代數曲線

R. J. 瓦克

科學出版社

代　數　曲　線

R. J. 瓦克著
張　　燮譯

科　學　出　版　社
1958

代　數　曲　線

R. J. 瓦　克　著

張　　　燮　譯

*

科學出版社出版(北京朝陽門大街117號)

北京市書刊出版業營業許可證出字第061號

科學出版社上海印刷廠印刷　新華書店總經售

*

1958年9月第一版	書號：1368　字數：193,000
1958年9月第一次印刷	開本：787×1092 1/27
(滬)0001—2,374	印張：8 12/27

定價：(10) 1.20元

R. J. WALKER

ALGEBRAIC CURVES

PRINCETON, NEW JERSEY, 1950.

內 容 簡 介

本書是根據蘇聯外國書籍出版社1952年出版的 А. И. Узков 所譯 Алгебраические кривые 一書譯出．該書原著爲英文(R. J. Walker, Algebraic Curves, Princeton, 1950)．這本書對於普通代數曲綫有詳盡的討論．讀者只須具有大學二年級的數學程度，即可閱讀本書而無困難．

本書要目如下：代數學的預備知識，射影空間，平面代數曲綫，形式冪級數，曲綫的變換，綫性列．其中前兩部分是供以後各章使用的基礎．這樣使得本書自成一體，而幾乎完全不必依賴其他參考資料．

目　　錄

第二章　射影空間

第三章　平面代數曲綫

第四章　形式冪級數

第五章　曲綫的變換

第六章　綫性列

俄文版譯者序

瓦克的這本書，是代數幾何學中與曲綫有關部分的引論．開首兩章包括——爲閱讀本書後部所必需的——代數與射影幾何的全部知識．這樣可以使大學二年級的學生就能看懂這本書．第三章討論與代數曲綫的奇點和交點有關的問題．在這一章的最後一節中，證明了任何代數曲綫都可以用二次變換化爲如此的曲綫，使它只有相異切綫的多重點．第四章專講冪級數及其應用．這裏完全解決了關於決定代數曲綫的交點相重數的問題，並詳盡地證明了關於兩個曲綫的交點個數的貝竹定理．在這一章最後,講了諾特爾關於通過兩個已知曲綫的所有一切交點的曲綫的定理．第五章包括與有理變換及雙有理變換有關的問題的敍述．在這一章裏，討論了空間曲綫——最初定義爲平面曲綫在雙有理變換之下的像，最後一章引入與曲綫的雙有理不變性有關的一些概念．

作者總是逐步引入抽象概念的，他先講所討論的對象的最簡單表現,然後逐步使讀者明瞭在研究當中所發生的困難,這樣便自然而然地引出了用以克服此種困難的進一步工具．例如，在計算兩個曲綫的交點個數時,起初只考慮幾何上不同的點(第三章),而對於它們的個數證明了呈不等式形狀的較弱的貝竹定理;等到讀者開始感覺,對於每點都要考慮它的必要相重數是不方便的時候，才引入了一種工具(第四章),使得易於給出交點的相重數的適當定義,而且將曲綫點的"相重數"與某些"支"相聯系——這些支的中心在所講的點處．

作者分析了大量的具體的例子，此外還將許多問題列爲習題．這些問題並不困難，但讀者必須完全瞭解正文中所講的材料而且完全掌握了所講的方法以後,才能做得出來．在某幾節內,除了計算題以外還附了一些定理，我們建議讀者利用作者所用的方法來證明它們．

原 序 節 錄

本書是作爲代數幾何學的初步知識而寫的，其材料與敘述方法按照下列要求來選取：1)儘可能用初等方法敘述；2)引進處理代數幾何問題的某些近代的代數方法，並說明這種方法與較老的解析方法和幾何方法的關係；3)說明一般方法對於特殊幾何問題的應用．由於這些要求，使得我們所選的材料都集中在雙有理變換與代數曲綫的綫性列方面．

根據教學的經驗，我們必須先講一些關於代數與射影幾何的知識．本書開首兩章便是這樣做的． 由於包括了這些材料，使得本書幾乎可以完全不依賴其他資料而獨立的敘述．

記 號 索 引

下面註出了各種記號的定義所在(或者各種記號初次出現)的頁數. 關係式的否定情形,用斜綫畫過這種關係式的記號來表示.

g_n^r——n 階 r 維綫性列,182

K——基本體,37

K——典型列,198

$O(f)$——冪級數的階,99

$O_p(\varphi)$——支上的有理函數的階,147

$O_p(f)$——支上的多項式的階,119

S_n, SK_n——K 上的 n 維射影空間,39

Σ——曲綫上的有理函數體,145

定理與公式都是按節編號的．例如“定理 3.5”代表所講的一章中 § 3 的定理 5． 如果所引的定理在其他章內，則將章數指出． 例如，“定理 IV—3.5”代表第四章 § 3 定理 5．

第一章　代數學的預備知識

由名稱本身可以看出,代數幾何本質上總是要與代數相聯系的.隨着時間的進展,代數的工具在代數幾何中所佔的地位越來越重要,到了今日,代數幾何中的相當大的部分都是講代數的.

因此,如果對於代數學沒有相當基礎的話,便不可能系統地研究這門學問.本章材料的選擇,正是為了保證打好這個基礎.這裏我們並不打算完整地敘述任何代數理論,而僅僅給出以後所必需的知識.

關於本章所論問題的完備的敘述,例如可以參看房·德·瓦登的"近世代數"俄譯本卷 1, 2 (1947 年).

§ 1.　集合論的知識

1.1 集合　在所有的數學討論中,我們對於一定事物類的性質感到興趣.例如,在初等代數中,我們主要和實數打交道,而在平面幾何中,主要與平面上的點打交道.在談到某個事物類時,我們叫它做集合(或集),而事物本身叫做這個集合的元素.設 S 為某個集合, a 為事物,則記號 $a\in S$ 代表 a 是 S 的元素.又記號 $a\notin S$ 的意義為 a 不是 S 的元素.

集合 S 叫做集合 S' 的子集,倘若 S 的每個元素都是 S' 的元素.此時可以寫 $S\subset S'$ 或者 $S'\supset S$.例如 S_1 為實數集, S_2 為一切整數的集,而 S_3 是由一個數目 3 所組成的集,那末我們便有 $S_1\supset S_2\supset S_3$.

由上述定義可知,每個集合都是它本身的子集.兩個集合相同(也就是說,它們由同樣的元素所組成)的必要與充分條件為:所論的每個集合都是另一個集合的子集.倘若 S 是 S' 的子集,但不等於 S',那麼為了强調這一點,我們稱 S 為 S' 的真子集.

所謂空集,便是這樣的一種特殊集,它根本沒有元素.這種集顯然是任何集的子集.利用空集的概念,在許多討論中都有便利之處.

1.2 單值映像 所謂將集合 S 映於集合 S' 內的單值映像(或者變換),便是任一種如此的規則,使得 S 中的每個元素 a 都對應於 S' 中的一固定元素 a'. 對應於 a 的元素 a',稱爲 a 在所論映像之下的影像(或像). 倘若 S' 中的每個元素 a' 恰恰對應於 S 中的一個元素 a,則稱 S 相互單值地映像於 S' 內. 此時也可以確定一個將 S' 映於 S 內的逆映像.

習見的映像的例子,可以從解析幾何裏找到. 設 S 爲一切可能的實數偶 (a, b) 的集合,而 S' 爲歐幾里得平面上的點集,則由笛卡兒坐標系或者極坐標系可以决定一種將 S 映於 S' 內的映像. 由任一組笛卡兒坐標系所决定的映像都是相互單值的. 但由極坐標系所决定的映像,則非相互單值的. 在第二章中,要討論與射影坐標有關的映像.

在以後所遇到的各種不同類型的集合中,都要决定元素之間或者子集之間的某些關係. 倘若某種映像能够保持已知的一組關係,也就是說,倘若任一組元素的影像都能滿足各該元素之間的原有關係,則稱此種映像爲同態映像(或者同態). 倘若相互單值的映像在兩個方向上都是同態的,則稱其爲同構映像. 設 S 與 S' 二集具有公共的子集 S_0,而且在某種將 S 映於 S' 內的同態映像之下,S_0 中的每個元素都對應於本身,則稱此種同態映像爲在 S_0 上的同態映像. 例如,設 S 爲複數集,S_1 爲一切實數的集合. 取一種映像,使每個數目 $a + bi$ 對應於 a,則此種映像即爲在 S_1 上將 S 映於 S_1 內而且保持元素之間的加法關係的同態映像.

倘若兩個集合對於某種關係而言是同構的,那麼僅僅考慮此種關係時,便無法辨別這兩個集合,因而我們往往將同構的集合看作是相同的.

1.3 等價類 當我們說,某個集 S 的兩個元素 a, b 相等(即 $a = b$)時,其意義爲:a, b 兩個字母代表 S 中的同一元素. 集合的元素之間(精確些說,元素的記號之間)的相等關係,具有下列性質:

1) 自反性:$a = a$.

2) 對稱性:由 $a = b$ 可以推出 $b = a$.

3）傳遞性：由 $a=b$ 與 $b=c$ 可以推出 $a=c$.

我們往往也要考慮具有上列性質的其它關係，這樣的關係通常叫做等價關係. 例如，取 S 爲正整數集，倘若 S 中的兩個元素之差爲偶數，則稱此二元素等價. 此時易於驗證，上列性質1、2、3都成立.

設以 $\sim$ 代表 S 集的元素之間的某種等價關係. 對於任何元素 $a\in S$，用 S_a 代表 S 中一切與 a 等價的元素所成的集. 則由性質1可知 $a\in S_a$. 其次我們指出，對於任意兩個元素 a, b 而言，或者 $S_a=S_b$，或者 S_a 與 S_b 二集沒有公共元素. 事實上，倘若 S_a 與 S_b 有一個公共元素 c，則 $c\sim a$, $c\sim b$，從而即知 $a\sim b$. 現在設 $d\in S_a$，則 $d\sim a$，由此即知 $d\sim b$，從而 $d\in S_b$. 於是 $S_a\subset S_b$；同理也可以得出 $S_b\subset S_a$，所以 $S_a=S_b$. 由此可知，S 集可以分解爲若干個不相交的子集 S_a. 這些子集叫做等價類.

等式 $S_a=S_b$ 當而且僅當 $a\sim b$ 時成立. 事實上，倘若 $a\sim b$，則 $a\in S_b$. 但 $a\in S_a$，所以 $S_a=S_b$. 反之，倘若 $S_a=S_b$，則 $a\in S_b$，從而 $a\sim b$. 這樣，S 的元素之間的等價關係，便可以用 S 集的某些子集之間的等價關係來代替. 這種方法是極其有用的，因爲它可以使我們避免對於以後所遇到的各種不同的等價關係引用不同的記號.

§2. 整環與體

2.1 代數系 在初等代數中，我們所關心的事物主要是實數. 但有一點值得注意：此時我們並不注意這些事物的本性，而僅僅考慮它們的性質，也就是考慮這些事物的結合方法，以及在結合時所得到的關係. 一般型式的代數系是某種集 S，其中規定了一些規則或者公理，用以決定 S 的元素之間的關係. 由下面的一組公理可以決定一種重要的代數系——體.

A_1. S 中每個有序的元素偶 a, b 都對應於 S 中的一固定元素，它叫做 a, b 的和，用 $a+b$ 代表.

A_2. $a+b=b+a$.

A_3. $(a+b)+c=a+(b+c)$.

A_4. 有如此的元素 $0 \in S$ 存在，使得對於任何 $a \in S$ 而言，都有 $a+0=0+a=a$. 元素 0 叫做零(或零元素).

A_5. 對於 S 中的任何元素 a 而言，恆有如此的元素 $-a$ 存在，使得 $a+(-a)=-a+a=0$. 元素 $-a$ 稱爲 a 的負元素.

A_6. S 中每個有序的元素偶 a, b 都對應於 S 中的一固定元素，它叫做 a, b 的積(或者乘積)，用 ab 或者 $a \cdot b$ 代表.

A_7. $ab = ba$.

A_8. $(ab)c = a(bc)$.

A_9. 有如此的元素 $u \in S$, $u \neq 0$ 存在，使得對於任何 $a \in S$ 而言，都有 $au = ua = a$. 元素 u 叫做單位(或單位元素).

A_{10}. 對於 S 中的每個元素 $a \neq 0$ 而言，都有如此的元素 a^{-1} 存在，使得 $aa^{-1} = a^{-1}a = u$ 元素. a^{-1} 叫做 a 的逆元素.

A_{11}. $a(b+c) = ab + ac$, $(b+c)a = ba + ca$.

A_{12}. 倘若 $ab = 0$ 而 $a \neq 0$, 則 $b = 0$.

因爲實數集滿足上述一切條件，所以實數集便是一個體. 複數集與有理數集也是體，整數集不成爲體，因爲公理 A_{10} 不成立. 對於整數集而言，其餘的公理都是成立的.

滿足公理 $A_1, \cdots, A_9, A_{11}, A_{12}$ 的集合稱爲整環.

倘若再將假設減弱一些，使得祇有 $A_1, \cdots, A_6, A_8, A_{11}$ 這幾個條件成立，則得環的概念. 倘若在環中還成立着公理 A_7, 則稱其爲可換環.

滿足條件 A_1, A_3, A_4, A_5 的集合，叫做羣.

例 1. 設 S 集由 $0, u$ 兩個元素組成，其加法與乘法的規則如下：

$$0+0=u+u=0, \quad 0+u=u+0=u,$$

$$00=0u=u0=0, \quad uu=u.$$

則 S 集即爲一個體.

例 2. 倘若在上面的 S 集內規定如次的運算：

$$0+0=u+u=0, \quad 0+u=u+0=u,$$

$$00=0u=u0=uu=0.$$

則 S 爲可換環，但不是體，也不是整環.