

高等學校教學用書

學力靜構結

(參考資料)

俞 忽 編

人民鐵道出版社

高等學校教學用書

結 構 靜 力 學

(參考資料)

俞 忽 編



人 民 鐵 道 出 版 社

一九五五年·北京

本書——結構靜力學原是蘇聯 А. В. ДАРКОВ 及 В. И. КУЗНЕЦОВ 合著，經蘇聯高等教育部審定作為鐵路運輸學院教科書。武漢大學俞忽先生把原書第四版重寫本譯出，印為講義，並在其中補充教材若干，內容益加豐富，並可供各種結構工程技術工作人員研究參考之用。

原書譯本十三章，已分為三冊出版。茲並彙集俞先生的補充教材作為本書的參考資料，別為一冊出版，請讀者與前三冊互相參看。

結 構 靜 力 學

(參考資料)

俞 忽 編

責任編輯 陳 思 誠

人民鐵道出版社出版

(北京市霞公府十七號)

北京市書刊出版營業許可證出字第零壹零號

新 華 書 店 發 行

人民鐵道出版社印刷廠印

(北京市建國門外七聖廟)

一九五五年十二月 初 版第 一 次印刷 平裝印 1—1,280 冊

書號：426 開本：787×1092 $\frac{1}{16}$ 印張11 250千字 定價(9)1.70元

目 錄

原書第五章參考資料

§ 5—1 畫影響綫的機動法	1
----------------	---

原書第六章參考資料

§ 6—1 彈性荷重法	7
-------------	---

原書第八章參考資料

§ 8—1 正規梁連續梁支座彎矩公式的另一種求法	10
--------------------------	----

原書第九章參考資料

§ 9—1 無鉸拱的計算法	11
---------------	----

原書第十一章參考資料

§ 11—1 偏移法	16
§ 11—2 例題：連續梁和有平行邊的四邊形框架	20
§ 11—3 例題：沒有平行邊的四邊形框架和五邊形框架	38
§ 11—4 例題：空腹桁架和上方用空腹桁架的屋架	48
§ 11—5 例題：溫度應力	56
§ 11—6 例題：支座的移動	57
§ 11—7 計算的步驟	59

新增第十四章 彎矩分配法

§ 14—1 小引	59
§ 14—2 聯結點沒有地位偏移的結構	61
§ 14—3 聯結點的地位可能移動的結構	75
§ 14—4 不規則的框架	115
§ 14—5 總結	123

新增第十五章 逐漸加值法

§ 15—1 小引	124
-----------	-----

§ 15—2 逐漸加值法.....	124
§ 15—3 逐漸加值法和彎矩分配法.....	134
§ 15—4 空腹桁架.....	152
§ 15—5 上方用空腹桁架的廠房屋架.....	168
§ 15—6 鋸齒式廠房屋架.....	181
§ 15—7 正規框架.....	191

原書第五章參考資料

§ 5—1. 畫影響綫的機動法

譯者用的機動法和這本書第五章所寫的不同，現在把它寫在下面。

先證明幾個方程式。

拿 $\Delta Ax, \Delta Bx$ 代表點 A 和 B 的橫向偏移，正方向朝右， $\Delta Ay, \Delta By$ 代表點 A 和 B 的豎向偏移，正方向朝下。假定桿 AB 是一個結構上面的任一根桿子。在開始時假定他的長度是 l_{AB} ，他對於橫平線的傾斜角是 φ_{AB} 。結構上面有荷重時，假定這根桿子的長度變成 $l_{AB} + dl_{AB}$ ，他對於橫平線的傾斜角變成 $\varphi_{AB} - \beta_{AB}$ ，就是說他的長度增加了 dl_{AB} ，同時他順鐘向旋轉了一個角度 β_{AB} 。這根桿子的兩個端點的坐標開始是 (x_A, y_A) 和 (x_B, y_B) ，現在就變成 $(x_A + \Delta Ax, y_A - \Delta Ay)$ 和 $(x_B + \Delta Bx, y_B - \Delta By)$ 了。

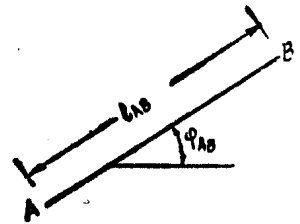


圖 677

依照幾何圖形，我們有下面的關係，

$$x_B - x_A = l_{AB} \cos \varphi_{AB}, \quad (1)$$

$$y_B - y_A = l_{AB} \sin \varphi_{AB}, \quad (2)$$

$$x_B + \Delta Bx - (x_A + \Delta Ax) = (l_{AB} + dl_{AB}) \cos(\varphi_{AB} - \beta_{AB}), \quad (3)$$

$$y_B - \Delta By - (y_A - \Delta Ay) = (l_{AB} + dl_{AB}) \sin(\varphi_{AB} - \beta_{AB}). \quad (4)$$

把方程式(3)和(4)的右方展開：

$$x_B + \Delta Bx - (x_A + \Delta Ax) = (l_{AB} + dl_{AB}) (\cos \varphi_{AB} \cos \beta_{AB} + \sin \varphi_{AB} \sin \beta_{AB}), \quad (5)$$

$$y_B - \Delta By - (y_A - \Delta Ay) = (l_{AB} + dl_{AB}) (\sin \varphi_{AB} \cos \beta_{AB} - \cos \varphi_{AB} \sin \beta_{AB}). \quad (6)$$

因為 dl_{AB} 和 β_{AB} (桿 AB 的角度偏移) 都很小，

$$\cos \beta_{AB} \approx 1, \quad \sin \beta_{AB} \approx \beta_{AB}, \quad dl_{AB} \sin \beta_{AB} \approx 0,$$

方程式(5)和(6)可改寫成

$$x_B + \Delta Bx - (x_A + \Delta Ax) = l_{AB} \cos \varphi_{AB} + dl_{AB} \cos \varphi_{AB} + l_{AB} \beta_{AB} \sin \varphi_{AB}, \quad (7)$$

$$y_B - \Delta By - (y_A - \Delta Ay) = l_{AB} \sin \varphi_{AB} + dl_{AB} \sin \varphi_{AB} - l_{AB} \beta_{AB} \cos \varphi_{AB}. \quad (8)$$

從方程式(7)減去方程式(1)，再從方程式(8)減去方程式(2)，

$$\Delta B_x - \Delta A_x = dl_{AB} \cos \varphi_{AB} + l_{AB} \beta_{AB} \sin \varphi_{AB}, \quad (9)$$

$$-\Delta B_y + \Delta A_y = dl_{AB} \sin \varphi_{AB} - l_{AB} \beta_{AB} \cos \varphi_{AB}. \quad (10)$$

利用方程式(1)和(2)把方程式(9)和(10)的右方的 φ_{AB} 項消去，我們得

$$\Delta B_x - \Delta A_x = \frac{dl_{AB}}{l_{AB}} (x_B - x_A) + (y_B - y_A) \beta_{AB}, \quad (5-1)$$

$$\Delta B_y - \Delta A_y = -\frac{dl_{AB}}{l_{AB}} (y_B - y_A) + (x_B - x_A) \beta_{AB}. \quad (5-2)$$

如果我們有好幾根桿子 AB , BC , CD 成一根桿鏈，運用方程式(5-1)，

$$\Delta B_x - \Delta A_x + \frac{dl_{AB}}{l_{AB}} (x_B - x_A) + (y_B - y_A) \beta_{AB}, \quad (11)$$

$$\Delta C_x - \Delta B_x = \frac{dl_{BC}}{l_{BC}} (x_C - x_B) + (y_C - y_B) \beta_{BC}, \quad (12)$$

$$\Delta D_x - \Delta C_x = \frac{dl_{CD}}{l_{CD}} (x_D - x_C) + (y_D - y_C) \beta_{CD}. \quad (13)$$

把方程式(11)，(12)和(13)相加，我們得

$$\begin{aligned} \Delta D_x - \Delta A_x = & \frac{dl_{AB}}{l_{AB}} (x_B - x_A) + (y_B - y_A) \beta_{AB} + \frac{dl_{BC}}{l_{BC}} (x_C - x_B) + \\ & + (y_C - y_B) \beta_{BC} + \frac{dl_{CD}}{l_{CD}} (x_D - x_C) + (y_D - y_C) \beta_{CD}, \end{aligned}$$

或

$$\Delta D_x - \Delta A_x = \sum_A^D \left[\frac{dl_{AB}}{l_{AB}} (x_B - x_A) + (y_B - y_A) \beta_{AB} \right], \quad (14)$$

或

$$\Delta D_x = \Delta A_x + \sum_A^D \left[\frac{dl_{AB}}{l_{AB}} (x_B - x_A) + (y_B - y_A) \beta_{AB} \right], \quad (5-3)$$

這裏總和號 $\sum_A^D$ 包括點 A 和 D 中間的各桿。

同樣從方程式(5-2)，我們得

$$\Delta B_y - \Delta A_y = \sum_A^D \left[-(y_B - y_A) \frac{dl_{AB}}{l_{AB}} + (x_B - x_A) \beta_{AB} \right], \quad (15)$$

$$\Delta B_y = \Delta A_y + \sum_A^D \left[-(y_B - y_A) \frac{dl_{AB}}{l_{AB}} + (x_B - x_A) \beta_{AB} \right]. \quad (5-4)$$

如果桿鏈的起端 A 和末端 D 賸合，成一個關閉的多邊形，那麼

$$\Delta A_x = \Delta D_x, \quad \Delta A_y = \Delta D_y,$$

方程式(14)和(15)就變成

$$\sum_A^D \left[(x_B - x_A) \frac{dl_{AB}}{l_{AB}} + (y_B - y_A) \beta_{AB} \right] = 0, \quad (5-5)$$

$$\sum_A^D \left[-(y_B - y_A) \frac{dl_{AB}}{l_{AB}} + (x_B - x_A) \beta_{AB} \right] = 0. \quad (5-6)$$

如果各桿的長度不改變， $dl_{AB}=dl_{BC}=\dots=0$ ，方程式(5—3)，(5—4)，(5—5)和(5—6)可以寫成

$$\Delta_{Bx}=\Delta_{Ax}+\sum_A^D(y_B-y_A)\beta_{AB}, \quad (5-7)$$

$$\Delta_{By}=\Delta_{Ay}+\sum_A^D(x_B-x_A)\beta_{AB}, \quad (5-8)$$

$$\sum(y_B-y_A)\beta_{AB}=0, \quad (5-9)$$

$$\sum(x_B-x_A)\beta_{AB}=0. \quad (5-10)$$

我們用機動法畫影響線時就利用方程式(5—3)到(5—10)這幾個方程式。

例題 1 把圖258, a表示的多孔梁的支座反力B的影響線畫起來。

解法 各桿都不伸長，同時梁的各點都沒有橫向偏移，只有方程式(5—8)或(5—10)可以用。

運用方程式(5—8)，

$$\Delta_{1y}=\Delta_{0y}+(x_1-x_0)\beta_{02}, \quad (16)$$

$$\Delta_{3y}=\Delta_{0y}+(x_2-x_0)\beta_{02}+(x_3-x_2)\beta_{24}, \quad (17)$$

$$\Delta_{5y}=\Delta_{3y}+(x_4-x_3)\beta_{24}+(x_5-x_4)\beta_{46}. \quad (18)$$

因為我們要畫的是支座反力B的影響線，我們須給與點1一個向下的偏移 Δ ，因此

$$\Delta_{1y}=\Delta.$$

點0，3和5都沒有豎向偏移，因此

$$\Delta_{0y}=\Delta_{3y}=\Delta_{5y}=0.$$

依照圖258, a，

$$x_1-x_0=l, \quad x_2-x_0=1.5l, \quad x_3-x_2=x_4-x_3=x_5-x_4=0.5l.$$

代入方程式(16)，(17)和(18)

$$\Delta=0+l\beta_{02},$$

$$0=0+1.5l\beta_{02}+0.5l\beta_{24},$$

$$0=0+0.5l\beta_{24}+0.5l\beta_{46}.$$

解方程式：

$$\beta_{02}=\Delta/l, \quad \beta_{24}=-3\Delta/l, \quad \beta_{46}=3\Delta/l.$$

用方程式(5—8)求點2, 4和6的豎向偏移，

$$\Delta_{2y}=\Delta_{0y}+(x_2-x_0)\beta_{02}=0+1.5l(\Delta/l)=1.5\Delta,$$

$$\Delta_{4y}=\Delta_{3y}+(x_4-x_3)\beta_{24}=0+0.5l(-3\Delta/l)=-1.5\Delta,$$

$$\Delta_{6y}=\Delta_{5y}+(x_6-x_5)\beta_{46}=0+0.25l(3\Delta/l)=0.75\Delta.$$

這幾點的豎向偏移和 $\Delta_{1y}=\Delta$ 的比例就是支座反力B的影響線在這幾點的縱坐標值。有了這幾個縱坐標值就可把這根影響線畫起來了。

例題 2 把圖259, a表示的梁的橫截面m-n的剪力的影響線畫起來。

解法 把梁在橫截面m-n那裏切斷，再把被切斷的兩部份旋轉一個相同的角度 β ，這樣被切斷的地方，兩方的梁就有一個相對的豎向移動 Δ 。依照正剪力用力的方

向，梁被切斷之後，左方部份向上移動 右方部份向下移動。拿 d 代表各節間的長度，假定橫截面離開左支座的距離是 $2d+a$ ，那麼他離開右支座的距離是 $4d-a$ 。運用方程式(5—8)，

$$\Delta_{ny} = \Delta_{Ay} + (x_n - x_A)\beta = 0 + (2d+a)\beta, \quad (19)$$

$$\Delta_{ny} = \Delta_{By} + (x_n - x_B)\beta = 0 - (4d-a)\beta. \quad (20)$$

因為點 n 在點 B 的左方， $x_n - x_B$ 是負的。

現在在梁的被切斷的地方，兩方的梁有一個相對的豎向偏移 Δ ，左高右低，因此

$$\Delta_{ny} - \Delta_{my} = \Delta. \quad (21)$$

把方程式(19)和(20)代入方程式(21)，

$$-(4d-a)\beta - (2d+a)\beta = \Delta,$$

或

$$-6d\beta = \Delta.$$

因此

$$\beta = -\frac{\Delta}{6d}.$$

求點2, 5, 6和10的豎向偏移:

$$\Delta_{2y} = \Delta_{Ay} + (x_2 - x_A)\beta = 0 - d\left(-\frac{\Delta}{6d}\right) = \frac{\Delta}{6},$$

$$\Delta_{5y} = \Delta_{Ay} + (x_5 - x_A)\beta = 0 + 2d\left(-\frac{\Delta}{6d}\right) = -\frac{\Delta}{3},$$

$$\Delta_{6y} = \Delta_{By} + (x_6 - x_B)\beta = 0 - 3d\left(-\frac{\Delta}{6d}\right) = \frac{\Delta}{2},$$

$$\Delta_{10y} = \Delta_{By} + (x_{10} - x_B)\beta = 0 + d\left(-\frac{\Delta}{6d}\right) = -\frac{\Delta}{6}.$$

這幾點的豎向偏移和 Δ 的比例就是橫截面 $m-n$ 的剪力的影響線在這幾點的縱坐標值。

例題 3 把圖260, a 表示的桁架的上弦桿4—6的應力的影響線畫起來。

解法 把上弦桿4—6在任一點切斷，那麼如果這根桿子有軸向拉力，這根桿子必定在被切斷的地方向兩邊分開。假定這分開的距離等於 Δ ，那麼桿子4—6就彷彿增加了一個長度 $dl_{46} = \Delta$ 。根據這個條件我們就可把各桿的角度旋轉 β 求得。

現在我們不但要用方程式(5—8)，並且要用方程式(5—5)和(5—6)。先運用方程式(5—8)，

$$\Delta_{11y} = \Delta_{Ay} + (x_5 - x_A)\beta_{45} + (x_{11} - x_5)\beta_{5,11}. \quad (22)$$

再運用方程式(5—5)和(5—6)，

$$(x_6 - x_4)(dl_{46}/l_{46}) + (y_6 - y_4)\beta_{46} + (y_5 - y_6)\beta_{56} + (y_4 - y_5)\beta_{45} = 0, \quad (23)$$

$$-(y_6 - y_4)(dl_{46}/l_{46}) + (x_6 - x_4)\beta_{46} + (x_5 - x_6)\beta_{56} + (x_4 - x_5)\beta_{45} = 0. \quad (24)$$

現在 $\Delta_{Ay} = \Delta_{11y} = 0$ ， $x_5 - x_A = 12$ ， $x_{11} - x_5 = 18$ ， $dl_{46} = \Delta$ ， $l_{46} = 6$ ，

$$x_6 - x_4 = 6, \quad x_5 - x_6 = -3, \quad x_4 - x_5 = -3, \quad y_6 - y_4 = 0,$$

$$y_5 - y_6 = -4, \quad y_4 - y_5 = 4.$$

代入方程式(22)，(23)和(24)，

$$\begin{aligned} 12\beta_{A5} + 18\beta_{5,11} &= 0, \\ 6(\Delta/6) + 0 - 4\beta_{50} + 4\beta_{45} &= 0, \\ 0 + 6\beta_{46} - 3\beta_{56} - 3\beta_{45} &= 0. \end{aligned}$$

因為桿45和桿A3同35在同一硬片上面，他們的 β 值都相等，就是說

$$\begin{aligned} \beta_{45} &= \beta_{A3} = \beta_{35} = \beta_{A5}, \\ \beta_{56} &= \beta_{5,11}. \end{aligned}$$

同樣

解方程式：

$$\beta_{A5} = -(3\Delta/20), \quad \beta_{5,11} (\Delta/10).$$

第三個方程式顯然是多餘的。

用方程式(5—8)求點4和6的豎向偏移，

$$\begin{aligned} \Delta_{4y} &= \Delta_{Ay} + (x_4 - x_A)\beta_{A5} = 0 + 9(-3\Delta/20) = -27\Delta/20, \\ \Delta_{6y} &= \Delta_{11y} + (x_6 - x_{11})\beta_{5,11} = 0 - 15(\Delta/10) = -(3\Delta/2). \end{aligned}$$

Δ_{6y} 也可從點A算過去如下，

$$\begin{aligned} \Delta_{6y} &= \Delta_{Ay} + (x_5 - x_A)\beta_{A5} + (x_6 - x_5)\beta_{5,11} \\ &= 0 + 12(-3\Delta/20) + 3(\Delta/10) = -(3\Delta/2). \end{aligned}$$

點4和6的豎向偏移和 Δ 的比例就是桿4—6的應力的影響線的縱坐標值。

例題4 把圖261,a表示的桁架的斜桿5—6的應力的影響線畫起來。

解法 給與桿5—6一個等於 Δ 的長度增加，因此 $dl_{56} = \Delta$ 。運用方程式(5—5)和(5—6)，

$$(x_6 - x_5)(dl_{56}/l_{56}) + (y_6 - y_5)\beta_{56} + (y_4 - y_6)\beta_{46} + (y_5 - y_4)\beta_{14} = 0. \quad (25)$$

$$-(y_6 - y_5)(dl_{56}/l_{56}) + (x_6 - x_5)\beta_{56} + (x_4 - x_6)\beta_{46} + (x_5 - x_4)\beta_{14} = 0. \quad (26)$$

$$(x_6 - x_5)(dl_5/l_{56}) + (y_6 - y_5)\beta_{56} + (y_7 - y_6)\beta_{6,12} + (y_5 - y_7)\beta_{57} = 0. \quad (27)$$

$$-(y_6 - y_5)(dl_6/l_{56}) + (x_6 - x_5)\beta_{56} + (x_7 - x_6)\beta_{6,12} + (x_5 - x_7)\beta_{57} = 0. \quad (28)$$

運用方程式(5—8)，

$$\Delta_{12y} = \Delta_{1y} + (x_4 - x_1)\beta_{14} + (x_6 - x_4)\beta_{46} + (x_{12} - x_6)\beta_{6,12} \quad (29)$$

現在 $dl_{56} = \Delta$, $l_{56} = 4.652$, $x_6 - x_5 = 3$, $x_4 - x_6 = -3$, $x_5 - x_4 = 0$,

$$y_6 - y_5 = -\frac{32}{9}, \quad y_4 - y_6 = 0, \quad y_5 - y_4 = \frac{32}{9}, \quad x_7 - x_6 = 0, \quad x_5 - x_7 = -3,$$

$$y_7 - y_6 = 4, \quad y_5 - y_7 = -\frac{4}{9},$$

$$x_4 - x_1 = 6, \quad x_{12} - x_6 = 9.$$

代入方程式(25)到(29)，

$$3 \cdot \frac{\Delta}{4.652} - \frac{32}{9} \beta_{56} + 0 + \frac{32}{9} \beta_{14} = 0,$$

$$(32/9)(\Delta/4.652) + 3\beta_{56} - 3\beta_{46} + 0 = 0,$$

$$3(\Delta/4.652) - (32/9)\beta_{56} + 4\beta_{6,12} - (4/9)\beta_{57} = 0,$$

$$(32/9)(\Delta/4.652) + 3\beta_{56} + 0 - 3\beta_{57} = 0,$$

$$6\beta_{14} + 3\beta_{46} + 9\beta_{6,12} = 0.$$

解：程式，

$$\beta_{14} = -0.09663\Delta, \beta_{46} = 0.33926\Delta, \beta_{6,12} = -0.04846\Delta.$$

求點 4 和 6 的豎向偏移，

$$\Delta_{4y} = \Delta_{1y} + (x_1 - x_1)\beta_{14} = 0 + 6(-0.09663\Delta) = -0.5816\Delta,$$

$$\Delta_{6y} = \Delta_{12y} + (x_6 - x_{12})\beta_{6,12} = 0 - 9(-0.04846\Delta) = 0.4361\Delta.$$

再把 Δ_{6y} 值從 Δ_{4y} 值算過去，

$$\Delta_{6y} = \Delta_{4y} + (x_6 - x_4)\beta_{45} = -0.5816 + 3 \times 0.33926\Delta = 0.4362\Delta.$$

點 4 和 6 的豎向偏移和 Δ 的比例就是桿 5—6 的應力的影響線的縱坐標值。

例題 5 把圖 262, a 表示的拋物線拱的橫截面 K 的彎矩的影響線畫起來。

解法 在橫截面 K 的那裏放一個鉸，再給拱的 9— K 部份一個對於 K —13 部份的角度旋轉 Δ ，方向順鐘轉，因此

$$\beta_{9k} - \beta_{k13} = \Delta. \quad (80)$$

運用方程式(5—7)和(5—8)，

$$\Delta_{9x} = \Delta_{17x} + (y_k - y_9)\beta_{9k} + (y_{13} - y_k)\beta_{k13}(y_{17} - y_{13})\beta_{13,17}, \quad (81)$$

$$\Delta_{9y} = \Delta_{17y} + (x_k - x_9)\beta_{9k} + (x_{13} - x_k)\beta_{k13} + (x_{17} - x_{13})\beta_{13,17}. \quad (82)$$

現在

$$\Delta_{9x} = \Delta_{9y} = \Delta_{17x} = \Delta_{17y} = 0,$$

$$x_k - x_9 = 7, \quad x_{13} - x_k = 5, \quad x_{17} - x_{13} = 12,$$

$$y_k - y_9 = 6.611, \quad y_{13} - y_k = 1.389, \quad y_{17} - y_{13} = -8.$$

代入方程式(31)和(32)，

$$6.611\beta_{9k} + 1.389\beta_{k13} - 8\beta_{13,17} = 0,$$

$$7\beta_{9k} + 5\beta_{k13} + 12\beta_{13,17} = 0.$$

解方程式：

$$\beta_{9k} = 0.2951\Delta, \beta_{k13} = -0.7049\Delta, \beta_{13,17} = 0.1215\Delta.$$

求點 2, 3, 4, 5 和 7 的豎向偏移，

$$\Delta_{2y} = \Delta_{9y} + (x_2 - x_9)\beta_{9k} = 0 + 3(0.2951)\Delta = 0.8853\Delta,$$

$$\Delta_{3y} = \Delta_{9y} + (x_3 - x_9)\beta_{9k} = 0 + 6(0.2951)\Delta = 1.7706\Delta,$$

$$\Delta_{4y} = \Delta_{9y} + (x_k - x_9)\beta_{9k} + (x_4 - x_k)\beta_{k13} =$$

$$= 0 + 7(0.2951)\Delta + 2(-0.7049\Delta) = 0.6559\Delta,$$

$$\Delta_{5y} = \Delta_{17y} + (x_5 - x_{17})\beta_{13,17} = 0 - 9 \times 0.1215\Delta = -1.0935\Delta,$$

$$\Delta_{7y} = \Delta_{17y} + (x_7 - x_{17})\beta_{13,17} = 0 - 3(0.1215)\Delta = -0.3645\Delta.$$

把 Δ_{5y} 值從 Δ_{4y} 值算過去，

$$\Delta_{5y} = \Delta_{4y} + (x_{13} - x_4)\beta_{k13} + (x_5 - x_4)\beta_{13,17}$$

$$= 0.6559\Delta + 3(-0.7049\Delta) + 3 \times 0.1215\Delta = -1.0943\Delta.$$

這幾點的豎向偏移和 Δ 的比例就是橫截面 k 的彎矩的影響線的縱坐標值。

原書第六章參考資料

§ 6—1. 彈性荷重法

下面寫的是譯者用的彈性荷重法，和這本書第六章用的彈性荷重法不同。

一根簡支梁 AB (圖678, a) 上面有任意的荷重的時候，他的任意一點 C 的豎向偏移的公式是

$$\Delta_{xp} = \int_A^B \frac{M_P \bar{M}_x dx}{EI},$$

這裏 M_P 是外來荷重在梁上任一點發生的彎矩；

$\bar{M}_x$ 是一個在點 C 的單位力 (方向朝下) 在梁的任一點發生的彎矩 (圖678, b)。

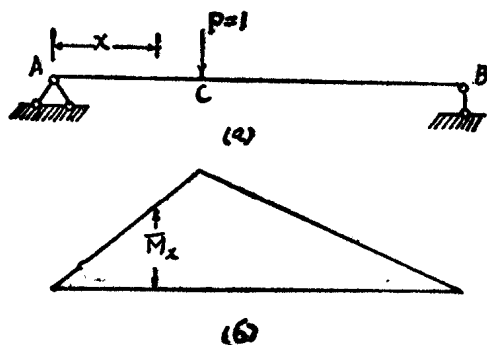


圖 678

但是圖 $\bar{M}_x$ 和點 C 的彎矩 M_C 的影響線是完全相同的，如果我們把 $M_P dx/EI$ 當做荷重， $\bar{M}_x$ 當做 M_C 的影響線的縱坐標值，那麼乘積 $(M_P dx/EI) \bar{M}_x$ 就等於這部份荷重在點 C 發生的彎矩。因為這個緣故，我們就把這部份荷重當做彈性荷重。

在桁架上面，在任意的荷重作用之下，各聯結點的豎向偏移的公式 (見 50 是

$$\Delta_{mn} = \sum \frac{N \bar{N}}{EF} S.$$

但是 $\bar{N}$ 是可以寫成下面的形式的 (見 §4)，

$$\bar{N} = \frac{\text{外力的力矩}}{\text{應力的力矩臂}} = \frac{\bar{M}}{r}.$$

因此 Δ_{mn} 的公式可改寫如下：

$$\Delta_{mn} = \sum \frac{NS}{EFr} \bar{M}.$$

這裏 $\bar{M}$ 是豎向單位力在各桿的彎矩中心發生的彎矩， r 是各桿的力矩臂。但是在簡支桁架上面， $\bar{M}$ 值也和單位力作用的那個聯結點的彎矩 M_n 的影響線在各彎矩中心的下面的縱坐標值相同，因此我們也可把乘積 $(NS/EFr) \bar{M}$ 當做彎矩看待。但是 $\bar{M}$ 是彎矩 M_n 的影響線的縱坐標值，因此 NS/EFr 是各桿的彈性荷重，每桿的彈性荷重的作用點就在各桿的彎矩中心，因為它們應該是放在 $\bar{M}$ 代表的那些縱坐標的上面的。 N 值有正有負，但是在簡支桁架上面， $\bar{M}$ 總是正的，因此 r 值也有正有負。

各腹桿的彎矩中心往往在桁架的外方，我們可把他的彈性荷重從他們的彎矩中心搬到桁架的兩個聯結點，變做兩個分彈性荷重。以外圖306表示的桁架的桿3—3'的彈性荷重也可分成三個分彈性荷重放在節點2, 3和4，如果我們要求聯結點4的豎向偏移的話。求其他各點的偏移時，這三個分彈性荷重可用可不用，因為他們對於別的聯結點的偏移是不起什麼作用的。拿圖306表示的桁架做例子，他的各桿的 $(1/r)$ 值求法如下：

上下弦桿2'—3'和2—3，

$$N_{2'-3'} = -\bar{M}_2/h, \quad 1/r_{2'-3'} = -\frac{1}{h}, \quad \text{彎矩中心在點2};$$

$$N_{2-3} = \bar{M}_3/h, \quad 1/r_{2-3} = 1/h, \quad \text{彎矩中心在點3'}.$$

斜桿2—3'，

$$\bar{N}_{2-3'} = -\bar{Q}_{2-3}/\sin\alpha,$$

這裏 $\bar{Q}_{2-3}$ 是單位荷重在節間2—3裏面發生的剪力；

α 是桿2—3'和下弦中間的夾角。

依照Д·И·Журавский定理，

$$Q_{2-3} = (\bar{M} - \bar{M}_2)/d,$$

代入 $\bar{N}_{2-3'}$ 的公式，我們得 $\bar{N}_{2-3'} = -(\bar{M}_3 - \bar{M}_2)/d\sin\alpha$ ，

一個 $1/r_{2-3'}$ 值 $= -1/d\sin\alpha$ ，彎矩中心在點3，

另一個 $1/r_{2-3'}$ 值 $= +1/d\sin\alpha$ ，彎矩中心在點2。

桿3—3'，利用Д·И·Журавский定理，

$$\begin{aligned} \bar{N}_{3-3'} &= \text{節點3的荷重} = \bar{Q}_{2-3} - \bar{Q}_{3-4} = \\ &= \frac{\bar{M}_3 - \bar{M}_2}{d} - \frac{\bar{M}_4 - \bar{M}_3}{d} = \frac{-\bar{M}_2 + 2\bar{M}_3 - \bar{M}_4}{d}, \end{aligned}$$

兩個 $1/r_{3-3'}$ 值 $= -1/d$ ，彎矩中心在點2和4，

一個 $1/r_{3-3'}$ 值 $= 2/d$ ，彎矩中心在點3。

在圖306表示的桁架上面， $h=4$ 公尺， $d=3$ 公尺， $\sin\alpha=(4/5)$ 。如果我們要求的是各下弦桿的聯結點的豎向偏移，各桿的彈性荷重的計算見表6—1。

因為桁架和荷重都是兩邊對稱的緣故，我們在表內只把半邊的彈性荷重算出。桿3—3'在節點3的彈性荷重也只先算一半，然後把桿2—3和2—3'在這一點的彈性荷重加在一起，再用2乘，就得點3的彈性荷重的全部。因為我們的彈性荷重都是豎向荷重，只要是在同一的豎向線上面，他們的作用點是不必拘定在那一點的。因此在表內我們把在每豎桿上下兩端作用的彈性荷重放在同一行。

各點的彈性彎矩 M^ϕ ，（也就是各點的豎向偏移）的計算見表6—2，我們根據的仍然是Д·И·Журавский定理，

$$Q_{n-1,n}^\phi = \frac{M_n^\phi - M_{n-1}^\phi}{d} \quad \text{或} \quad M_n^\phi = M_{n-1}^\phi + Q_{n-1,n}^\phi d.$$

表6—1

桿	$\frac{NS}{EF}$	$\frac{1}{r}$	彎矩 中心	在各節點作用的彈性荷重		
				1 或 1'	2 或 2'	3 或 3'
0—1	$-\frac{9}{8EF}$	$+\frac{1}{4}$	1'	$-\frac{9}{32EF}$		
1—2	$-\frac{9}{8EF}$	$+\frac{1}{4}$	1'	$-\frac{9}{32EF}$		
2—3	$-\frac{27}{8EF}$	$+\frac{1}{4}$	3'			$-\frac{27}{32EF}$
1'—2'	$+\frac{9}{4EF}$	$-\frac{1}{4}$	2		$-\frac{9}{16EF}$	
2'—3'	$+\frac{9}{4EF}$	$-\frac{1}{4}$	2		$-\frac{9}{16EF}$	
0—1'	$+\frac{25}{8EF}$	$\left\{ \begin{array}{l} +\frac{5}{12} \\ -\frac{5}{12} \end{array} \right.$	0 1	$-\frac{125}{96EF}$		
1—1'	0	$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{5}{12} \\ +\frac{5}{12} \end{array} \right.$	0 1 2	0	0	
1'—2	$-\frac{25}{8EF}$	$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{5}{12} \\ +\frac{5}{12} \end{array} \right.$	1 2	$+\frac{125}{96EF}$	$-\frac{125}{96EF}$	
2—2'	0	$\left\{ \begin{array}{l} +\frac{5}{12} \\ -\frac{5}{12} \end{array} \right.$	2 3		$+\frac{125}{96EF}$	
2—3'	$+\frac{25}{8EF}$	$\left\{ \begin{array}{l} +\frac{5}{12} \\ -\frac{5}{12} \end{array} \right.$	2 3			$-\frac{125}{96}$
3—3'	$-\frac{4}{EF}$	$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{5}{12} \\ +\frac{5}{12} \end{array} \right.$	2 3 4		$-\frac{4}{3EF}$	$-\frac{8}{3EF} + 2$
				$-\frac{9}{16EF}$	$-\frac{5}{24EF}$	$-\frac{334}{96EF} \times 2 = -\frac{167}{24EF}$

表6—2

點	彈性荷重 (W)	剪 力 ($Q_{n-1, n}$)	剪 力 $\times d$ ($Q_{n-1, n}d$)	彎 矩 (M^0)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
0		$-\frac{184}{48EF}$	$-\frac{184}{16EF}$	0
1	$-\frac{9}{16EF}$	$-\frac{157}{48EF}$	$-\frac{157}{16EF}$	$-\frac{184}{16EF} = -\frac{23}{2EF}$
2	$-\frac{5}{24EF}$	$-\frac{167}{48EF}$	$-\frac{167}{16EF}$	$-\frac{341}{16EF}$
3	$-\frac{167}{27EF}$			$-\frac{508}{16EF} = -\frac{127}{2EF}$

首先求左支座的反力。因為對稱的關係，這個反力等於總彈性荷重的一半，

$$A^0 = -\frac{9}{16EF} + \frac{5}{24EF} - \frac{167}{24EF} \div 2 = -\frac{184}{48EF}.$$

反力 A^p 求得之後，各節間的剪力就很容易求得了。表內行(4)的計算不解自明。把行(4)的數值一個一個的加起來，我們就得行(5)的數值。

如果我們要求的是上弦桿的各節點的豎向偏移，我們就把單位荷重放在上弦桿的各聯結點。除了豎桿之外，其他各桿的彈性荷重都不改變。

我們也可用第五章的方程式(5—3)，(5—4)，(5—5)和(5—6)求桁架的各點的偏移。還有一種求桁架的聯結點的偏移的方法是相對偏移法（見俞忽著的結構學），比任何方法都要省事。

原 書 第 八 章 參 考 資 料

§ 8—1. 正規梁連續梁支座彎矩公式的另一種求法

這本書第八章的方程式 (12)，(13)，(14)和(15) 也很容易直接從各基本方程式求得。

把各基本方程式寫下來：

$$4M_1 + M_2 = N_1, \quad (i)$$

$$M_1 + 4M_2 + M_3 = N_2, \quad (ii)$$

$$M_2 + 4M_3 + M_4 = N_3, \quad (iii)$$

.....

$$M_{n-1} + 4M_n + M_{n+1} = N_n \quad (iv)$$

如果

$$M_{n-1} = aM_n + b,$$

代入方程式(iv)，我們得

$$aM_n + b + 4M_n + M_{n+1} = N_n.$$

移項後，再用 M_n 的係數除，

$$M_n = (-M_{n+1} - b + N_n) / (4 + a). \quad (v)$$

從方程式(i)，我們得

$$M_1 = -\frac{1}{4}M_2 + \frac{1}{4}N_1. \quad (vi)$$

連續運動方程式(v)，

$$M_2 = (-M_3 - \frac{1}{4}N_1 + N_2) / (4 - \frac{1}{4}) = -0.26667M_3 - 0.06667N_1 + 0.26667N_2, \quad (vii)$$

$$M_3 = (-M_4 + 0.06667N_1 - 0.26667N_2 + N_3) / (4 - 0.26667) = -0.26786M_4 + 0.01786N_1 - 0.07143N_2 + 0.26786N_3, \quad (viii)$$

$$M_4 = (-M_5 - 0.01786N_1 + 0.07143N_2 - 0.26786N_3 + N_4) / (4 - 0.26786) = -0.26794M_5 - 0.00479N_1 + 0.01914N_2 -$$

$$-0.07177N_3 + 0.26794N_4. \quad (\text{ix})$$

兩孔梁: $M_2 = 0$, 從方程式(vi), 我們得

$$M_1 = 0.25N_1. \quad (15)$$

三孔梁: $M_3 = 0$, 從方程式(vi)和(vii), 我們得

$$\left. \begin{aligned} M_2 &= -0.06667N_1 + 0.26667N_2. \\ M_1 &= -\frac{1}{4}(-0.06667N_1 + 0.26667N_2) + 0.25N_1 = \\ &= 0.26697N_1 - 0.06667N_2. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

四孔梁: $M_4 = 0$, 從方程式(viii), (vii)和(vi), 我們得

$$\left. \begin{aligned} M_3 &= 0.01786N_1 - 0.07143N_2 + 0.26786N_3, \\ M_2 &= -0.26667(0.01786N_1 - 0.07143N_2 + 0.26786N_3) - \\ &\quad - 0.06667N_1 + 0.26667N_2 = -0.07143N_1 + \\ &\quad + 0.28573N_2 - 0.07143N_3, \\ M_1 &= -\frac{1}{4}(-0.07143N_1 + 0.28573N_2 - 0.07143N_3) + 0.25N_1 = \\ &= 0.26786N_1 - 0.07143N_2 + 0.01786N_3. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

五孔梁: $M_5 = 0$, 從方程式(ix), (viii), (vii)和(vi), 我們得

$$\left. \begin{aligned} M_4 &= -0.00497N_1 + 0.01914N_2 - 0.07177N_3 + 0.26794N_4, \\ M_3 &= -0.26786(-0.00497N_1 + 0.01914N_2 - 0.07177N_3 + \\ &\quad + 0.26794N_4) + 0.01786N_1 - 0.07143N_2 + 0.26786N_3 = \\ &= 0.01914N_1 - 0.07656N_2 + 0.28708N_3 - 0.07177N_4, \\ M_2 &= -0.26667(0.01914N_1 - 0.07656N_2 + 0.28708N_3 - 0.07177N_4) - \\ &\quad - 0.06667N_1 + 0.6667N_2 = -0.07177N_1 + 0.28709N_2 - \\ &\quad - 0.07655N_3 + 0.01914N_4, \\ M_1 &= -0.25(-0.07177N_1 + 0.28709N_2 - 0.07655N_3 + \\ &\quad + 0.01914N_4) + 0.25N_1 = 0.26794N_1 - 0.07177N_2 + \\ &\quad + 0.01914N_3 - 0.00479N_4. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

原 書 第 九 章 參 考 資 料

§ 9—1. 無鉸拱的計算法

譯者平常用的方法, 比這本書第九章§76第2則內所言的『多餘的未知力的影響綫的畫法』, 微有不同, 寫在這裏給大家參考。

依照圖679, 各點的彎矩 M , 從 D 到 A , 是

$$M = -X_1y + X_2x + X_3;$$

從A到B, 是

$$M = -X_1 y + X_2 x + X_3;$$

從B到C, 是

$$M = -X_1 y + X_2 x + X_3 \cdot (x-b).$$

運用最小工法,

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = \frac{\partial}{\partial X_1} \int_D^C \frac{M^2 ds}{2EI} =$$

$$= \int_D^C \frac{M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial X_1} ds$$

$$= \int_D^C \frac{(-X_1 y + X_2 x + X_3) (-y) ds}{EI} - \int_B^C \frac{(x-b) (-y) ds}{EI} = 0;$$

$$\frac{\partial U}{\partial X_2} = \int_D^C \frac{M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial X_2} ds =$$

$$= \int_D^C \frac{(-X_1 y + X_2 x + X_3) x ds}{EI} - \int_B^C \frac{(x-b) x ds}{EI} = 0;$$

$$\frac{\partial U}{\partial X_3} = \int_D^C \frac{M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial X_3} ds =$$

$$= \int_D^C \frac{(-X_1 y + X_2 x + X_3) ds}{EI} - \int_D^C \frac{(x-b) ds}{EI} = 0.$$

$$\int_D^C \frac{y ds}{I} = 0; \quad \int_D^C \frac{x ds}{I} = 0; \quad \int_D^C \frac{xy dx}{I} = 0.$$

代入上面三個方程式:

$$X_1 \int_D^C \frac{y^2 ds}{EI} + \int_B^C \frac{(x-b) y ds}{EI} = 0;$$

$$X_2 \int_D^C \frac{x^2 ds}{EI} - \int_B^C \frac{(x-b) x ds}{EI} = 0;$$

$$X_3 \int_D^C \frac{ds}{EI} - \int_B^C \frac{(x-b)}{EI} = 0.$$

在無法積分的時候, 我們可把拱分成許多段。假定圖 680 表示的是拱的一段。為便利計算起見, 我們假定他的軸線是一根直線, 他的坡度等於他的中點的坡度。假定他對於橫平線的傾斜角是 θ , 他的橫向長度是 a , 他的中點的坐標是 (x_c, y_c) , 那麼這一段的軸線的方程式是

$$y = y_c - (x - x_c) \tan \theta.$$

如果 I 值改變的規律是

$$I_x = \frac{I_c}{\cos \theta},$$

那麼

$$\frac{ds}{I_x} = \frac{dx}{\cos \theta} \times \frac{\cos \theta}{I_c} = \frac{dx}{I_c}.$$

這樣, 我們就可把各積分項在這一段上面得到的部份數值算出如下:

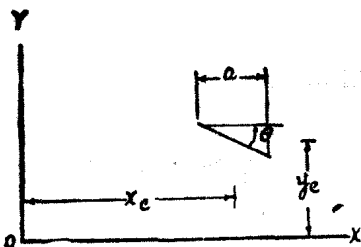


圖 680

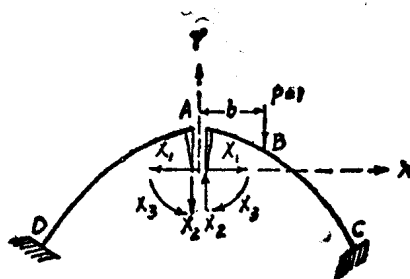


圖 679