中等專業学校教学用書

高等数学教程

Н. П. 塔拉索夫著

高等教育出版社

中等專業学校教学用書

高等数学教程

Н. П. 塔拉索夫著
丁寿田 胥長辰譯

高等教育出版社

本書原系根据苏联技术理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的塔拉索夫（Н. П. Тарасов）著“高等数学教程”（Курс высшей математики для техникумов）1951 年第七版譯出，中譯本原分上下兩册出版。現根据 1954 年第八版改譯后合訂出版。原書經苏联高等教育部审定为中等技术学校教科書。

高 等 数 学 教 程

Н. П. 塔拉索夫著

丁寿田　胥長辰譯

高 等 教 育 出 版 社 出 版

北京琉璃廠一七〇號

（北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號）

上海國光印刷廠印刷　新華書店總經售

統一書號 13010·224　開本 850×1168 1/32　印張 11 5/16　字數 271,000

一九五五年十二月上册新一版（共印 75,000）

一九五五年十二月下册新一版（共印 73,000）

一九五七年一月合訂本第一版

一九五七年二月上海第一次印刷

印數 1—22,000　　定價(8) ¥ 1.30

目　錄

第八版原序

这第八版有了很大的改动。改动的原因一方面是为了要符合技術專科学校的新数学課程大綱，另一方面是为了要想办法化简並改善有些部分的講法。我在進行修訂的时候不但考慮到新課程大綱的要求，同时也受苏联高等教育部中等技術教育司教学法部門的指導，並且还接受了技術專科学校教师們的批評和指教。

这一版我重新寫过"極限理論"和"不定積分"兩章。"直線"和"定積分"兩章也有很大的改变。此外"緒論"也重寫过並且大加擴充了；还在正文末尾加了一節概括的"总結"。在附錄里加了小小一章"微分方程"及一章"級数"(常数級数，冪級数及傅里叶氏級数)。依照課程大綱的要求及採用本書的教师們的建議，我删去了"曲線的參变方程"，"簡單初等函数及其圖象"等節目，化簡了"函数連續性"部分及一些别的小問題的講法。附錄里"極坐标"一章也删去了。

在本書編修过程中我得到了波克师謙 (М. Ф. Бокштейн) 教授及茲科夫 (А .А. Зыков) 講师的許多宝貴意見。他們所給我的帮助，我表示深切的感謝。我尤其感謝國家技術出版社編輯索罗特科夫(В. А. Солодков)同志，他对本書手稿非常注意，並且校正了許多疏漏。

塔拉索夫(Н. Тарасов)

一九五四年三月三十一日

緒　論

構成中学数学課程内容的算術，代数，几何，三角等科目通常总称为“初等数学”。至於本書中所講的解析几何及微積分等科目則要熟悉初等数学后才能学習，同时它們也就是所謂“高等数学”的基礎知識。

初等数学的研究对象基本上是固定不变的数量和圖形。例如，像解代数方程这种典型的代数問題就是要找方程式的根，而这正是一种不变的常量(或叫常数)。至於几何学，則研究的是不变的几何圖形的性質。在三角里主要的注意力也只放在考慮三角推演及三角形元素的計算上。

数学是人类認識自然及改造自然的一种武器。但如果数学只限於研究常量，那它就不能满足生產上的要求，因为在自然界及社会里，处处要碰到变量，要碰到处於运动中及相互連系中的現象和事物。所以数学在找到了研究变量的系統方法，而能处理种种自然現象及生產过程中的变量关系以后，才成为一門現代化的基礎科学技術。

在十六、十七世紀，欧洲資本主义替代着封建主义开始大力發展的时候，这个“掌握变量”的問題就很尖銳地在数学家面前提出來了。資本主义的發生伴随着生產的蓬勃發展，因此又引起了技術和科学的迅速成長。实际的需要向科学，特別是向数学，提出了許多新的問題，要求赶快解决。

馬上就会明白，这些新問題需要嶄新的数学工具，它要能研究在变化过程中的眞实自然現象。就在十七世紀这种武器終於在各

國数学家的努力之下創造出來了。

这种原理上嶄新的武器就是把变量概念導入数学中而建立起來的；它一方面成为解析几何，另一方面成为数学解析(也称数学分析)，其主要部分就是微積分学。

恩格斯說过："笛卡兒的变数是数学中的轉折点。因此，运动和辯証法便進入了数学，因此，微分和積分也就立刻成为必要的了，而它們也就立刻產生出來，並且整个講來，它們是由牛頓和萊布尼兹完成的，而不是由他們發現的"(恩格斯，自然辯証法，國家政治出版社，1952 年版，206 頁)①。

在所引的这段話里，恩格斯說微積分是天才学者牛頓(1642—1727)和萊卜尼兹 (1646—1716) 所集成的(十七世紀后半期)而不是他們所發明的。微積分的方法远在牛頓和萊卜尼兹以前就有学者应用过。在古代大数学家物理学家兼工程师亞几默德 (紀元前 287—212) 的著作里已可以看出这种方法的萌芽。但牛頓和萊卜尼兹的功績是在他們完全闡明了微分和積分之間的深刻的內在关系。这种关系的徹底运用就使得微分和積分这兩种理論綜合起來成为一种統一的"無窮小解析"②。

变量的学問成为数学理論及实用的注意中心，这种強大的進展的重要意义恩格斯用下面的話來描述：

"在一切理論成就中，未必再有什么像十七世紀后半期微積分的發明那样被人看作人类精神的最高的勝利了。"(恩格斯，自然辯証法，國家政治出版社，1952 年版，214 頁)。

無窮小运算在牛頓、萊卜尼兹著作中形成为一种科学的理論

① "笛卡尔变量"这个名称是由法國大数学家笛卡尔 (René Descartes, 1596—1650) 的名字產生的，他創造了几何問題的一种新解法——坐标法，如此建立了一种新几何，就是后來的所謂"解析几何"。在本書第二章里讀者可以看到，变量在几何里是以所謂流动坐标的形式出現的。

② 至於这种关系究竟何在，讀者只有学了微積分后才能明白。

以后，随着就是数学發展的一个光輝的时代。無窮小分析的成就自然地伴随着数理自然科学的重大發展，尤其是理論力学和数学物理。这种新学問很快地成为数学的技術应用的基本工具，一直到現在仍然如此。

随着無窮小解析，而在这个理論基礎上產生並發展起其他的数学学科。微積分在今日成为所謂"数学解析"这門数学学科的宏偉大廈的奠基石。在这大廈的構成中，俄罗斯学者的研究佔重要的地位。

要在这短短的緒論里对俄罗斯学者的数学重大貢献給一个完整的概念是決不可能的。所以我們只着重介紹几个在数学史上佔重要地位的学者的功績。

全世界的文化界都知道偉大俄罗斯数学家罗巴契夫斯基(Николай Иванович Лобачевский, 1793—1856)的名字。使罗巴契夫斯基声名不朽的主要工作是在几何学方面。罗巴契夫斯基創造了一种新的几何，与当时知名的欧几里得氏几何有基本上的区别。

罗巴契夫斯基的理想是如此地走在时代的前面，以致連当时許多大数学家都不能了解，而在他去世以后才得到普遍的承認。

罗巴契夫斯基在数学解析方面也留下了許多可貴的精致巧妙的研究成果。例如，罗巴契夫斯基首先給数学解析的一个基本概念——函数概念——下了一般的(廣义的)定义。

談到解析的發展史我們不能不指出俄罗斯院士奧斯脫罗格拉德斯基(Михаил Васильевич Остроградский, 1801—1862)。奧氏的許多科学成果都列入到教科書里了，他的名字是全世界数学家所熟悉的。我們要注意，奧氏不僅在数学中留下了值得注意的勞績，而在力学及其他与数学相关的領域中也有宝貴的貢献。

另一位享有國际盛名的俄罗斯数学家是車貝謝夫(Пафнутий Львович Чебышев, 1821—1894)，他的工作几乎在数学的所有部

門里都留下了深刻的痕迹。他的头等的功績不僅表現在純粹数学里，也表現在应用科学里。例如他在机械理論方面的貢献也是不朽的。

車貝謝夫的学生李亞普諾夫(Александр Михайлович Ляпунов, 1857—1918)也是一个最偉大的数学家。李亞普諾夫的研究工作伸展到数学和力学的許多部門里。驚人的是他在解決最艰难問題时所表現的精确性和嚴密性。有一件事情可以想見他的貢献之重要：著名的法國学者邦嘉烈(A. Poincaré, 1854—1912)曾發表了一篇論文，其內容实际上不过是李亞普諾夫論文中的一部分。

屬於上世紀俄罗斯卓越数学之列的还有柯瓦列夫斯卡娅(Софья Васильевна Ковалевская, 1850—1891)。在她的种种研究工作中有特别重大意义的是关於偏微分方程这門很有用的数学的貢献。她关於線性微分方程組的定理現在所有偏微分方程的教程里都講到。1888年她因关於迴繞定点的剛体运动的研究論文而獲得巴黎科学院的奬金。这篇論文使她馳名全球。

前一世紀的俄罗斯大数学家，有的單独工作(例如罗巴契夫斯基)，有的帶着少数学生工作。他們的貢献只成为少数專家的財產。政府官方对俄罗斯科学的發展漠不关心，甚至往往抱敌視的态度。讀偉大俄罗斯学者的傳記，使人驚訝他們在官方保守态度之下那种对科学坚持不懈的毅力。所以难怪苏联科学(特别是数学)在十月大革命后才有这样繁荣的發展。

社会主义制度的目的是要使我們对整个社会的物質文化的無厭要求能有極大的滿足。所以党和政府对科学的發展非常注意。我們的國土上籠罩着巨大的高等学校和研究所的網子。所有苏联公民都有受教育的机会。科学成为人民所共有。沙皇时代的学者單干方式变成了強大的科学集体主义，以共同的努力來克服創造途徑上所遭遇的困难。

在偉大的十月革命后，除了一些老的数学研究中心（莫斯科、列寧格勒、嘉桑、哈尔科夫）外，还兴起了一些新的数学研究中心：梯比里斯、薩尔托夫、塔什干、基也輔、放德薩、高尔基城、托姆斯克、斯維尔德洛夫斯克以及其他城市。

由於各数学团体对同問題的集体研究，形成了一些苏联数学学派，各有苏联偉大学者为其領导。

数学發展中佔突出地位的是函数論，就中主要人物有魯津（Никола Николаевич Лузин, 1883—1950）和他的学生苏士麟（М. Я. Суслин, 1894—1919）、亞力山大罗夫（П. С. Александров, 生於1896年）、柯尔莫哥洛夫（А. Н. Колмогоров, 生於1903年）欣斤（А. Я. Хинчин, 生於1894年）、門尼曉夫（Д. Е. Меньшов, 生於1892年）等。他們把苏联函数論学派推進成为世界上的領導地位。

特别有成就的是苏联概率論学派，承續了車貝謝夫和他的学生李亞普諾夫和馬尔科夫（А. А. Марков, 1856—1922）等在这門数学中所建立的方向。柯尔莫哥洛夫、欣斤、别倫师謙（С. Н. Бернштейн, 生於1880年）、斯米尔諾夫（Н. В. Смирнов, 生於1900年）及其他苏联数学家在概率論及其实际应用的發展中起了决定性的作用。

苏联数論学派是社会主义劳动英雄維諾格拉陀夫院士（И. М. Виноградов, 生於1891年）所領導的。他在数論里建立了一个完整的發展方向。

这里要想对苏联学者在其他数学部門中的重大成就簡略敍述一下都是不可能的。我只提一提彼得罗夫斯基院士（И. Г. Петровский, 生於1901年）和劳动英雄苏巴列夫院士（С. Л. Соболев, 生於1908年）在偏微分方程論的發展上的突出地位。

許多苏联学者的兴趣不限於某一門数学，而工作范圍伸展到种种数理科学部門里去。例如，柯尔莫哥洛夫就是一位最多面發展的現代大数学家。

柯尔莫哥洛夫及其他苏联数学家把数学理論用來解决純生產問題而有很大的成就。这正是俄罗斯科学的优良傳統，它得力於理論永不脫离实际，而实际也受理論結果的指導。所以車貝謝夫对於理論和实际的关系曾經說过这样的話："理論与实际的接近是最有益处的——得到益处的不僅是实际方面，科学本身也受实际的影响而發展。实际可以給科学开發新的研究对象或者在早已知道的对象中开發新的方面"（数学論文集，國家技術出版社，1946，100頁）。

理論結合实际的最出色的实例可以算是儒科夫斯基（Н. Е. Жуковский, 1847—1921），查普乐金（С. А. Чаплыгин, 1869—1942）和克魯洛夫（А. Н. Крылов, 1863—1945）这几位苏联偉大的工程师和机械师的工作了（后兩位都是科学院院士兼劳动英雄）。

儒科夫斯基是航空学的奠基者；往往称他为"俄罗斯航空之父"。儒科夫斯基在航空理論方面的發明至今不失其价值。特别是儒科夫斯基給优等駕駛術姿式的可能性奠立了理論的基礎，而他的这些理論工作被俄罗斯艦長涅斯傑尔（П. Н. Нестер）更輝煌地証实，这位艦長是在世界上第一个作"死圈"的。儒科夫斯基也从事种种技術和力学問題。所有他的研究都表現有高度的数学修养。

这位儒科夫斯基的学生查普乐金是近代最偉大的一个力学家。在他的航空理論的研究工作中应用了新的数学方法而給出輝煌的結果。此外他也研究純数学問題；例如他对某些类型的微分方程給了近似解法（后來經魯津改良）。

克魯洛夫研究造船及航海方面的学理；他在这方面的論著是具有經典性的。也如儒科夫斯基和查普乐金一样，他留下了許多宝貴的数学研究成果。克魯洛夫也是数学中近似方法的能手並且是复雜数学計算机的創造者。克魯洛夫还对数学史很注意。牛頓的"自然哲学数学原理"这一經典著作的俄文譯本就是出於克魯洛夫的手筆；对这譯本他还加了一些宝貴的箋註。

第一篇　平面解析几何学初步

第一章　平面上点的直角坐标、坐标法在簡單問題上的应用

§1. 直角坐标系　平面上的直角坐标系是由兩条互相垂直的直線構成的，这兩条直線叫做坐标軸，在每条直線上都选定一个方向和一个量度單位①。所选定的方向叫做正的方向；和它相反的方向叫做負的方向。正的方向在軸上用箭头标出(看圖 1，在这圖里軸上的量度單位虽未指出，但假設它們是已經选定的)。

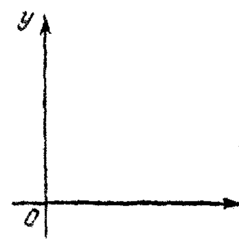

圖 1.

兩条坐标軸里一条叫做橫坐标軸(即 Ox 軸)，另一条叫做縱坐标軸(即 Oy 軸)。兩坐标軸的交点 O 叫做坐标原点。坐标原点把每条坐标軸分为兩部分：一部分是正的(即由原点向正的一边伸展的)，一部分是負的(即由原点向負的一边伸展的)。

上面这种坐标系叫做笛卡尔直角坐标系，它是用法國大数学家笛卡尔(René Descartes)的名字來命名的(参閱第 8 頁底註)。

§2. 平面上点的直角坐标　我們在平面 xOy 上取一点 M，不在 Ox 軸上也不在 Oy 軸上。由这一点向橫坐标軸和縱坐标軸各作一垂直線 MN 和 MP。点 N 和点 P 是兩垂直線的垂足，它們可以落在各坐标軸正的部分上，也可以落在負的部分上(圖 2)。

① 在兩坐标軸上我們常常取同一量度單位。

所謂点 M 的横坐标（或簡称横标），就是線段 ON 的長度；点 N 如果落在横坐标軸正的部分上，則該長度取正号；点 N 如果落在横坐标軸負的部分上，則該長度取負号。点 M 的横标通常用字母 x 來表示。

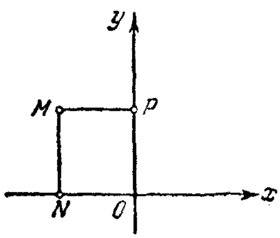

圖 2.

所謂点 M 的縱坐标（或称縱标），就是線段 OP 的長度；点 P 如果落在坐标軸正的部分上，則該長度取正号；点 P 如果落在坐标軸負的部分上，則該長度取負号。点 M 的縱标通常用字母 y 來表示。

按照这些定义，在圖 2 中的点 M，它的横标应該是負的，縱标应該是正的。

如果点 M 落在 Ox 軸上，則它的縱标 y 算作等於零；如果点 M 落在 Oy 軸上，則它的横标算作等於零。因此，如果点 M 和坐标原点重合，則它的横标和縱标都等於零。

平面上一点 M 的横标 x 和縱标 y 就叫做点 M 的笛卡尔直角坐标。以后我們就簡称为点 M 的坐标。

顯然，平面上每个点 M 都有惟一的一对坐标 (x, y) 和它相应。

反过來說，每一对数 x, y，也都对应着平面上一个惟一的点 M，它的坐标即是 x, y。事实上，設兩数 x 和 y 都不是零；於是我們由原点 O 起截取長度为 $|x|$ ① 的線段 ON；$x>0$ 时，該線段沿 Ox 軸正向截取，$x<0$ 时，則沿 Ox 負向截取。同样，截取長度为 $|y|$ 的線段 OP，視 $y>0$ 或 $y<0$ 而决定沿 Oy 軸正向或負向。然后由点 N 和 P 各作 Ox 軸和 Oy 軸的一条垂直線；这兩条垂直線必相交於平面上一个惟一的点 M，如此，和实数 (x, y) 相应的惟一点子决定出來了。

① $|x|$ 这符号表示数 x 的絕对值（参閱 89 頁）。

如果 $x\neq0$，而 $y=0$，則其相应点 M 落在 Ox 軸上，因为現在線段 OP 的長度等於零；如果 $x=0$，而 $y\neq0$，則其相应点 M 落在 Oy 軸上。如果 $x=0$，而且 $y=0$，則其相应点 M 就与坐标原点 O 相重合。

所以，平面上每个点 M 都相应於一对惟一的坐标 (x, y)；反过來說，每一对坐标 (x, y) 也都相应於平面上一个惟一的点 M。这样我們可以說，点 M 完全由它的坐标所決定了。

如果点 M 有坐标 (x, y)，則用这样的記号來表示：$M(x, y)$。

由以上所說的可見：只要採用坐标概念，平面上点的位置就完全可以用数字來決定了。

兩坐标軸把整个平面分为四部分，叫做象限，各編号如圖 3。

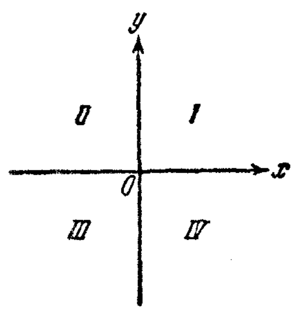

圖 3.

各象限里点的坐标的正負号如下表：

象　　限	横标正負号	縱标正負号
I	+	+
II	−	+
III	−	−
IV	+	−

例 1. 平面上給定了一点 M。試求其对已知直角坐标系的横标和縱标（圖 4）。

解　由点 M 向 Ox 軸作垂直線 MN，向 Oy 軸作垂直線 MP 並且量度線段 ON 和 OP①，如此得出：$x=-ON=-2.5$，$y=OP=3.4$。如果只由 M 点向 Ox 作一垂直線 MN 而量度 ON

① 假設坐标軸上量度單位已經定出。

和 MN，也可得出同样的結果。

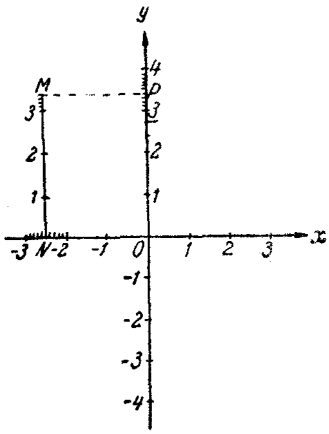

圖 4.

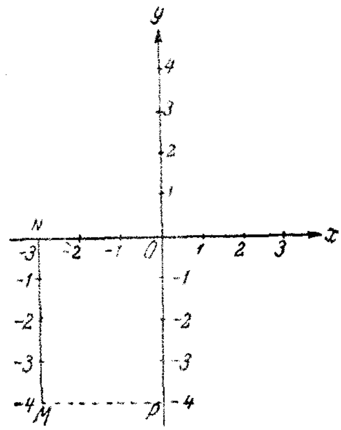

圖 5.

例 2. 求作点 $M(-3, -4)$。

解 作坐标軸 Ox 和 Oy 並且选定長度單位，然后在 Ox 軸上由原点 O 向左截取線段 ON 等於三个長度單位（向左截取是因为点 M 的横标是負的）。在这線段末端 N，向 Ox 作一垂直線，並在它上面向下截取一線段等於四个長度單位（向下截取是因所求的点的縱标是負的）。这線段的末端就是所求的点 M（圖 5）。同此点 M 也可以这样求得：在 Ox 軸和 Oy 軸上各截取線段 $ON=$ $=|-3|$ 和 $OP=|-4|$，並通过点 N 和点 P 作直線各平行於每一坐标軸，这兩条直線就相交於所求的点 M。

§3. 兩点的距離 1. 設已知点 $M_1(x_1, y_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2)$，我們要來決定其間的距離，也即求線段 M_1M_2 的長度。

我們先假設通过这兩点的直線是和 Ox 軸平行的（圖 6）。於是 $y_2=y_1$。線段 $M_1M_2=N_1N_2=N_1O+ON_2$。由圖得：$N_1O=$ $=-x_1$①，$ON_2=x_2$，所以 $M_1M_2=x_2-x_1$。

① 因为 x_1 是負的，所以它的絕对值是 $-x_1$。由横坐标（§2）的定义，这个絕对值等於線段 N_1O 的長度。