科學圖書大庫

實驗與放射計數數據之統計處理

編譯者　葉世禧
校　閱　翁寶山

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

實驗與放射計數數據之統計處理

編譯者　葉世禧
校　閱　翁寶山

徐氏基金會出版

鄭　　序

實驗爲從事於核能工作不可缺少的例行工作之一，而實驗數據之分析與整理更爲實驗過程所不可缺少者。部分與核能有關之實驗涉及核粒子之計數測定，其實驗數據之處理有其獨特之處。本會技士葉世禧先生於民國六十二年與清華大學翁寶山教授共事時，於翁教授指導之下從事於環境輻射偵測之實驗，並編譯此書。前四章適合於一般實驗，最後一章則專爲放射計數實驗而設。翻譯編纂各佔一半。爲大專理工科之良好教材和參考書。

鄭　振　華

民國六十四年六月一日於

行政院原子能委員會

Hwatou 57

翁　　序

行政院原子能委員會技士葉世禧先生於民國六十二年九月奉派在淸華與余共事數月，從事於環境輻射之測量工作。因所處理之試樣多屬低活性，於計數過程以及所獲之數據，須藉統計學方法分析與處理。此項分析工作涉及基本之統計學知識，如大專理工科學生未選修統計學，則不易了解處理實驗數據應如用運用統計學的定律。尤其是核工，保健物理，放射化學，近代物理等實驗涉及計數技術時，更需要基本的統計學知識。葉世禧先生於工作之餘，迻譯適於大專理工科學生閱讀的基本統計學教材，卽本書的第一章至第四章。以簡潔淺近的數學，證明統計學的定律，以節省讀者的時間。每章並附有習題和答案，供讀者自習之用。第五章爲實際應用放射計數的統計方法，選取材料內容力求實用，並用線圖法求解。故除大專程度者，高工程度者亦可作爲參考之用。第五章所蒐集之例題，爲於計數實驗室常見的實例。本書迻譯之敎材，均列於參考文獻，以便參考。

翁寶山　　謹識

民國六十四年六月十五日於

淸華大學原子科學研究所

目　録

第一章　緒　言

在自然科學與工程學的領域裏，經常會遭遇到一些直接從實驗所得的數字。事實上，自然科學的本質就是對自然現象作各種定量的觀察，從而加以應用。但是實驗的觀察總是會有不準度（ inaccuracy ）出現 ，因此在應用這些實驗的數據時，必須了解這些不準度的程度。如果用多次觀察來計算某一結果，那麼也要了解每次觀察對整個結果的不準度有何影響。此外，從理論的預測或實驗的結果對某一數據作比較時，也必須了解它們的不準度。以說明它們之間的出入。如果一個人對於誤差的統計行爲有所認識的話，那麼經常也能減少這種不準度對於最後結果的影響。這些都是我們將要討論的問題。

第一節　誤差的種類

習慣上，我們把每次觀察中的誤差區分爲系統誤差（ systematic errors ） 與機遇或隨機誤差（ chance or random errors ）。

系統誤差係使用某一特殊的儀器或實驗技術附帶產生的。例如，有一本9吋高的書，用一把尺來量它的高度，先將尺的一端與書的底端對齊，假設尺上的第一吋處已先被截斷，那麼這把尺指出書的高度是10吋 。這就是一種系統誤差。如果一隻溫度計插進沸騰的純水中，在正常的氣壓下讀數是 102° C ，那麼這隻溫度計的校準便不適當，如果這個讀數用來計算結果，那麼就產生了一個有系統誤差的結果。同樣的，一個未適當歸零的安培計，也產生系統誤差。

通常在實驗工作上，系統誤差較機遇誤差來得重要，但同樣也較難處理，而且沒有一個通則來避免系統誤差。祇有經驗豐富的實驗者才能不斷地察知系統誤差的存在，並且防止發生此種誤差。

機遇誤差是由實驗中許多不可預測而又不可知的變化所產生的。這些可能是觀察者判斷上的小誤差。例如，在估計小刻劃的十分之一時。也可能是

由於實驗中不可預測的波動所引起的，例如：溫度、照度、電壓或其他設備上的振動等。由經驗得知，像這一類機遇誤差通常遵照一定的簡單定律而產生，因此能用統計學來處理。本書以後各節將討論這方面的處理。

另外，還有一些有時也稱爲誤差，但適當地說，完全不是。這些包括：讀數記錯，讀數的方法不正確或計算上的錯誤。這些在一個良好的實驗中是毫無地位的，祇要仔細操作，就能完全消除。

一般常用準確度（ accuracy ）與精密度（ precision ） 來區別系統誤差與機遇誤差，如果系統誤差很小，我們就說很準確。如果機遇誤差很小，我們就說很精密。

第二節　誤差的擴展

當我們用許多次實驗的觀察去計算某一結果時，如果這些觀察的本身都有誤差，那麼這個結果也會有一定量的誤差，而且這個誤差隨個別的誤差而定，這種現象稱爲誤差的擴展（ propagation of error ）。

一般來說，我們不能直接算出總結果的誤差，因爲每次觀察中的誤差通常都不知道，如果可以知道的話，那麼我們自然可以矯正而消除這種誤差了。本節並不能對這些誤差的擴展有直接的幫助，不過卻能導出有用的公式。這是第十三節的主要課題。同時在第十三節裏，我們將發現「誤差並不是錯誤而是一定量中的小變化」，我們也想算出這種小變化對於計算那個定量有什麼影響。

舉例說，假如我們想要測定一個圓柱體的體積，那麼我們先量它的半徑與高，再由下面的公式計算：

$$V=\pi r^2 h \qquad (2.1)$$

在這裏，測量 r 時，可能有一點誤差，因此得出的結果與 r 稍有不同，我們定它爲 $r+\Delta r$（ Δr 就是誤差）。同樣的，高也有 Δh 的誤差。那麼結果就不是 V 了，而是 $V+\Delta V$。下面計算 ΔV，將公式中的 r 換成 $r+\Delta r$，h 換成 $h+\Delta h$，結果 V 換成 $V+\Delta V$。

$$V+\Delta V=\pi(r+\Delta r)^2(h+\Delta h) \qquad (2.2)$$

展開後，兩邊均減去 V，得：

$$\Delta V=\pi\left(r^{2}\Delta h+2rh\Delta r+\Delta r^{2}h+2r\Delta r\Delta h+\Delta r^{2}\Delta h\right) \tag{2.3}$$

現在如果Δr比r本身小得多，，Δh也比h本身小得多，那麼式（2.3）中的最後三項就比前面兩項小得多，因此可以近似地寫成:

$$\Delta V\cong\pi\left(r^{2}\Delta h+2rh\Delta r\right) \tag{2.4}$$

由上式，我們祇要知道r，h與它們的誤差，就能算出ΔV。換句話說，如果把原來的尺寸作Δr與Δh的變化，式（2.4）就能告訴我們計算圓柱體積的變化量。

有時，我們有興趣的並不是誤差本身，而是所謂的相對誤差（ fractional error ），它的定義爲誤差量對眞量的比值。在我們所討論的例子，就是$\Delta V/V$。

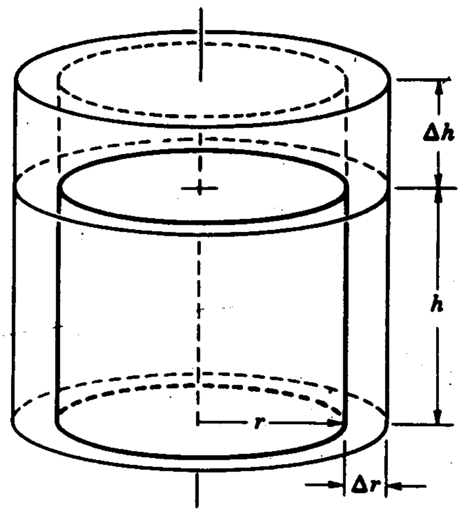

圖2.1　由於Δr與Δh變化之結果，圓柱體的體積亦起變化。試由圖中認明式（2.4）之每一項。

$$\frac{\Delta V}{V}\cong\frac{\pi\left(r^{2}\Delta h+2rh\Delta h\right)}{\pi r^{2}h}=\frac{\Delta h}{h}+\frac{2\Delta r}{r} \tag{2.5}$$

這是一個很簡潔的結果，因爲V的相對誤差與h和r中的相對誤差（或相對變量）有一個很簡單的關係。

我們還可以用不同的方法得到相同的結果，用微分的方法導出由r的誤差所引起V的誤差。如果ΔV與Δr的值都很小，那麼$\Delta V/\Delta r$就近似於dV/dr，$dV/dr=2\pi rh$。因此可以近似寫成

$$\frac{\Delta V}{\Delta r}\cong2\pi rh$$

與

$$\frac{\Delta V}{V}\cong\frac{2\pi rh\Delta r}{\pi r^{2}h}=\frac{2\Delta r}{r} \tag{2.6}$$

這樣所得到的是由 r 的誤差所引起 V 的相對誤差，同樣的運算可以得到 Δh 的影響，而總相對誤差 $\Delta V/V$ 與上面的方法導出的相同。

因爲 V 是 r 與 h 的函數，因此 V 對 r 的微分的正確數學表示法是 $\partial V/\partial r$，讀成 V 對 r 的偏微分，意思是 V 除了 r 之外，還是其他變數的函數，祇是當我們求對 r 的微分時，其他的變數保持不變。同理定出 V 對 h 的偏微分 $\partial V/\partial h$。因此對於誤差 ΔV 的近似表示法就可寫成

$$\Delta V \cong \frac{\partial V}{\partial r}\Delta r+\frac{\partial V}{\partial h}\Delta h \tag{2.7}$$

把這個結果普遍化，假設有一個數量 Q 是 a，b，c，…等其他可觀察數的函數，那麼由 Δa，Δb，Δc，…等誤差所引起的誤差 ΔQ 就寫成

$$\Delta Q=\frac{\partial Q}{\partial a}\Delta a+\frac{\partial Q}{\partial b}\Delta b+\frac{\partial Q}{\partial c}\Delta c+\cdots \tag{2.8}$$

相對誤差 $\Delta Q/Q$ 寫成

$$\frac{\Delta Q}{Q}=\frac{1}{Q}\frac{\partial Q}{\partial a}\Delta a+\frac{1}{Q}\frac{\partial Q}{\partial b}\Delta b+\cdots \tag{2.9}$$

如同本節開始時所說的，我們所討論的並不能在誤差擴展的分析上有直接用途。我們剛才所討論的不僅知道每次觀察的眞值，而且知道每個誤差值。這祇有在某些情況下才正確，或是我們想從 a，b，… 等的定值計算 Q 的變化量時，才可以用式（2.8）。

但是通常都沒有這種情形發生，通常我們都不能確切地知道誤差，因爲誤差的發生都是不規則的，有時可以知道一組觀察中誤差的分配，但各個誤差的本身卻不曉得。稍後在具備一些統計學的基本知識後，我們可以在第十三節裏學到一些巧妙的方法去處理有關誤差擴展的問題，在第十三節的方法要比本節粗淺的構想實用得多。

另外，要考慮的是並不見得每次都能淸楚地知道有眞值存在。假設我們要量一根折斷的手杖，折斷處卻崎嶇不平，那麼我們祇能說這個長度介於某兩個定值之間，譬如 14 吋至 15 吋之間。如果想要有更精密的數值，首先要決定末端到底在何處，而即使量到的長度精密到 0.01 吋內，我們也不能說到了這個精密度，這根手杖就有了一定的長度。

以下各節所要討論的都假設在量的測定時有眞值存在。不過我們仍要記

住，在某些物理學的領域中，如果說某一可觀察量有定值是不正確的。事實上，基本物理量的不準度就是量子力學的基本概念。在量子力學的問題中，一般人對於很多次觀察之平均能有一定值，已感到十分滿足。

第三節　平均值與離差

如果用一具測徑器測量一個鋼柱的直徑，假設這個鋼柱有眞實直徑，那麼測量很多次，可能得出的都是不同的結果。可能某次測量時旋得較緊，或是有塵埃存在；也可能在估計最小刻度的十分之一時產生誤差。因此，我們直覺地猜想：對這個直徑作10次測量，應該比祇測量1次能夠得到較爲可靠的結果。

那麼應該如何來處理這10次的測量呢？最明顯的是求其平均值，或者其算術平均數。一組數目的平均值其定義爲所有數目的和除以它們的個數。有了10次測量，就可以把它們的值全部加起來，然後除以10。廣泛地說，每次的觀察稱爲x_i，如果有10次觀察，那麼指數i就可以從1到10中的任何整數，如果有N次觀察，那麼就從1到N。

依照定義，一組數目的平均值x_i爲

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{N-1} + x_N}{N} \qquad (3.1)$$

以後我們在字母上加一橫槓對表示平均值。

用簡便的數學表示法

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \qquad (3\ 2)$$

在這種表示法，

$$\sum_{i=1}^{N}$$

的記號讀成從$i=1$到N的總和，也就是說在$\sum$的符號後面，首先令$i=1$，再令$i=2$加到前面的結果。依此類推，一直到$i=N$。因此

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_{N-1} + x_N$$

在以後，我們會發現，在某些重要的情況下，將一組測量的平均值看成是該量的眞值是一種最佳的估計。而目前我們祇是把它看成一種合理的步驟。

有時要計算一組數目的平均值，而這些數目之中有些被認爲是比其他的數目重要，那麼我們應該如何計算呢？舉例說，有兩個人同時觀察一棵樹的高度，分別得到30呎與60呎，我們對於前者的估計要比對後者具有兩倍的信心，那麼應該如何將這兩個數值作最好的結合，來作爲這棵樹的高度呢？我們立刻會想到假設30呎的估計多作一次，也就是說，計算平均值時，它有二次，那麼自然地估計次數一共變成三次，而我們的最佳估計就成爲

$$\frac{2(30\text{呎})+1(60\text{呎})}{2+1} = 40\text{呎}$$

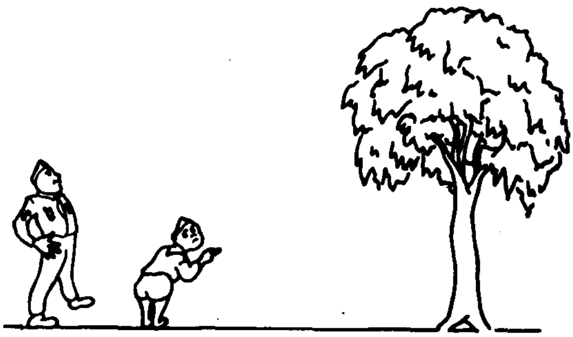

圖 3.1　不相等份量之觀測

廣泛地說，如果許多次估計各有不同的可靠性，那麼就個別乘上一個適當的加權因數（ weighting factor ），然後再除以加權因數的和。

這種推理導出了加權平均（ weighted mean ）的概念，加權平均的定義爲：對於數組（ x_1，x_2，…，x_N ）之中的每一個數 x_i 都賦予一個加權因數，或是權值 w_i，那麼加權平均 $\bar{x}$ 的定義爲

$$\bar{x} = \frac{w_1x_1+w_2x_2+\cdots+w_Nx_N}{w_1+w_2+\cdots+w_N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} w_i} \qquad (3.3)$$

如果所有的權值都等於1（或是都相等），那麼這個加權平均就等於式

（ 3.2 ）。

有了一組測量值 x_i 與其平均值後 ，我們希望能用一種方法去說明測量值與平均值偏離的情形。如果有一個量來說明這種偏離（或是散布），那麼可以使我們對這組測量值的精密度有一明白的概念。

爲了要定出這樣一個量，我們對每一個測量值 x_i 指定一個離差（ deviation ）。它的定義爲測量值 x_i 與平均值 $\overline{x}$ 的差

$$d_i = x_i - x \tag{3.4}$$

（其定義也可以爲 $d_i = \overline{x} - x_i$ ，這祇是一種習慣用法，有些人甚至稱 d_i 爲殘差（ residuals ）而不稱離差。其實是異辭同義。）

這裏要注意 d_i 並不是測量值 x_i 的誤差，因爲 $\overline{x}$ 實際上並不是觀測量的眞值。不過，如果能作非常多次的觀測，那麼也能證明 $\overline{x}$ 接近該量的眞值（假設沒有系統誤差），而 d_i 也就接近某一次測量值 x_i 的誤差眞值。例如第九節所討論的高斯分配（或稱爲常態誤差函數），如果誤差依照這種分配，那麼就是上面所說的情況。

爲了要定出一個量來描述測量值 x_i 對平均值的散布情形 ，先考慮離差的平均值

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} d_i = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x}) \tag{3.5}$$

式（ 3.5 ）的右邊是 N 項的和，而每一項又是兩項的差，我們可以不管次序，先將第一項加起來，再加第二項，也就是

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x}) = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i - \sum_{i=1}^{N}\overline{x}\right) \tag{3.6}$$

現在式（ 3.6 ） 右邊第二項代表什麼意義呢？雖然它是 N 項的和，但是每項都相同，祇要把 $\overline{x}$ 本身加 N 次，也就是說

$$\sum_{i=1}^{N}\overline{x} = N\overline{x}$$

於是離差的平均值變成

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} d_i = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i-\bar{x} = 0 \qquad (3.7)$$

也就是說，離差的平均值等於零。

這是一點也不必驚訝的，因為有些觀測值大於平均值，而有些小於平均值，所以離差就有正有負，由於定義的關係，離差的平均值就永遠為零了。這表示離差的平均值在描述散布的情形來說是沒用處的。

如果取離差的絕對值之後再加以平均。就得出平均離差（ mean deviation ），寫成 α。

$$\alpha = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|d_i| = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|x_i-\bar{x}| \qquad (3.8)$$

這個量與離差的平均值是不同的；所謂平均離差並不是離差本身的平均值，而是離差絕對值的平均。這個量有時用來度是測量值的散布情形。以後將再加以討論。

其次，我們要對一個更有用的量下定義，稱為標準差（ standard deviation ）。

如果把每一個離差的值求平方，那麼負的離差也變成了正數，然後求這些平方數的平均值，再求此平均值的平方根，因此標準差也可稱為均方根離差（ root-mean- square deviation ），也就是說，對離差的平方求平均值後，再求其平方根，通常用 σ 表示

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} d_i^2} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2} \qquad (3.9)$$

而標準差的平方 σ^2 稱為該組觀測的變異數（ variance ）。這裏要注意的是 σ 與 x_i 永遠單位相同，且永遠為正數。

那麼到底 σ 與平均值 $\bar{x}$ 的精密度有何關係呢？很明顯地，如果觀測的次數增加，那麼 $\bar{x}$ 的誤差就不會有 σ 那樣大。在第十二節，將會證明 $\bar{x}$ 的誤差很少可能大於 $\sigma/N^{\frac{1}{2}}$ ，也就是說，測量的次數愈多，平均值愈可靠。

現在把式（ 3.9 ）改寫成僅含 x_i 項 ，這樣除了可以用機器計算之外，這種新的形式並不特別有用。不過我們可以像求離差的平均值一般地使用 $\sum$ 符號而加以運算。

把整個式子平方，然後把 $\sum$ 符號裏的項都乘出來

$$\sigma^2=\frac{1}{N}\sum(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{N}\sum(x_i^2-2x_i\bar{x}+\bar{x}^2) \qquad (3.10)$$

爲了方便，在這裏以及以下各節，總和符號的上下限都省略，除了特別聲明外，這個符號都是從 $i=1$ 到N的總和。同樣地，把各項分開

$$\sigma^2=\frac{1}{N}\sum x_i-\frac{1}{N}\sum 2x_i\bar{x}+\frac{1}{N}\sum\bar{x}^2 \qquad (3.11)$$

式中的第二項每一項都有一個$2\bar{x}$的因數，可以提到總和符號外面。在這裏用到式（3.2）的定義

$$-\frac{1}{N}\sum 2x_i\bar{x}=-\frac{1}{N}(2\bar{x})\sum x_i=-2\bar{x}^2 \qquad (3.12)$$

更進一步，式（3.11）的第三項共有N項，每一項均爲$\bar{x}^2$，所以整項的總和爲$\bar{x}^2$。因此整個式子成爲

$$\sigma^2=\frac{1}{N}x_i^2-\bar{x}^2=\frac{1}{N}\sum x_i^2-\left(\frac{1}{N}\sum x_i\right)^2 \qquad (3.13)$$

必須注意的是一般$\sum(x_i^2)$與$(\sum x_i)^2$都不相等。不相信的話，可以展開看看。

下表是一個例子用來說明如何計算平均值，離差絕對值的平均值與該組觀測的標準差。在這裏$N=6$，

i	x_i，吋	d_i，吋	d_i^2，（吋）^{2}
1	0.251	0.001	0.000001
2	0.248	−0.002	0.000004
3	0.250	0.000	0.000000
4	0.249	−0.001	0.000001
5	0.250	0.000	0.000000
6	0.252	0.002	0.000004
$\sum x_i=1.500$吋		$\sum\lvert d_i\rvert=0.006$吋	$\sum d_i^2=0.000010$吋^2
$\bar{x}_i=1/6\sum x_i$		$\alpha=1/6\sum\lvert d_i\rvert$	$\sigma=\sqrt{1/6\sum d_i^2}$
$=0.2500$吋		$=0.001$吋	$=0.0013$吋

如同第二節對相對誤差所下的定義，我們也用相對標準差，即標準差與平均值的比值 σ/x ，或是用百分標準差（ $\sigma/\bar{x}$ ）$\times 100\%$ 。在上面的例子，相對標準差為 0.5 %，注意這個相對標準差永遠是個純數目（即沒有單位），因為它是兩個相同單位數目的比值。

如果 x_i 的權值為 w_i ，那麼要計算 x_i 的加權平均值時， 平均離差與標準差的定義必須稍加修正。在以後，將詳細討論如何去計算加權平均的標準差。在第十三節將介紹平均值之標準差概念，第十三節即介紹誤差的擴展分析，有了這些，我們討論起來比較容易。未讀到這幾節以前，在某些重要的情況下，我們也會涉及指定某數目加權的技巧。

習　題

1. 自然對數的底數 e 的值大約為

$$e = 2.7182\ 8182\ 8459\ 0452\ 3536$$

而用無窮級數展開

$$e = 1 + 1/1 + 1/1\cdot 2 + 1/1\cdot 2\cdot 3 + 1/1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 + \cdots$$

試求 e 以下列方法表示所得的相對誤差

a. 取級數的前三項。

b. 取級數的前五項。

2. π 的數值約為

$$\pi = 3.1415\ 9265\ 3589\ 7932\ 3846$$

試求出 π 以下列近似值表示所得的相對誤差

a. 22/7。

b. 355/113。

3. 有一個不準確的汽車速率表，當實際速率為 60 哩 / 小時 ，讀數為 65 哩 / 小時。當 80 哩 / 小時，讀數為 90 哩 / 小時 。請問其相對誤差是隨速率的增加而增加或是減少？

4. 在第 3 題，如果誤差的改變與速率成正比，那麼誤差為零時的速率是多少？又如果相對誤差也是與速率成正比，是不是也有相同的結果？

5. 有一汽車活塞的正確直徑是 3.000 吋，如果它的汽缸內徑增加為 3.060 吋，同時也換了一個較大的活塞，那麼這個活塞移動的體積大約增加

了多少分數？

6．普通的文具用紙稱爲20磅紙，因爲尺寸爲 17×22 吋的紙一令（500張）總重爲20磅。如果紙的每個尺寸都增加1/16吋，那麼一令紙的總重量增加多少？

7．一靜止粒子的質量爲 m_0，當它以速度 v 移動時，由相對論它的外表質量 $m=m_0(1-v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$，$c$ 是光速，$c=3\times10^8$ 公尺／秒。試問當一電子的速度變成下列各數值時，它的質量對靜止質量的改變分數是多少？

a．3×10^4 公尺／秒。

b．3×10^7 公尺／秒。

8．有時接近1的數目的次方可以用二項定定理展開比較方便，例如

$$\begin{aligned}(1.01)^2 &= (1+0.01)^2 = 1+2(0.01)+(0.01)^2\\ &= 1+0.02+0.0001\\ &\cong 1.02\end{aligned}$$

誤差大約是 $0.0001/1.0201\cong0.01\%$。試證如果 $\delta<<1$，那麼 $(1+\delta)^n\cong1+n\delta$，而其誤差約爲 $1/2n(n-1)\delta^2$。

9．用第8題的結果可得出 $(A+\delta)^n\cong A^n+n\delta A^{n-1}$ 祇有在 $\delta<<A$ 時才成立，那麼相對誤差是多少？

10．用第8題的方法求出下列近似值

a．$(1.001)^3$

b．$1/0.998$

c．$\sqrt{1.004}$

11．用一根米尺來量 a 與 b 的長度，每個的可能誤差爲每吋0.1公分，得出的結果 $a=50.0$ 公分，$b=55.0$ 公分。試問

a．$(a+b)$ 與 $(a-b)$ 的最大誤差是多少？

b．$(a+b)$ 與 $(a-b)$ 的最大相對誤差是多少？

12．有一「正切電流計」的電流是與電流計指針偏轉角度的正切函數成正比，也就是 $I=C\tan\theta$，如果度量 θ 時的誤差爲已知，試求下列條件下的 θ 值

a．I 的誤差爲最小。

b．I 的相對誤差爲最小。

13．求重力加速度 g 值時，可以用一個單擺的周期 T 與它們的擺長 l 以 $T=2\pi\sqrt{l/g}$ 的關係求出。如果我們觀測的周期是2秒，觀測的誤差是