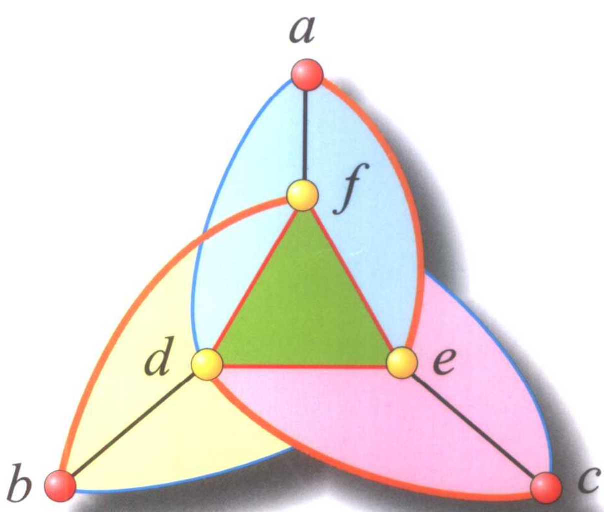
21世纪通向研究生之路系列丛书

考试要点 · 例题精解 · 实战习题

离散数学



考研成功的阶梯

课程学习的帮手

主编 傅彦

常见题型解析及模拟题

西北工业大学出版社

21 世纪通向研究生之路系列丛书

离散数学

常见题型解析及模拟题

主编 傅 彦

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书是按照“离散数学”课程教学的基本要求，为本科生学习和考研者备考而编写的辅导教材。全书共分为9章，分别为：集合基础；命题逻辑；谓词逻辑；二元关系；特殊的关系；图论初步；特殊图形；代数系统；特殊代数系统。各章均按重点与难点、例题精选、习题3部分编写。附录收集了国内几所重点大学近年来硕士研究生入学试题(共18套)，大部分试题在例题精选部分已作详细分析和解答，以便读者准确把握每章内容的考点。各章习题均附有详细分析和解答。

本书是考研者的有力助手，也是高校本、专科学生学习离散数学课程的必备书。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学常见题型解析及模拟题/傅彦主编. —西安：西北工业大学出版社，2002.9

(21世纪通向研究生之路系列丛书)

ISBN 7-5612-1476-6

Ⅰ. 离… Ⅱ. 傅… Ⅲ. 离散数学—研究生—入学考试—解题 Ⅳ. O158-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第061244号

出版发行：西北工业大学出版社

通信地址：西安市友谊西路127号，邮编710072　　电话：(029)8493844

网　　址：http://www.nwpup.com

E-mail：fxb@nwpup.com

印 刷 者：陕西向阳印务有限公司

开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16

印　　张：15.5

字　　数：367千字

版　　次：2002年9月第1版　　2002年9月第1次印刷

印　　数：1～6 000册

定　　价：20.00元

序

● 邱关源[①]

面向21世纪，社会对德才兼备的高素质科技人才的需求更加迫切。通过行之有效的途径和方法培养符合时代要求的优秀人才，是摆在全社会尤其是高等学校、科研院(所)面前一项艰巨而现实的问题。

为了强化素质教育，使大学生学有所长，增强才智，高等教育部门各有关单位对高等学校公共基础课、技术基础课到专业课的整个教学过程做了大量细致的工作。与之相配合，不少出版社也相继出版了指导学生理解、领会教学内容，增强分析、解决问题能力的辅导读物，其中多数是关于外语、数学、政治等公共基础课的，极大地满足了大学生基础课学习阶段相应的要求。但当学习技术基础课时，学生们同样需要合适的参考书来帮助他们掌握课程重点和难点，提高课程学习水平，以及指导解题的思路和技巧，乃至适应研究生入学考试的需求。不过，这类读物目前比较少见。基于此，西北工业大学出版社的同志们深入作者、读者之中，进行市场调查研究，在广泛听取意见的基础上，组织数十位在重点大学执教多年，具有较高学术造诣的一线教师，经历两年，精心编撰了这套旨在有效指导大学生学习技术基础课，为课程学习、应试考研及以后工作提供帮助的参考书。

---

① 邱关源——西安交通大学教授，博士生导师。曾任第一、二届中国电工技术学会理论电工专业委员会副主任委员，高等教育委员会工科电工课程教学指导委员会委员。

该丛书首批推出9种，所有书稿几经修改，并经同行专家审定。内容选材符合课程基本要求，并且重在对基本概念的启发、理解和提高读者分析问题的能力。我热情地向大家推荐这套丛书，希望它能对广大读者的学习有所帮助，更期望它能在强化素质教育、推动教学改革方面起到积极作用。

邱关源

1997年10月

出版说明

随着经济建设的快速发展和科教兴国战略的实施，社会对高素质专业人才的需求更加迫切。崇尚知识，攻读学位，不仅是一种知识价值的体现，更是社会进步的标志。“考研热”已成为当今社会一道引人注目的风景线，成为莘莘学子乃至全社会关注的热点。

研究生入学考试是通向研究生之路上必过的一关。除了政治、英语、数学等公共基础课之外，技术基础课（专业基础课）和专业课也是必考的科目。为了配合全国各高校加强高素质、知识型人才的培养的需求，也为了给广大同学提供一套行之有效的、切合实际的考研指导用书，西北工业大学出版社精心策划和组织编写了《通向研究生之路系列丛书》，并于1997年9月陆续出版，至今已出版17种，基本涵盖了全国工科院校所开设的技术基础课和拟选定的考研科目。

本丛书具有以下4大特点：

1. 选题新颖，独树一帜

该丛书站在新的视角，有针对性、有计划地推出整套工科技术基础课的学习用书，令人耳目一新。

2. 紧扣大纲，严把尺度

丛书紧紧围绕国家教育部制定的教学大纲及研究生入学考试大纲，按照基础知识与提高解题技巧的主线，把握住内容的深浅程度，既保证课程学习时开卷有益，又能对复习应试行之有效。

3. 重视能力，提高技巧

该丛书严格遵从不管是课程学习还是考试，其最终目的都是为提高学生分析问题、解决问题的能力这一主旨，重在通过阐明基本要点及典型例题解析来引导学生识题、解题。

4. 选材得当，重点突出

参加本丛书编写的作者均是从事教学工作多年的资深教师。在丛书内容的取舍、材料的选编及文字表达方面能更胜

一筹。因此，丛书内容得当，材料全而不滥，精而易懂，注释简明，解析扼要。

这套丛书的价值和生命，在时间的考验和市场的竞争中得到充分的证实。3年多来，从读者热忱的来函、来电和来访中可以看出，丛书不仅使广大报考硕士研究生的同学们深受裨益，而且对高校的教学改革起到了推波助澜的作用。基于此，在科学技术高速发展、高校基础课教材不断更新的今天，我们深感有责任、有义务，增新摒旧，扬长弥短，下大功夫，继续努力，使这套丛书日臻完美，以更好地为广大读者服务，为科技进步服务。

本次修订我们是在组织了资深作者，经过认真的讨论，多次的酝酿，在完成扎实的前期工作的基础上进行的。首先，对各分册第1版进行了精细、严格的审订；其次，在保持原有的结构严谨、重点突出、实用性强等特点的基础上，对部分内容予以删改、补充、更新；第三，为了配合当前高等学校注重培养高素质的知识型人才，拓宽基础知识面，加强基础理论的教学要求，修订时特别注意将科技发展中成熟的新技术予以补充；第四，与新修订的全国通用教材的内容相应配套，补充了例题或习题，有的分册增加了新的章节；第五，各个分册的附录部分都做了较大的变动，使读者不仅可以了解具体内容，而且为那些有志深造的读者提供有积累价值的资料。

本丛书的出版得到了多方面的支持和关心，陕西省学位委员会办公室、西安交通大学、西安电子科技大学、西北工业大学等单位的有关人士为本丛书的出版出谋划策，提出了许多建设性的意见。西安交通大学邱关源教授献身教育事业50余年，德高望重，学识渊博，他在百忙中为本丛书写了序，充分肯定了本丛书的价值。为此，我们一并表示衷心的感谢。

这套丛书现以《21世纪通向研究生之路系列丛书》的崭新面貌进入市场。它把丛书的作者、读者和出版者紧紧地联系在一起。在本套丛书第2版即将付梓之际，我们对辛勤耕耘在教学、科研第一线，将自己在实践中积累的知识无私奉献给社会、奉献给读者的各位作者老师表示衷心的感谢。我们坚信，修订后的这套丛书将为在书海中勤奋进取的同学们指引一条通向成功的捷径，也必将成为在知识海洋中遨游的学子们不断博击，获取胜利的力量源泉。

丛书编委会

2000年9月

前　　言

本书是根据原国家教委(现教育部)教学指导委员会编制的“离散数学课程教学的基本要求”及硕士学位研究生入学考试的基本要求,为立志报考硕士研究生的广大读者系统复习“离散数学”课程而编写的辅导教材。全书共分为9章,分别为:集合基础;命题逻辑;谓词逻辑;二元关系;特殊的关系;图论初步;特殊图形;代数系统;特殊代数系统。各章均按重点与难点、例题精选、习题3部分编写。

重点与难点部分,简要阐述了各章的重要内容和应达到的基本要求,以便读者尽快掌握考点与难点。

例题精选部分注重体现了近年来高校硕士研究生入学考试命题的特点和趋向,采用把近年来全国部分重点院校考研试题融于各章内容的方法,并对试题进行一题多解,使读者加深对基本概念和内容的理解,准确把握考研要点。

习题部分题量较大,以供读者自我测试,习题答案部分对各章习题进行了详细分析和解答以便读者检查做题效果。

附录部分汇编了国内几所重点大学的硕士研究生入学试题(共18套),大部分试题在各章例题精选中已做解答,以供读者熟悉考研题型参考。

本书由成都电子科技大学计算机科学与工程学院副院长傅彦副教授编写。学院其他教师也给于本书很大的帮助,在此表示谢意!

由于作者水平有限,加之工作繁忙,书中难免出现疏漏,敬请读者谅解并指正。

傅　彦

2002年3月于成都电子科技大学

通向研究生之路系列丛书编委会

目　录

1

集合基础

- 集合与集合的关系
- 集合的运算与定律
- 有穷集合的计数

1.1 重点与难点

集合是一切数学的基础，每一门数学的讨论都离不开集合，为此，我们必须掌握集合的基本定义及运算规律，掌握集合的证明方法，这对于学习离散数学将有极大的帮助。下面就从六个知识点来加以阐述。

1.1.1 集合与元素

集合是任意客体(对象)的聚集。客体(对象)称为这个集合的“成员”或“元素”，元素 a 要么属于集合 A，要么不属于集合 A，记为：

$$a \in A \text{ 或 } a \notin A$$

此时，要充分地认识“任意客体”和“聚集”的含义。

1.1.2 集合与集合的关系

集合与集合之间的关系有包含 $\subseteq$、相等 $=$、不包含 $\not\subseteq$、不相等 $\neq$、真包含 $\subset$、不真包含 $\not\subset$ 等，具体定义如下：

(1) B 包含在 A 中(或 A 包含 B)，记为 $B \subseteq A$。

$B \subseteq A \Leftrightarrow (\forall x)(x \in B \rightarrow x \in A)$，此时，也称 B 是 A 的子集。

(2) 集合 A 与集合 B 相等，记为 $A = B$。

$A = B \Leftrightarrow (B \subseteq A) \wedge (A \subseteq B)$

此时，两个集合各自包含的对象一一对应相等(或者说完全相等)，该定义称为集合的外延性原理。

(3) 集合 B 不被 A 所包含，记为 $B \not\subseteq A$。

$B \not\subseteq A \Leftrightarrow (\exists x)(x \in B \rightarrow x \notin A)$，此时，也称集合 B 不是集合 A 的子集。

(4) 集合 A 与集合 B 不相等，记为 $A \neq B$。

$A \neq B \Leftrightarrow (B \not\subseteq A) \vee (A \not\subseteq B)$

(5) 集合 B 真包含在集合 A 中或集合 A 真包含集合 B，记为 $B \subset A$。

$B \subset A \Leftrightarrow (B \subseteq A) \wedge (B \neq A) \Leftrightarrow (\forall x)(x \in B \rightarrow x \in A) \wedge (\exists x)(x \in A \wedge x \notin B)$，此时，也称集合 B 是集合 A 的真子集。

(6) 集合 B 不被 A 所真包含，记为 $B \not\subset A$。

$B \not\subset A \Leftrightarrow (B \not\subseteq A) \vee (B = A)$

在集合中，常常涉及到集合之间的包含与集合之间相等的证明。证明时，常依据上述定义，采用离散数学中特有的按定义证明方法来加以证明。由于离散数学中的很多定义，都是由两部分构成，即“如 ……，则 ……”，我们把定义中的前半部分叫“已知”，后半部分叫“结论”，所以，所谓按定义证明方法就是首先叙述出你所要证明问题的定义，利用定义中的“已知”条件，加上题目中的其他的已知条件，推出定义中的“结论”。

1.1.3 特殊的集合

(1) 空集：不含任何元素的集合叫做空集，记为 $\varnothing$。空集是绝对惟一的，且是任何集合的子集。

证明一个集合是空集，或证明集合的惟一性，常采用反证方法，即假设该集合不是空集，或不惟一，导致与已知条件的矛盾或导致惟一。

(2) 全集：在一个具体的问题中，所研究的集合都是某个固定集合的子集，则称这个固定集合为全集，记为 E 或 U。全集仅是相对惟一的。

(3) 幂集：任一集合 A 的一切子集作为元素所构成的集合称为 A 的幂集，记为 $P(A)$，即 $P(A) = \{x \mid 一切\ x \subseteq A\}$。如 $|A| = n$，$|A|$ 为集合 A 的元素个数，即集合的基数，则

$$|P(A)| = 2^{|A|} = 2^n \left(= C_{|A|}^0 + C_{|A|}^1 + \cdots + C_{|A|}^{|A|} = (1+1)^{|A|} = 2^{|A|} = 2^n\right)$$

显然 $|A| \ll |P(A)|$，由此可知：集合中不存在最大的集合。

1.1.4 集合的运算与定律

1. 集合的运算

集合的基本运算有并 $\cup$，交 $\cap$，差 $-$，补 $\sim$，对称差 $\oplus$，其定义如下：

$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$

$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$

$A - B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$

$\sim A = E - A = \{x \mid (x \in E) \wedge (x \notin A)\} = \{x \mid (x \notin A)\}$（$A$ 的补也常记为 $\overline{A}$，$\widetilde{A}$ 或 A^C）

$$\begin{aligned} A \oplus B &= (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B) = \\ &\{x \mid ((x \in A) \wedge (x \notin B)) \vee ((x \in B) \wedge (x \notin A))\} = \\ &\{x \mid ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge ((x \notin A) \vee (x \notin B))\} \end{aligned}$$

2. 运算的定律

(1) 幂等律：$A \cup A = A, A \cap A = A$

(2) 结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(3) 交换律：$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$

(4) 分配律：$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$，
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(5) 吸收律：$A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A$

(6) 同一律：$A \cup \varnothing = A, A \cap E = A$（$\varnothing, E$ 分别也是关于运算 $\cup, \cap$ 的幺元）

(7) 零 律：$A \cup E = E, A \cap \varnothing = \varnothing$（$E, \varnothing$ 分别也是关于运算 $\cup, \cap$ 的零元）

(8) 排中律、矛盾律：$A \cup \sim A = E, A \cap \sim A = \varnothing$（$\sim A$ 又叫做 A 的补元）

(9) $D.M$ 律：$A-(B \cup C)=(A-B) \cap (A-C)$

$A-(B \cap C)=(A-B) \cup (A-C)$

$\sim (B \cup C) = \sim B \cap \sim C$

$\sim (B \cap C) = \sim B \cup \sim C$

(10) 双重否定律：$\sim(\sim A) = A$

1.1.5　有穷集合的计数

解决有穷集合的计数问题有两种方法：有文氏图法和包含排斥原理。

设 S 是有穷集，$p_1, p_2, \cdots, p_m$ 是 m 条性质，S 中的任何元素 x 对于性质 $p_i(i=1,2,\cdots,m)$ 具有或者不具有，两种情况必居其一。令 $\bar{A}_i$ 表示 S 中不具有性质 p_i 的元素构成的集合，则包含排斥原理可表述为：

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_m| = |S| - \sum_{i=1}^{m} |A_i| + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant m} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant m} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^m |A_1 \cap \cdots \cap A_m|$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m| = \sum_{i=1}^{m} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant m} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant m} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{m+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m|$$

1.1.6　无限集合

1. 可数无限集合

自然数集合 $N = \{0,1,2,\cdots\}$ 是一个可数（可列）无限集合，凡是与自然数集合等势的集合就是可数无限集合。如整数集合、奇数集合、偶数集合，素数集合、有理数集合等。

2. 不可数集合

开区间(0,1) 称为不可数集合，凡与(0,1) 等势的集合都是不可数集合。如闭区间[0,1]，实数集合、无理数集合、复数集合等。

3. 有限集合和无限集合的重要差别

(1) 两个有限集合等势当且仅当它们有相同个数的元素；

(2) 有限集合不和其任何真子集等势；

(3) 无限集合可以和其真子集等势；

(4) 如 A, B 是两个有限集合，且 $|A| = |B|, A \subseteq B$，则 $A = B$。

1.1.7　总结

通过本章的学习，应达到下面的基本要求：

(1) 能正确地表示一个集合，会画文氏图；

(2) 能判定元素是否属于给定的集合；

(3) 能利用按定义证明法证明两个集合之间的包含、相等、和真包含的关系；

(4) 能熟练地作集合之间的并、交、差、补和对称差运算，掌握集合运算的定律；

(5) 能熟练地计算 $P(A)$；

(6) 能求解与有穷集合计数相关的实际问题。

1.2 例题精选

例 1.1 设 A,B,C 是任意三个集合，如果 $A\in B,B\in C$，则 $A\in C$ 可能吗？$A\in C$ 常真吗？举例说明之。

分析 由于集合的定义是由任意客体的聚集，所以，集合的元素即可是真正的元素，也可以集合作为元素；元素和元素之间，即可有关系，又可没有关系。所以，上述结论可能成立。

解 举例说明如下：$A=\{a\},B=\{\{a\}\},C=\{\{a\},\{\{a\}\}\}$，则有 $A\in B,B\in C,A\in C$。但 $A\in C$ 也不常为真。如 $A=\{a\},B=\{\{a\}\},C=\{\{\{a\}\}\}$，则有 $A\in B,B\in C$，但 $A\notin C$。

例 1.2 设 A,B,C 是任意三个集合：

(1) $A\cup B=A\cup C$，则有 $B=C$ 吗？

(2) 如 $A\cap B=A\cap C$，则有 $B=C$ 吗？

(3) 如 $A\cup B=A\cup C$ 且 $A\cap B=A\cap C$，则有 $B=C$ 吗？

分析 如(1)，(2)成立，则运算 $\cup,\cap$ 就应该满足消去定律，但从集合之运算所满足的定律知：运算 $\cup,\cap$ 不满足消去定律，所以，$B=C$ 不一定成立。

解 举例说明如下：(1) $A=\{1,2,3\},B=\{1,2\},C=\{2,3\}$，则 $A\cup B=\{1,2,3\}=A\cup C$，但 $B=\{1,2\}\neq\{2,3\}=C$

(2) $A=\{1,2\},B=\{1,2,3\},C=\{1,2,4\}$，

则 $A\cap B=\{1,2\}=A\cap C$，但 $B=\{1,2,3\}\neq\{1,2,4\}=C$

(3) 当(1)，(2)的条件都满足时，则有：

$$B=B\cup(B\cap A)=B\cup(A\cap B)=B\cup(A\cap C)=$$
$$(B\cup A)\cap(B\cup C)=(A\cup B)\cap(B\cup C)=(A\cup C)\cap(B\cup C)=$$
$$(A\cap B)\cup C=(A\cap C)\cup C=C$$

此结论(3)可看成是一个扩充的消去定律。

例 1.3 设 A,B 为任意集合，证：

(1) $A\subseteq B\Rightarrow P(A)\subseteq P(B)$

(2) $P(A)\subseteq P(B)\Rightarrow A\subseteq B$

(3) $P(A)=P(B)\Leftrightarrow A=B$

(1) **分析** 要证明两个集合之间有包含关系，利用按定义证明方法，要首先叙述此包含关系的定义，利用定义中的条件加题目的已知条件，证明出定义中的结论。因此，在本问题中，首先叙述 $P(A)\subseteq P(B)$ 的定义，即对 $\forall x\in P(A)$，……，所以 $x\in P(B)$，则 $P(A)\subseteq P(B)$，然后，利用 $x\in P(A)$，与 $A\subseteq B$，加入到省略号处，证明出 $x\in P(B)$。具体证明如下：

证明 对 $\forall x\in P(A)$，有 $x\subseteq A$，又 $A\subseteq B$，所以，$x\subseteq B$，即 $x\in P(B)$ 所以，$P(A)\subseteq P(B)$。

(2) 证明方法完全同上，也采用按定义证明法：对 $\forall x\in A$，则 $\{x\}\subseteq A$，即 $\{x\}\in P(A)$，又 $P(A)\subseteq P(B)$，所以，$\{x\}\in P(B)$，即 $\{x\}\subseteq B$，所以，$x\in B$，即 $A\subseteq B$。

(3) 要证明两个集合相等，根据外延性原理，即是证明两个集合相互包含，由(1)，(2)及扩