB 和長度單位 CD 可能有公度，也可能沒有公度。因此，我們分兩种情形來研究：

第一种情形 設被量線段 AB 和長度單位 CD 有公度。

如果 AB 和 CD 的最大公度是 CD，用 CD 去截 AB，截了若干次，比如說 8 次，恰好截完，沒有剩余。那末線段 AB 的長度就是 8 个單位。这时表示線段 AB 長度的数是整数 8。

如果 AB 和 CD 的最大公度小於 CD，那末 AB 和 CD 都含着它們的最大公度的整数倍，而沒有剩余。例如，AB 和 CD 分別含着它們的最大公度的 11 倍和 4 倍。这时表示線段 AB 長度的数是分数 $\frac{11}{4}=2\frac{3}{4}$。

通常，表示線段長度的数是用十進小数。为了把線段 AB 長度的数表成十進小数，我們用長度單位 CD 去截 AB（如果 AB 大於 CD 的話），截了若干次（比如說 2 次）后，剩下小於 CD 的一段 r_1，再用 $\frac{1}{10}CD$ 去截 r_1，截了若干次（比如說 7 次）后，剩下小於 $\frac{1}{10}CD$ 的一段 r_2，再用 $\frac{1}{100}CD$ 去截 r_2，截了若干次（比如說 5 次）后，正好截完，沒有剩余。这时表示線段 AB 長度的数是 2.75。这是一个有限十進小数，把它化为分数，就得 $\frac{11}{4}$。所以 $AB=\frac{11}{4}CD$。这时 AB 和 CD 的最大

公度是 $\frac{1}{4}CD$。

有时用長度單位 CD 去量線段 AB，得一个循环小数，例如 5.1666…，把它化为分数得 $\frac{31}{6}$，卽 $AB=\frac{31}{6}CD$。所以 AB 和 CD 的最大公度是 $\frac{1}{6}CD$。

总起來說，当被量線段 AB 和長度單位 CD 有公度时，用 CD 去量 AB，所得的数是一个整数或分数，也就是一个**有理数**。如果 AB 和 CD 的最大公度是 CD，那末表示 AB 長度的数是一个整数；如果 AB 和 CD 的最大公度小於 CD，那末表示 AB 長度的数是一个分数（有限十進小数或循环小数）。

第二种情形　設被量線段 AB 和長度單位 CD 沒有公度。

用 CD 去量 AB（圖11）。由或不容尺公理（§1），可以求得这样一

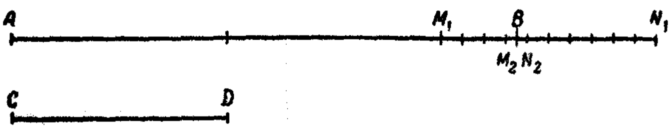

圖 11.

个正整数 n，使 $n\cdot CD<AB$，且 $(n+1)CD>AB$。例如，設 $n=2$，就是 $2CD<AB$，且 $3CD>AB$。設 $2CD=AM_1$，且 $3CD=AN_1$（圖11）。那末 $AM_1=2$ 是 AB 的不足近似值，$AN_1=3$ 是 AB 的过剩近似值。因为 AB 和 AM_1 或 AN_1 的差都小於長度單位 CD，所以用 AM_1 或 AN_1 表示 AB 的長度都准确到 1。把線段 $M_1N_1=CD$ 分为 10 等分，仍由这个公理，又能夠求得这样一个正整数，例如 3，使 $\frac{3}{10}CD<M_1B$，且 $\frac{4}{10}CD>M_1B$。設 $\frac{3}{10}CD=M_1M_2$，$\frac{4}{10}CD=M_1N_2$，那末 $AM_2=2.3$ 和 $AN_2=2.4$ 分别是 AB 准确到 0.1 的不足和过剩近似值。再把線段 $M_2N_2=\frac{1}{10}CD$ 分为 10 等分，同样又能夠求得这样一个整数，例如 6，

使 $\frac{6}{10}\left(\frac{1}{10}CD\right)=\frac{6}{100}CD<M_2B$，且 $\frac{7}{100}CD>M_2B$。設 $\frac{6}{100}CD=$ $=M_2M_3$，$\frac{7}{100}CD=M_2N_3$，那末 $AM_3=2.36$ 和 $AN_3=2.37$ 分別是 AB 准确到 0.01 的不足和过剩近似值。由於 AB 和 CD 沒有公度，所以用 CD、$\frac{1}{10}CD$、$\frac{1}{100}CD$、…分别去量 AB、M_1B、M_2B、…时，总有剩余。因此，用 CD 量 AB，就得到一个無限小数 2.36…。这个無限小数不可能是循环的，因为循环小数都能化为分数，这样就和題設矛盾了。

因此，当被量線段 AB 和長度單位 CD 沒有公度时，用 CD 量 AB，所得的数是一个無限非循环小数。也就是一个**無理数**。

当度量線段时，在大多数情形下，只能根据所需要的准确度近似地表达出來。因此，在对線段的近似長度進行运算时，必須遵守近似数的数字計算法則。

由上面所講的度量線段的方法，可以推出線段長度的三个基本性質：

1. 相等的線段有相同的長度。
2. 較大的線段有較大的長度。
3. 許多線段和的長度等於这些線段長度的和。

顯然，用不同的單位去量同一線段时，所量得的数也不相同。如果單位擴大若干倍，所量得的数就縮小同样的倍数。例如，用1厘米作为長度單位去量線段 AB，如果量得的数是35，那末用1米(即100厘米)作为長度單位去量線段 AB，量得的数就是 $0.35=35\times\frac{1}{100}$。

今后如果我們說到線段的長度，在長度單位已經确定了以后，应当理解为表示線段長度的数。

II. 比例線段

§7. 兩線段的比　定义　兩条線段的比就是用同一个長度單位

去量这兩条線段所得的数的比。

例如，用長度單位 u 去量兩条線段 AB 和 CD，如果所得的数分别为 a 和 b，那末

$$AB:CD=a:b,\quad 或\quad \frac{AB}{CD}=\frac{a}{b}。$$

从一种長度單位变为另一种長度單位时，表示兩条線段長度的数也就从原來的兩个变为另外的兩个，后兩个是前兩个分别和同一个常数的相乘積。所以这兩条線段的比不变，也就是線段的比和長度單位無关。

例如，用厘米为單位去量線段 AB 和線段 CD，所得的数如果分别是 5 和 4，那末

$$\frac{AB}{CD}=\frac{5}{4}。$$

取毫米为單位再去量線段 AB 和線段 CD，所得的数分别为 $50=5\times10$ 和 $40=4\times10$，所以

$$\frac{AB}{CD}=\frac{50}{40}=\frac{5}{4}。$$

如果取 CD 作为長度單位，那末線段 AB 和線段 CD 的比，就是表示線段 AB 長度的数。

如果兩条線段有公度，它們的比是一个有理数；如果兩条線段沒有公度，它們的比是一个無理数。

例如，設線段 AB 和線段 CD 有公度，它們的最大公度的長度是 m，並且 AB 正好含着 m 的 4 倍，而 CD 正好含着 m 的 3 倍。由兩条線段的比的定义有

$$\frac{AB}{CD}=\frac{4m}{3m}=\frac{4}{3}。$$

如果線段 CD 就是 AB 和 CD 兩線段的公度，那末比 $\frac{AB}{CD}$ 是一个整数。因此，有公度線段的比是一个有理数。

無公度線段的比不可能是整数或分数，因为不論在那种情形，它們