

新编工科力学系列课程教材

刘人通 主编



弹性力学

Elastic Mechanics

西北工业大学出版社

新编工科力学系列课程教材

责任编辑：王夏林

- 理论力学
- 材料力学
- 结构力学
- 弹性力学
- 实验力学
- 有限单元法
- 振动理论基础

封面设计/电脑制作 李海华

ISBN 7-5612-1498-7



9 787561 214985 >

ISBN 7-5612-1498-7/O·210

定价：10.00元

24

0343

173

新编工科力学系列课程教材

弹性力学

刘人通 编



A1057927

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书是根据国家教育部审定的弹性力学课程教学基本要求编写的。基本内容包括绪论、应力分析、应变分析、应力和应变的关系、弹性力学的一般解法和定理、平面问题的直角坐标解答、极坐标解答、数值计算方法、空间问题的应用、薄板小挠度弯曲。课程基本要求中的有限单元法因另编教材,这里仅作简单介绍。

本书理论系统完整,概念正确,深入浅出,通俗易懂,可作为高等工业学校公路工程、铁道工程、桥梁与隧道工程、建筑工程专业本科生的教材,亦可供有关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

弹性力学/刘人通编. —西安:西北工业大学出版社,2002.7
ISBN 7-5612-1498-7

I. 弹… II. 刘… III. 弹性力学—高等学校—教材 IV. 0343

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 028711 号

出版发行:西北工业大学出版社

通信地址:西安市友谊西路 127 号 邮编:710072 电话:029—8493844

网 址:<http://www.nwpup.com>

印刷者:西安兰翔印刷厂

开 本:850mm×1168mm 1/32

印 张:6.375

字 数:158 千字

版 次:2002 年 7 月第 1 版 2002 年 7 月第 1 次印刷

印 数:1~5 000 册

定 价:10.00 元

前 言

本书是长安大学校本部(原西安公路交通大学)新编工科力学系列课程教材之一。

本书是根据国家教育部审定的弹性力学课程教学基本要求和工科力学课程教学指导委员会面向 21 世纪工科力学课程改革的要求编写的。在内容安排上既保证基本理论的系统完整,又注意结合交通土建专业的需要和特点,故可作为公路工程、铁道工程、桥梁与隧道工程、建筑工程等专业本科生的教材,亦可供有关工程技术人员参考。

在编写过程中,注意吸收同类教材的长处,结合多年来的教学经验,力图贯彻“少而精”的原则,深入浅出地把基本理论写到位,又较好地联系工程实际问题,尽力使内容的叙述通俗易懂。各章附有适量习题,以供练习。

本书由西安交通大学工程力学博士生导师陈宜亨教授和博士生导师徐晖教授主审,且提出了许多宝贵意见;本校许多同行也给予诸多帮助和指导。在此表示衷心的感谢。

由于水平有限,书中难免有疏漏和不妥之处,恳望读者指正。

编 者

2001 年 10 月

目 录

第一章 绪论	1
§ 1-1 弹性力学的基本内容	1
§ 1-2 弹性力学的基本假设	2
§ 1-3 弹性力学中的几个重要概念	3
§ 1-4 弹性力学问题的力学模型和数学模型	8
习题	9
第二章 应力分析	11
§ 2-1 平衡方程	11
§ 2-2 应力边界条件	13
§ 2-3 弹性体内一点的应力状态	15
习题	19
第三章 应变分析	22
§ 3-1 几何方程	22
§ 3-2 刚体位移 位移边界条件	24
§ 3-3 弹性体内一点的应变状态	26
§ 3-4 变形协调方程	28
习题	29
第四章 应力和应变的关系	31
§ 4-1 广义胡克定律	31

§ 4-2 弹性体的形变势能	32
§ 4-3 应力、应变和比能的关系	33
习题	35
第五章 弹性力学的一般解法和定理	36
§ 5-1 基本方程和边界条件	36
§ 5-2 位移普遍方程	38
§ 5-3 应力普遍方程	40
§ 5-4 弹性力学中的双谐函数	43
§ 5-5 弹性力学解答正确性的判定和惟一性定理	43
§ 5-6 局部影响原理和叠加原理	44
§ 5-7 形变能定理和功的互等定理	45
§ 5-8 最小形变能定理	48
习题	51
第六章 平面问题的直角坐标解答	52
§ 6-1 两种平面问题	52
§ 6-2 平面问题的基本方程和边界条件	54
§ 6-3 平面问题基本方程的解法	57
§ 6-4 按应力求解的结果和应力函数	60
§ 6-5 逆解法、半逆解法和因次分析法	63
§ 6-6 例题	65
习题	72
第七章 平面问题的极坐标解答	77
§ 7-1 极坐标中的基本方程和边界条件	77
§ 7-2 极坐标中的应力函数和相容方程	81
§ 7-3 应力分量和位移分量的坐标变换式	83

§ 7-4	平面轴对称问题	85
§ 7-5	圆环或圆筒受均布压力	89
§ 7-6	压力隧洞	90
§ 7-7	圆孔边的应力集中	92
§ 7-8	平面楔问题	96
§ 7-9	符拉芒问题	99
习题		102
第八章	平面问题的数值解法	106
§ 8-1	解析法和数值解法	106
§ 8-2	差分法	106
§ 8-3	变分法	115
§ 8-4	有限单元法	123
习题		126
第九章	空间问题的应用	128
§ 9-1	半空间体受重力及均布压力	128
§ 9-2	等截面直杆的扭转	131
§ 9-3	等截面直杆的纯弯曲	136
§ 9-4	等截面直杆的横力弯曲	138
§ 9-5	空间轴对称问题	142
§ 9-6	布希涅斯克问题	147
习题		151
第十章	薄板小挠度弯曲问题	153
§ 10-1	有关概念及计算假定	153
§ 10-2	弹性曲面微分方程	155
§ 10-3	横截面上的内力和应力	159

§ 10-4	边界条件	165
§ 10-5	简单例题	170
§ 10-6	四边简支的矩形薄板重三角级数解	173
§ 10-7	矩形薄板的单三角级数解	175
§ 10-8	文克勒地基上的基础板	177
§ 10-9	矩形薄板的差分解	181
§ 10-10	圆形薄板的弯曲	184
	习题	190
	参考文献	194

第一章 绪 论

§ 1-1 弹性力学的基本内容

弹性体在外界因素作用下内部各质点会产生内力和变形。内力以应力表示,变形以应变表示,各点位置的变化以位移表示。弹性力学就是研究外界因素作用下弹性体内产生的应力、应变和位移的分布规律的学科。各质点的应力、应变和位移是构件设计中必不可少的强度和刚度指标。可见弹性力学的任务与材料力学、结构力学一样,是解决实际工程结构中的强度、刚度及稳定性问题。然而,这三门学科分工不同,研究方法也各不相同。

首先,从研究对象来看,材料力学基本上是研究杆状构件在拉压、剪切、弯曲、扭转作用下的应力、应变和位移。结构力学是在材料力学基础上进而研究杆件系统的强度和刚度问题。对于非杆状结构,如板、壳、块体,以及挡土墙、堤坝、地基等实体结构,则在弹性力学中研究。杆状构件进一步较精确的分析,也必须用到弹性力学方法。

其次,在研究方法、前提、范围、精度等方面,弹性力学都比材料力学有很大提高。虽然这两门学科都是固体力学分支,都研究固体工程构件,都从静力学、几何学、物理学三方面建立方程,都有相同的基本假设,但是弹性力学中不用材料力学中的附加假设,研究构件任意变形时的强度和刚度问题,使用了比材料力学更多的数学工具,因而同一问题计算结果比较,弹性力学解比材料力学解要精确。从这些方面看,可以把弹性力学称为高等材料力学。

按理论和应用两方面,可以把弹性力学分为数学弹性力学和应用弹性力学两部分。前者是研究基本概念、基本方程、边界条件、基本解法,几乎是力学概念和纯数学推导。后者则是研究工程方面重要的应用,如薄板、薄壳、地基梁板等等。

弹性力学问题,能够求得精确的解析解的只是很少部分。大量问题无法求得解析解,只能用近似方法求解,这方面包括差分法、变分法、有限单元法等。

这本教材使用对象是交通部门土建类各专业本科生。因此,本书前半部分介绍数学弹性力学的主要内容,后半部分介绍应用弹性力学内容及近似解法。各不同专业可对后半部分内容按需要取舍。

§ 1-2 弹性力学的基本假设

弹性力学理论对于实际工程构件取其主要方面来研究,即将研究对象抽象为本学科的理想模型,称之为理想弹性体,它要满足以下基本假设。

(1) 连续性:假定物体各点都由介质填满,没有空隙。这样,弹性力学中各种已知量和未知量都可以用位置坐标的连续函数来表示,这些函数也可以求所需要的各阶导数,以满足运算过程的要求。实际工程构件的物体都是由分子、原子等微粒组成的,严格讲不符合连续性假设。但是,从统计平均观点看,微粒大小及其距离和物体几何尺寸相比,是小的很多的。因此,这个假设又是合理的,无显著误差。

(2) 完全弹性:假定物体所受外力去除后能够完全恢复原来的形状和大小,没有残余变形。这样,物体的变形完全符合胡克定律,弹性常数 E, G, μ 与受力历史无关。从材料力学已知,塑性材料物体,在应力未达到屈服极限以前是近似的完全弹性体;脆性材料

物体,在应力未超过比例极限以前,也是近似的完全弹性体。

(3) 均匀性:假定物体各质点的材料相同。这样,物体各质点具有相同的弹性,即材料常数 E, G, μ 与位置坐标无关。在研究时可以取弹性体中任一点来研究,把分析结果用于全体。实际工程构件,当然不是这样。如混凝土,就是砂、石、水泥构成,各点不完全相同。但是,各种材料的粒径和构件几何尺寸相比,只要远远小,就可以认为是均匀的。

(4) 各向同性:假定物体一点不同方向都有相同的弹性。这样,材料常数 E, G, μ 与方向无关,可以在任意方向建立坐标系来研究。实际工程构件不同方向的弹性有着各种差异,但弹性力学计算时,从宏观统计观点看,可以当做各向同性对待。

(5) 小变形:假定物体的位移和变形都是微小的。这里,是把变形限定在 $\epsilon \ll 1$ 和 $\gamma \ll 1$ 的范围,各点弹性位移远远小于原来物体的几何尺寸。这样,在计算时可以忽略应变的二次幂及更高次幂,使方程式都简化为线性方程,因而可以应用叠加原理,还可按变形前的尺寸来计算问题。

凡满足前四点假设的物体,都称为理想弹性体。本书所讨论的问题,限于理想弹性体的小变形问题,属于线弹性力学范畴。

§ 1-3 弹性力学中的几个重要概念

(1) 体力:分布在弹性体内部各质点上的外力,称为体积力,简称体力。例如重力、惯性力等。一般地说,弹性体内各质点所受的体力是不相同的。为了表明任意一点 P 的体力大小和方向,引入体力集度的概念。在 P 点取一微小部分,其体积为 ΔV ,如图 1-1 所示。各点所受外力在该微小体积内的合力为 ΔQ ,其平均集度则为 $\frac{\Delta Q}{\Delta V}$,当 ΔV 不断缩小,收拢到 P 点时,则 ΔQ 和平均集度 $\frac{\Delta Q}{\Delta V}$ 都不断

变化而最后趋于 P 点,成为极限矢量 F_1 。这个极限矢量 F_1 就是 P 点的体力集度,即

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = F_1$$

它表明了 P 点体力的大小、方向和作用点。 F_1 是矢量,它在三个坐标轴上的投影 X, Y, Z 称为 P 点的体力分量。它们是标量,其正负号以与坐标轴方向相同为正,相反为负。体力及其分量的量纲为 $L^{-2}MT^{-2}$ 。

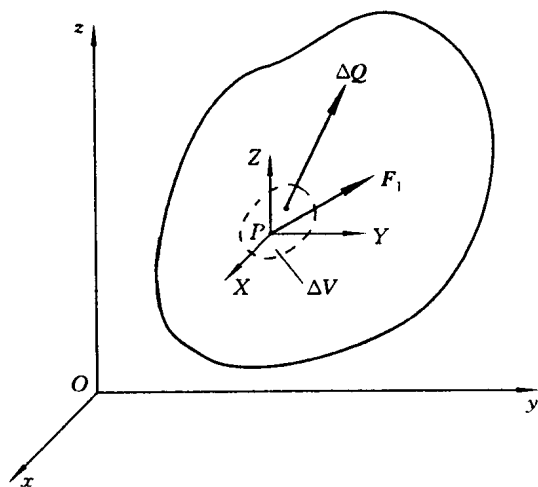


图 1-1

(2) 面力:分布在弹性体外表面上的外力称为面积力,简称面力。例如风力、大气压力、液体压力、接触力等等。面力在各表面点上也是各不相同的,如图 1-2 所示,同样是用其集中程度来表示,就是任一点面力平均集度的极限,即

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} = F_2$$

面力集度 F_2 是矢量,它在坐标轴方向的投影 $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ 称为面力分

量。它们是标量,其正负号以与坐标轴同向为正,相反为负。面力及其分量的量纲为 $L^{-1}MT^{-2}$ 。

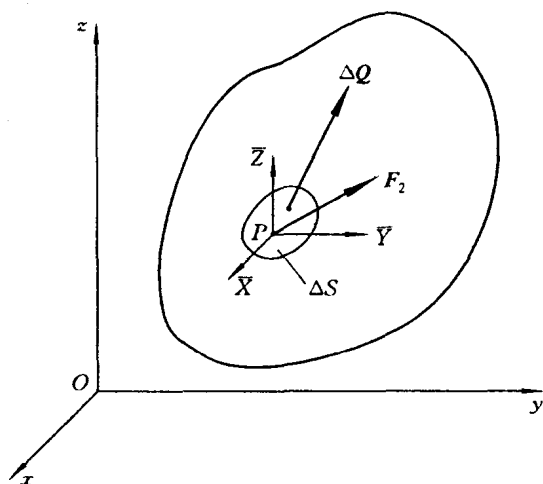


图 1-2

(3) 应力:弹性体受外力作用后其内部不同部分相互之间产生内力,内力的集度就是应力。如图 1-3 所示,假定用通过弹性体内任一点 P 的截面 $m-n$ 将它分为 A 和 B 两部分, B 部分对 A 部分的作用力在 P 点附近微小的面积 ΔA 上的合力为 ΔQ ,其平均集度为 $\frac{\Delta Q}{\Delta A}$,当 ΔA 不断缩小,收拢到 P 点时,平均集度也趋于极限矢量 S ,它就是 P 点的应力,即

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A} = S$$

P 点 $m-n$ 截面上的应力 S 是矢量。它可以沿着坐标轴方向分解为 X_N, Y_N, Z_N ,也可以沿 P 点 $m-n$ 截面的法线方向和切线方向分解为正应力 σ_N 和剪应力 τ_N 。更多情况下是使用正应力和剪应力作为 P 点的应力分量。应力及其分量的量纲为 $L^{-1}MT^{-2}$ 。

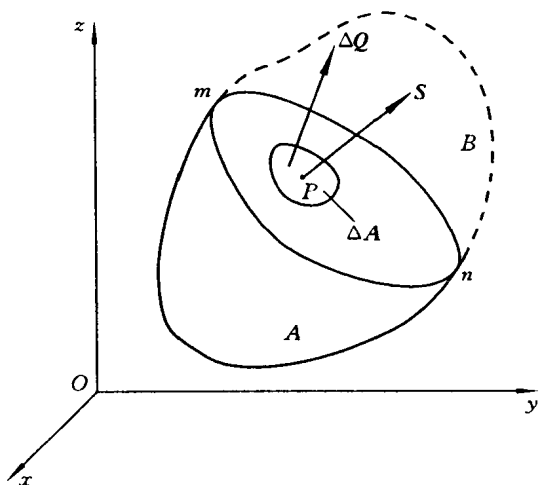


图 1-3

从以上分析看,弹性体内各点内力集度在该点不同方向截面上是各不相同的,即同一点不同方向截面上的应力并不相同。为了确切地表明任一点的应力,引入微分单元体来表示。如图 1-4 所示,在 P 点取与坐标轴平行的三个微分段 $PA = dx$, $PB = dy$, $PC = dz$;再以其端点 P, A, B, C 取与坐标面平行的平面,取得平行六面体。它的体积为 $dV = dx dy dz$ 。这个平行六面体称为 P 点的微分单元体,简称微元体。微元体各个平面上都有应力,可以用一个正应力和两个剪应力表示。如 x 方向的平面上有 $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ 三个应力分量。正应力下标表示该截面方向,即法线方向与 x 轴平行;剪应力用两个下标,第一个表示截面方向,第二个表示该剪应力指向 y 轴方向或 z 轴方向。微元体的六个平面有三个平面外法线与坐标轴同方向,另三个平面外法线与坐标轴反向。与坐标轴同方向的称为正面,与坐标轴反方向的称为负面。

这里规定,微元体正面上的应力,以沿坐标轴正方向为正,负

方向为负；负面上的应力，以沿坐标轴负方向为正，正方向为负。这样，图1-4中微元体各截面上的应力所表示的全为正的。这样规定后，正应力以拉为正，压为负，与材料力学中相同；而剪应力则与材料力学规定不全相同。

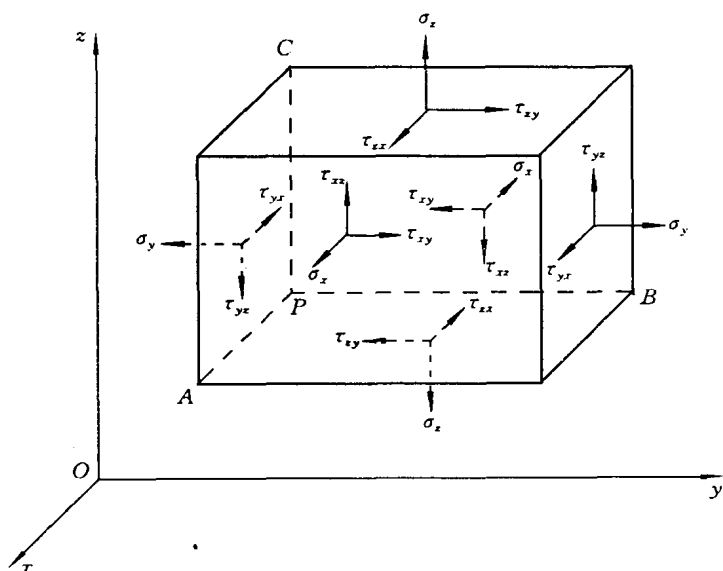


图 1-4

由材料力学知道，六个剪应力分为互等的三对剪应力，这可由微元体力矩平衡来证明。

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}$$

可以证明，若弹性体内任一点的6个应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ 已知，就可以求得该点任意方向截面上的正应力和剪应力，即可确定该点的全部应力状态。

(4) 应变：弹性体受力后发生形状和大小的改变，称为应变，也称为形变。弹性体内任一点的形变，可以用长度和角度的改变来

表示。通过该点的微分线段的相对伸长称为这一点某方向的正应变,通过该点两个微分线段间夹角的改变称为剪应变。正应变也称为线应变,以伸长为正,缩短为负;剪应变也称为角应变,以角度减小为正,扩大为负。在图 1-4 中,通过点 P 的三个互相垂直的微分线段 $dx = PA, dy = PB, dz = PC$, 分别有相对伸长 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$, 称为 P 点 x, y, z 方向的正应变;三条线段间直角的减小为 $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$, 称为 P 点的剪应变。应变分量是无因次量。

可以证明,弹性体内某点坐标轴方向的应变 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ 已知,就可以求得通过该点任意方向的线应变和角应变,即可确定该点的全部应变状态。

(5) 位移:弹性体内在发生变形过程中各点都会有位置的移动,称为该点的位移。位移是矢量,它在坐标轴方向的投影 u, v, w 是标量,称为位移分量。位移分量沿坐标轴正方向为正,反方向为负。位移及其分量的量纲为 L 。

一般地说,弹性体的面力分量、体力分量、应力分量、应变分量、位移分量,在各点上是不同的,它们都是位置坐标的函数。

§ 1-4 弹性力学问题的力学模型 和数学模型

由以上分析可知,弹性力学所研究的是理想弹性体在小变形情况下的应力、应变、位移的分布规律。那么从力学角度要建立力学模型,从数学角度要建立数学模型。

从力学方面看,弹性力学取弹性体作为研究对象,任意取其中一点来研究。那么,这任意一点在坐标系中的微分单元体就是常用的力学模型。不过,在直角坐标系中,微元体是平行六面体,在柱坐标系和球坐标系中,就是另外的形状了,因为是沿坐标面分割出来的,当然会由曲线坐标面方向分割出来的曲面和平面所围成。