中学1+1
2003全新版
宋伯涛 总主编

北京朗曼教学与研究中心教研成果

宋伯涛 总主编

本丛书英语听力部分由高考英语听力配音者

Paul Denman 和 **Catherine Marsden** 朗读

中学数学

Maths

1+1

高三数学同步讲解与测试（上）

张志朝 主编

天津人民出版社

■责任编辑：黄　沛
■封面设计：何　倩

本丛书英语听力部分由高考英语听力配音者

Paul Denman 和 **Catherine Marsden** 朗读

中学1+1 2003全新版

宋伯涛 总主编

中学数学

本套丛书针对中学现行教材及最新考试题型，结合基础知识、重点难点及各专题编写而成，既有理论指导，又有同步测试，既有解题指导，又有热线答疑，条理清晰，层次分明，分析透彻，内容丰富，集领悟、理解、分析、判断等思维活动于一体，具有较强的实用性和指导性，旨在开拓学生的解题思路，提高学生综合运用知识的能力。本中心愿与全国广大师生携手共勉，切磋探讨，共同研究，建立友谊。

ISBN 7-201-04439-7

9 787201 044392 >

ISBN 7-201-04439-7/

定价：15.00元

北京朗曼教学与研究中心资料

中学数学 1+1

——高三数学同步讲解与测试
（上　册）

主编　张志朝

天津人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

中学 1+1·高三数学同步讲解与测试·上/宋伯涛总主编;张志朝分册主编.—天津:天津人民出版社,2003
ISBN 7-201-04439-7

Ⅰ.高… Ⅱ.①宋… ②张… Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G634.303

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 028884 号

中学数学 1+1

高三数学同步讲解与测试(上)

主编 张志朝

*

天津人民出版社出版
出版人:刘晓津
(天津市张自忠路 189 号 邮政编码:300020)
网址:http://www.tjrm.com.cn
电子信箱:tjrmchbs@public.tpt.tj.cn
郑州市毛庄印刷厂印刷 新华书店发行

*

2003 年 6 月第 1 版 2003 年 6 月第 1 次印刷
890×1240 毫米 32 开本 13.25 印张
字数:430 千字 印数:1-20,000
定价:15.00 元
ISBN 7-201-04439-7/

再版前言

国家基础教育课程改革启动至今已近两年，义务教育《课程标准》的实施范围正在逐步扩大，新的教育理念被越来越多的教育工作者和社会人士所接受，我国基础教育事业正经历着一次深刻的变革。这个变革的核心，对于教师来说，就是改变角色定位；对于学生来说，就是变革学习方式。本着这样的精神，同时为了适应课程改革深入发展的需要，今年再版时，我们在广泛征求专家、教师、学生和家长意见的基础上，作了较大程度的修改。

本书以新数学大纲为指导，按照新教材的体系分章编写。其特点在于结合教材对各章节重点、难点、疑点及考点等逐一进行讲解，内容详尽，条理清晰，分析透彻，所选例题题型系统全面。所涉及内容主要是各单元应掌握的**基础知识、知识运用、思维方法、解题方法**等，其中对例题的分析处理十分到位，不仅有恰到好处的思路点拨与规范解答，更重要的是解题后的说明，它是作者解题的体会和感受，是解题经验的总结。因此也可以说它是作者从解题实践中具体概括出来的精髓。在说明中，作者言简意赅地揭示巧思的思维过程；如何灵活地选用数学方法；对于可转化或引申的题目，给出其转化或引申的形式及其解法；对题中可能出现的错解予以指出等等。它将给学生以启示，帮助学生领悟作者选题的意图，使学生做到立足基础，抓住关键，突破难点，研究方法，以一题代一类，真正使学生做到举一反三，触类旁通，从而达到跳出题海、启迪思维的效果。同步测试部分根据各章节特点对基础知识、重点难点、知识应用进行针对性的巩固训练。其中选用了目前各地较为常用的题型，增加了一些体现近几年中考与高考命题方向的新题，并补充了一些与生产生活密切相关的应用题，可以说题型十分丰富，且综合性强，旨在帮助学生巩固知识，提高综合运用知识的能力。

学生在使用本书过程中，应结合教科书，努力掌握知识点的各种用法及注意事项，对某些重点难点要进行仔细的分析、研究，结合例题，做到深刻理解与牢固掌握。做同步练习时，要结合教科书及讲解内容进行独立思考，首先考虑应选择何种解题思路与策略，然后实施解题，并注意解题的规范性，解题结束后可与题解对照，弄懂弄通为什么是这个答案而不是那个答案？为什么这样解而不是那样解？还可以怎样解？怎样才对？从一个点进行散发性联想思维。课后还应对某些重点题目进行反复的再思考、再分析、再总结。有问题主动询问，及时解决。

学习《课程标准》，更新教育观念，有一个不断深入的过程；课程改革的实施，也需要不断地探索和积累。本书此次修订正是学习《课程标准》，改革教学内容和方法的一个具体的落实。希望我们的努力能给老师和同学们的教学活动带来切实而有效的帮助，虽然我们兢兢业业，勉力为之，但因水平有限，难免有错漏之处，诚望批评指正，以利再版时修改和完善。

凡需要本书以及本系列其他图书的读者可与本中心联系，联系电话：010-64925886，64925887，通信地址：北京市朝阳区亚运村邮局 89 号信箱。

宋伯涛

2003 年 6 月于北师大

CONTENTS

目录

第一篇 基础知识精讲

第1章 集合与简易逻辑

集合是高中数学最基本的概念之一，集合思想是一种重要的数学思想，应渗透于高中数学的各个分支；集合作为一种数学工具，它在函数、方程、不等式、排列组合及曲线与方程等方面都有广泛的运用.

逻辑是研究思维形式及其规律的一门科学，无论学习数学，还是日常生活，都需要掌握一定的推理技能和思维能力，这些都离不开对逻辑知识的掌握和应用，因此，逻辑知识是我们认识问题、研究问题不可缺少的工具.

复习目标

1. 在集合复习时，不仅要注重集合的概念、性质及运算，更应该注重运用集合语言和思想参与解决函数、方程和不等式等有关问题.

2. 了解命题的概念和由“或”、“且”、“非”联结词联结而成的复合命题，并能判断简单命题以及由简单命题通过逻辑联结词构成的复合命题的真假，会构造一个命题的逆命题、否命题、逆否命题，掌握这四种命题间的内在关系.

高考要求

1. 集合是每年高考必考的知识点之一，是建立在理解集合及其表示方式等概念的基础上，高考用选择和填空的形式，主要考查集合的运算和求有限集合的子集及其个数.

2. 简易逻辑是一个新增内容，结合其内容的特点，在高考中应一般在选择题、填空题中出现，如果在解答题中出现，则只会是中低档题.

知识要点

一、集合

1. 集合的基本概念

一些对象的全体构成一个集合，构成集合的各个对象叫做这个集合的元素.

设某集合为 M，a 是 M 的元素，记作 $a\in M$，读作 a 属于集合 M，b 不是 M 的元素，记作 $b\notin M$，读作 b 不属于集合 M.

空集：不含任何元素的集合叫做空集，记作$\varnothing$.

2. 集合的特征

(1)元素的确定性:任何一个对象或者是这个给定集合的元素,或者不是它的元素,两者必居其一,而且只居其一.

(2)元素的互异性:对于给定集合中的任何两个元素都是不同的对象.

(3)元素的无序性:在给定集合中元素之间无顺序关系.即集合中的元素相互交换次序所得的集合与原来的集合是相同的.

解题时要注意这些特性.

3.集合的表示法

(1)列举法:把集合的元素一一列举出来,写在大括号内.

(2)描述法:把集合的元素的公共属性描述出来,写在大括号内.其模式为$\{x|p(x)\}$.

(3)韦恩图:用一条闭曲线围成的图形表示集合.

4.集合的分类

(1)有限集:含有有限个元素的集合叫做有限集.并且我们称只含有一个元素的集合为一元集、含有二个元素的集合为二元集……含有 n 个元素的集合为 n 元集.

(2)无限集:含有无限个元素的集合叫做无限集.例如:自然数集 N、有理数集 Q、实数集 R、复数集 C 等都是无限集.

5.子集、交集、并集、补集

(1)子集的意义:对于两个集合 A 与 B,如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,那么集合 A 叫做集合 B 的子集.记作 $A\subseteq B$.如果 A 是 B 的子集,并且 B 中至少有一个元素不属于 A,那么集合 A 叫做集合 B 的真子集,记作 $A\subsetneq B$.

子集的性质:$A\subseteq A$,$\varnothing\subseteq A$,$\varnothing\subsetneq A$(若 $A\neq\varnothing$).

若 $A\subseteq B$,$B\subseteq C$,则 $A\subseteq C$;　　若 $A\subsetneq B$,$B\subseteq C$,则 $A\subsetneq C$;

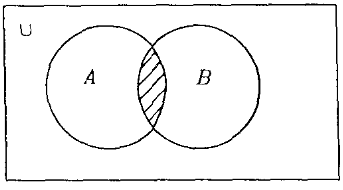
若 $A\subseteq B$,$B\subsetneq C$,则 $A\subsetneq C$;　　若 $A\subsetneq B$,$B\subsetneq C$,则 $A\subsetneq C$.

子集的个数:n 元集有 2^n 个子集、2^n-1 个真子集、2^n-1 个非空子集、2^n-2 个非空真子集.

(2)集合相等的意义:若集合 A 与 B 含有相同的元素,(即任 $x\in A$,均有 $x\in B$.且任 $y\in B$,均有 $y\in A$)则称它们相等,记作 $A=B$.

集合相等的充要条件:$A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A\Leftrightarrow A=B$.

3.交集的意义:由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合,叫做 A、B 的交集,记作 $A\cap B$,即 $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$(也就是由 A,B 的公共元素组成的集合).用韦恩图表示为:

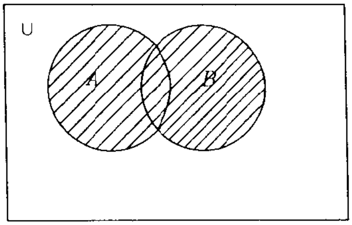


交集的性质：$A\cap A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$. $A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$. $A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$.

(4)并集的意义：由所有属于集合 A 或者属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A、B 的并集，记作 $A\cup B$，即

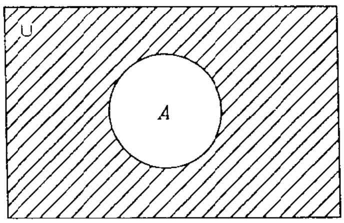
$A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$.

用韦恩图表示为：



并集的性质：$A\cup A=A$、$A\cup\varnothing=A$，$A\cup B\supseteq A$、$A\cup B\supseteq B$. $A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$.

(5)补集的意义：设全集为 U，集合 $A\subseteq U$，由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做集合 A 在集合 U 中的补集，记作 C_UA，即 $C_UA=\{x|x\in U$ 且 $x\notin A\}$. 需要说明的是：不同的全集 U，有不同的补集 C_UA.



补集的性质：$A\cup C_UA=U$，$A\cap C_UA=\varnothing$，$C_UU=\varnothing$，$C_u\varnothing=U$，$C_U(C_UA)=A$，$C_U(A\cup B)=(C_UA)\cap(C_UB)$，$C_U(A\cap B)=(C_UA)\cup(C_UB)$

二、简易逻辑

1. 逻辑联结词

(1)命题：初中数学中命题的概念为："判断一件事情的语句"；高中教材中定义为："可以判断真假的语句."其实质是一样的.

(2)逻辑联结词："或"、"且"、"非"等词叫做逻辑联结词.

(3)简单命题：不含逻辑联结词的命题叫做简单命题. 简单命题常用小写拉丁字母：$p,q,r,s\cdots$表示.

(4)复合命题：由简单命题与逻辑联结词构成的命题叫做复合命题，复合命题由"p 且 q"、"p 或 q"、"非 p"构成.

(5)判断复合命题的真假，可根据真值表，一般规律是：

①"非 p"形式复合命题的真假与 p 的真假相反.

②"p 且 q"形式复合命题当 p 与 q 同时为真时为真，其他情况时为假.

③"p 或 q"形式复合命题当 p 与 q 同时为假时为假，其他情况时为真.

2. 四种命题

(1)四种命题

一般地，用 p 和 q 分别表示原命题的条件和结论，用 $\neg p$ 和 $\neg q$ 分别表示 p 和 q 的否命题. 于是四种命题的形式为：

原命题：若 p 则 q；　　　逆命题：若 q 则 p；

否命题：若 $\neg p$ 则 $\neg q$；　　逆否命题：若 $\neg q$ 则 $\neg p$.

(2)四种命题的关系

①原命题⇔逆否命题. 它们的关系是相互的，原命题是逆否命题的逆否命题，它们具有相同的真假性.

②逆命题⇔否命题. 它们之间也互为逆否关系，因此具有相同的真假性.

③原命题正确，逆命题不一定正确. 它们之间的真假性无关.

(3)反证法

用反证法证明命题的一般步骤为：

①假设命题的结论不成立，即假设命题结论的反面成立.

②从这个假设出发，经过推理论证得出矛盾.

③由矛盾判断假设不正确，从而肯定命题的结论正确.

3. 充分条件和必要条件

(1)充要条件：命题 $A\Rightarrow B$ 成立，则 A 是 B 的充分条件，B 是 A 的必要条件. 若 $A\Rightarrow B$ 且 $B\Rightarrow A$，则 A 是 B 的充分且必要条件，简称充要条件.

(2)“A 是 B 的充分条件”与“B 是 A 的必要条件”是等价的，它们是同一个逻辑关系“$A\Rightarrow B$”的不同表述.

(3)“A 是 B 的充分条件”亦可说成是“B 的充分条件是 A”；“B 是 A 的必要条件”亦可说成是“A 的必要条件是 B”；“A 是 B 的充要条件，同时 B 也是 A 的充要条件”.

典例剖析

【例 1】 集合 $P:\{x\mid x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$ 集合 $Q=\{x\mid x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$ 则 (　　)

A. $P=Q$　　B. $Q\subsetneqq P$　　C. $P\subsetneqq Q$　　D. $P\cap Q=\varnothing$

分析：这里需要搞清楚集合 P 与集合 Q 所含的元素分别是什么？明白了这一点，结论就清楚了。当然我们也可以利用特殊值判断结合排除法进行求解。还可以用图象帮助我们作出正确的选择。

解：方法一　$P=\{\cdots,-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\cdots\}$，

$Q=\{\cdots,-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4},0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4},\cdots\}$，

故 $P\subsetneqq Q$，选 C.

方法二 特值判断$\frac{\pi}{4}\in P$，$\frac{\pi}{4}\in Q$，故排除D.，

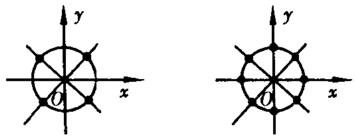
又$\frac{\pi}{2}\in P$，$\frac{\pi}{2}\notin Q$，排除A、B，故选C

方法三 $P=\{x|x=\frac{\pi}{4}(2k+1),k\in \mathbf{Z}\}$，

$Q=\{x|\frac{\pi}{4}(k+2),k\in \mathbf{Z}\}$，

由$2k+1$为奇数，$k+2$为整数知$P\subsetneqq Q$，故选C

方法四，将P、Q看成角的集合，画出对应的角的终边，知P中的角对应的终边在四个象限的角平分线上，Q中的角对应的终边在x、y轴及四个象限的角平分线上，故选C.



说明：①读懂集合，即弄清集合研究对象是解集合问题的关键.

②简化是解决集合问题的常用策略.简化的常用方式有具体化(如列举法)、特殊化(如特例法)、化简等.

③数形结合是解决集合问题的常用手段，例如用数轴上的点集表示不等式的解集，用文氏图来表示集合间的相互关系，都应熟炼掌握.

【例2】 已知：集合$A=\{x,xy,\lg(xy)\}$，$B=\{0,|x|,y\}$，若$A=B$，试求：x，y.

分析：该题由条件$A=B$知，A，B含有相同元素，∴ $0\in A$.然后可通过对集合A中的哪一个元素为0.进行求解，讨论，进而可求出x，y的值.

解：∵ $A=B$，$0\in B$，∴ $0\in A$，又∵ $\lg(xy)$有意义，

∴ $xy\neq 0$.同样也有$x\neq 0$，∴ 只能得到$\lg(xy)=0$，

∴ $xy=1$，∴ $1\in A$，∴ 也有$1\in B$.于是$|x|=1$或$y=1$.

(1)当$|x|=1$时，$x=\pm 1$，若$x=1$时，则集合A中的两元素x，xy都为1，而这与元素的互异性相矛盾.若$x=-1$时，由$xy=1$，则$y=-1$.这时$A=\{-1,1,0\}$，$B=\{0,-1,1\}$满足题设条件.

(2)当$y=1$时，由于$xy=1$∴ $x=1$.这也与集合A中的三元素要互异相矛盾.

综(1)、(2)知：$x=-1$，$y=-1$.

说明：在该题的解题过程中，我们应特别注意的是集合元素的互异性在解题中的作用，这里如果不重视这一点，我们求得的两组解(1)$\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$、(2)$\begin{cases}x=-1\\y=-1\end{cases}$中的$\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$是增根.为了避免这类错误的发生，可以在求得的$x$与$y$的值以后，增加一个验根的过程，即将所求得的$x$与$y$的值，代入问题的条件中，检验它是否与集合的特性相符合，与题设条件相符合.

【例3】 已知全集$U=\{x|x$取不大于20的质数$\}$，A，B是U的两个子集，且A

$\cap C_U B=\{3,5\}$，$C_U A\cap B=\{7,19\}$，$C_U A\cap C_U B=\{2,17\}$，求集合 A,B.

分析：由于题设条件比较抽象，因此，应借助于韦恩图进行求解.

解：$\because$ $U=\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$，作出如图 1－1 所示的韦恩图. 集合 A,B 将全集 U 划分成了四个部分. (1)$A\cap C_U B$ (2)$C_U A\cap B$ (3)$A\cap B$ (4)$C_U A\cap C_U B$ （也就是 $C_U(A\cup B)$，这四部分中的任何两部分均无公共元素，它们之并为全集 U.

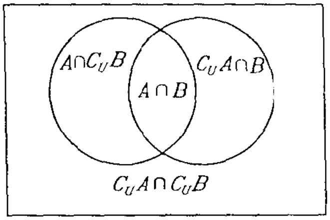


图 1－1

所以在全集中排除 $A\cap C_U B$、$C_U A\cap B$、$C_U A\cap C_U B$ 的元素之后，剩下的元素组成了 $A\cap B$. 故 $A\cap B=\{11,13\}$，而且 $A=(A\cap C_U B)\cup(A\cap B)=\{3,5,11,13\}$，$B=(C_U A\cap B)\cup(A\cap B)=\{7,11,13,19\}$.

说明：元素与集合的隶属关系以及集合之间的包含关系，一般都能通过韦恩图直观表达，这样做有助于我们直观地分析问题、解决问题.

【例 4】 已知：集合 $A=\{2,4,a^3-2a^2-a+7\}$，$B=\{-4,a+3,a-2a+2,a^3+a^2+3a+7\}$，若 $A\cap B=\{2,5\}$，求实数 a 的值，并求 $A\cup B$.

分析：$\because$ $A\cap B\subseteq A$，

$\therefore$ 由集合 $A\cap B$ 含有元素 5 可得：5 属于集合 A，

$\therefore$ 只能是 A 中的元素 a^3-2a^2-a+7 为 5，从而得 a 的方程，求出 a 的值，而后可进一步求出 $A\cup B$.

解：$\because$ $A\cap B=\{2,5\}$，

$\therefore$ $5\in A$，$A=\{2,4,5\}$，由已知可得 $a^3-2a^2-a+7=5$.

$\therefore$ $a^3-2a^2-a+2=0$，

$\therefore$ $a^2(a-2)-(a-2)=0$，

$\therefore$ $(a^2-1)(a-2)=0$，

$\therefore$ $a=2$ 或 $a=\pm1$.

(1)当 $a=2$ 时，$B=\{-4,5,2,25\}$，

$\therefore$ $A\cap B=\{2,5\}$ 与题设相符；

(2)当 $a=1$ 时，$B=\{-4,4,1,12\}$，

$\therefore$ $A\cap B=\{4\}$ 与题设矛盾；

(3)当 $a=-1$ 时，$B=\{-4,2,5,4\}$，

$\therefore$ $A\cap B=\{2,4,5\}$ 与题设矛盾.

综上(1)、(2)、(3)知：$a=2$，且 $A\cup B=\{2,4,5\}\cup\{-4,5,2,25\}=\{-4,2,4,5,25\}$.

说明：在例 4 的解题过程中，由题设条件得到 a 的方程并求出 a 为 2 或 ±1 后，问题是否就解决了呢？$5\in A$ 仅是 $A\cap B=\{2,5\}$ 的一个必要条件，因此和例 1 的解题过程一样，也有可能产生增根，同样需要将求得 a 的值代入题设条件中检验，看它是

否与条件相符合.

【例 5】 $A=\{x|\log_x(5x^2-8x+3)>2\}$

$B=\{x|x^2-2x-a^4+1\geqslant 0\}$

若 $A\cup B=B$ 求实数 a 的范围.

分析:条件 $A\cup B=B$ 可化为 $A\subseteq B$

集合 $A=\{x|\log_x(5x^2-8x+3)>2\}$ 可化简为

$A=\{x|\frac{1}{2}<x<\frac{3}{5}$ 或 $x>\frac{3}{2}\}$

要 $A\subseteq B$,问题等价于方程 $f(x)=x^2-2x-a^4+1=0$ 无实根或 $f(x)=0$ 的两个根均在区间 $\left[\frac{3}{5},\frac{3}{2}\right]$ 内,而如今 $\Delta=4a^4\geqslant 0$ 故问题转为方程 $f(x)=0$ 的两个根均在 $\left[\frac{3}{5},\frac{3}{2}\right]$ 内.

解法一:

$A=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{5}\right)\cup\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$

$B=(-\infty,1-a^2]\cup[1+a^2,-\infty)$

$$A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B\Leftrightarrow\begin{cases}1-a^2\geqslant\frac{3}{5}\\1+a^2\leqslant\frac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow a^2\leqslant\frac{2}{5}\Leftrightarrow-\frac{\sqrt{10}}{5}\leqslant a\leqslant\frac{\sqrt{10}}{5}$$

解法二:

$A\subseteq B\Leftrightarrow f(x)=x^2-2x+a^4+1=0$ 的两个根均在区间 $\left[\frac{3}{5},\frac{3}{2}\right]$ 内 $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\Delta=4-4(1-a^4)\geqslant 0\\\frac{3}{5}\leqslant 1\leqslant\frac{3}{2}\\f\left(\frac{3}{5}\right)\geqslant 0\\f\left(\frac{3}{2}\right)\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^4\geqslant 0\\a^4\leqslant\frac{4}{25}\Leftrightarrow a^2\leqslant\frac{2}{5}\Leftrightarrow-\frac{\sqrt{10}}{5}\leqslant a\leqslant\frac{\sqrt{10}}{5}.\\a^4\leqslant\frac{1}{4}\end{cases}$$

【例 6】 $A=\{\alpha|0<\alpha<2\pi\}$

$B=\{(x,y)|x=\sin\alpha,y=\sin 2\alpha,\alpha\in A\}$

$C=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant r^2,r>0\}$

若 $B\subseteq C$ 求 r 的范围

分析:$B\subseteq C\Leftrightarrow$ 具有 B 集性质的元素必定具有 C 集的性质 $\Leftrightarrow\sin^2\alpha+\sin^2 2\alpha\leqslant r^2$ 对一切 $\alpha\in(0,2\pi)$ 总成立 $\Leftrightarrow r^2\geqslant(\sin^2\alpha+\sin^2 2\alpha)_{最大}$

解:$y=\sin^2\alpha+\sin^2 2\alpha=\sin^2\alpha+4\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

$\quad=\sin^2\alpha+4\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)$

令 $t=\sin^2\alpha$

$y=-4t^2+5t \quad t\in[0,1]$

对称轴 $t=\frac{5}{8}$

$\therefore \quad t=\frac{5}{8}$ 时 $y_{最大}=\frac{25}{16}$

$\because \quad B\subseteq C\Leftrightarrow \sin^2\alpha+\sin^2 2\alpha\leqslant r^2$ 对一切 $\alpha\in(0,2\pi)$ 总成立

$\Leftrightarrow r^2\geqslant(\sin^2\alpha+\sin^2 2\alpha)_{最大}=\frac{25}{16}$

$\because \quad r>0 \quad \therefore \quad r\geqslant\frac{5}{4}$

【例 7】 (1)求区间[999,10000]内能被 3 或被 5 整除的整数之和.

(2)求是 6 的倍数又非 4 的倍数且不大于 1000 的自然数的个数.

分析:(1)设集合 A 表示区间[999,10000]内被 3 整除的整数的集合,集合 B 表示该区间内被 5 整除的整数的集合. 利用公式 $\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$ 将问题转为:区间内被 3 整除的整数与被 5 整除的整数之和减去区间内被 15 整除的整数之和.

(2)利用公式 $\mathrm{card}(A\cap C_U B)=\mathrm{card}(A)-\mathrm{card}(A\cap B)$ 将问题转为区间[0,1000]内被 6 整除的整数个数减去该区间内被 12 整除的整数的个数.

解:(略)

说明:例 4—6 说明,集合作为一种数学语言表现得相当活跃,学习时要注意语言的转换,要积累从集合的观点、集合的性质去解决貌非集合问题的经验.

【例 8】 设 $M=\{x\mid x=a^2-b^2,a,b\in\mathbf{Z}\}$,求证:(1)奇数属于 M;(2)偶数 $4k-2$ $(k\in\mathbf{Z})$不属于 M;(3)属于 M 的两个整数,其积仍属于 M.

分析:(1)由于集合 M 是用描述法表示的,因此要证奇数属于 M,只要证奇数满足集合 M 的特征条件. 即奇数能表示成两个整数的平方差;

(2)要证 $4k-2\notin M$,可假设 $4k-2\in M$,于是 $4k-2$ 满足集合 M 的特征条件,进而,可设 $4k-2=a^2-b^2(a、b\in\mathbf{Z})$,再根据$(a+b)$与$(a-b)$的同奇偶性,可知 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$是奇数或者是 4 的倍数;另一方面 $4k-2$ 不是奇数,也不是 4 的倍数,从而得出矛盾;

(3)集合 M 是一切可以表示成两个整数的平方差的整数的全体,故只要证明 M 中的两个元素 x_1、x_2 的积 x_1x_2 可以表示成两个整数的平方差即可.

证:(1)$\because$ 奇数 $2k+1=(k+1)^2-k^2(k\in\mathbf{Z})$,$\therefore \quad 2k+1\in M$

(2)用反证法证明:假设 $4k-2\in M$,则可设 $4k-2=a^2-b^2(a、b\in\mathbf{Z})$,$\therefore \quad 4k-2=(a-b)(a+b)$,$\because \quad a-b$ 与 $a+b$ 同奇偶,(i)当$(a-b)$、$(a+b)$同为奇数时,a^2-b^2 也为奇数;(ii)当$(a-b)$、$(a+b)$同为偶数时,a^2-b^2 也为偶数且为 4 的倍数. 而 $4k-2$ 是偶数但不是 4 的倍数,$\therefore$ 等式 $4k-2=a^2-b^2$ 不能成立. 即假设结论矛盾,故 $4k-2\notin M$.