

310
51191
T. 1

653324

高师函授教材

数学分析

(上册)

成都科学技术大学图书馆

基本藏书

吉林人民出版社

高师函授教材

数 学 分 析

(上 册)

东北三省函授教材 编
“数学分析”协编组

吉 林 人 民 出 版 社

高 师 函 授 教 材

数 学 分 析

(上 册)

东北三省函授教材

“数学分析”协编组

编

*

吉林人民出版社出版 吉林省新华书店发行

长春新华附属厂印刷

*

787×1092毫米32开本 印张 $11\frac{1}{8}$ 235,000字

1982年7月第1版 1982年7月第1次印刷

印数: 1-25,320册

书号: 13091.122 定价: 0.98元

说 明

本讲义是根据东北三省高师函授教育协作会议精神编写的。讲义的编写大纲经过了三省有关同志的审查讨论，具有师范院校数学专业本科水平。三省函授教材编写组决定，由吉林省函授学院阎邦正同志执笔编写。初稿形成后，三省有关同志又进行审阅，作了修改。

本书在贯彻理论联系实际原则的同时，比较重视基础理论和基本方法的讲述。在编写中力求作到：知识阐述上，由感性到理性，由浅入深，通俗易懂；推理运算上，注重启发思路，总结规律，交代要领；例题选配上，数量较多，典型性较强；每章之后编入一定数量的巩固性习题。这是一套适用于中学教师、科技干部和知识青年进行自学的讲义。

东北三省高师函授教材协作编写组

一九七九年十二月

7A1283/106

目 录

第一章 函数	1
§ 1—1 绝对值.....	1
§ 1—2 变量.....	4
§ 1—3 函数的概念.....	8
§ 1—4 函数表示法.....	15
§ 1—5 函数的几种特性.....	18
§ 1—6 反函数.....	25
§ 1—7 复合函数.....	30
§ 1—8 基本初等函数.....	32
习题.....	40
第二章 极限	43
§ 2—1 数列极限的概念.....	43
§ 2—2 数列极限的性质和运算.....	61
§ 2—3 极限存在判别法·实数 e	75
§ 2—4 函数极限的概念.....	86
§ 2—5 无穷小量和无穷大量.....	109
§ 2—6 极限运算法则·两个重要极限.....	114
§ 2—7 无穷小量的比较.....	127
习题.....	134
第三章 函数的连续性	137
§ 3—1 函数连续的概念.....	137
§ 3—2 函数的间断点.....	146

§ 3—3	初等函数的连续性	150
§ 3—4	闭区间上连续函数的性质	157
	习题	163
第四章	导数与微分	166
§ 4—1	非均匀变化的变化率问题	166
§ 4—2	导数的概念	171
§ 4—3	求导法则和基本初等函数的导数	182
§ 4—4	隐函数的导数·由参数方程所表 示的函数的导数	213
§ 4—5	微分的概念	219
§ 4—6	微分的运算	223
§ 4—7	微分在近似计算中的应用	227
§ 4—8	高阶导数与高阶微分	232
	习题	244
第五章	中值定理与泰勒公式	248
§ 5—1	中值定理	248
§ 5—2	不定式的定值法	258
§ 5—3	泰勒公式	271
	习题	282
第六章	导数的应用	284
§ 6—1	函数的增减性	284
§ 6—2	极值	288
§ 6—3	函数作图	304
§ 6—4	曲线的曲率和曲率圆	319
§ 6—5	方程的近似解	330
	习题	336

附录：习题答案	338
第一章.....	338
第二章.....	339
第三章.....	340
第四章.....	342
第五章.....	345
第六章.....	346

第一章 函 数

客观世界的事物都是互相联系互相制约的，物质世界的这种规律在数学中就表现为量与量之间的依赖关系——即所说的函数关系。函数是数学分析所研究的主要对象，这一章把有关函数的一些基本知识讲一讲，作为我们学习数学分析这门课程的开始。

§ 1.1 绝 对 值

数学分析经常用到有关实数绝对值的一些知识，这里介绍一下。

数学分析中所用的数，如无特殊声明，都是指的实数。全体实数组成的集合称为实数系（集）。实数分为有理数和无理数两大类。有理数包括正负整数，正负分数和零，正整数也称自然数。除去有理数以外，其余的实数，都叫无理数，例如 $\sqrt{2}$ ， $\sqrt{3}$ ， $1+\sqrt{5}$ ， $\sqrt[3]{2}$ 以及圆周率 π 等等，都是无理数。总之，无限不循环小数，称为无理数。

把一些实数放在一起构成一个集合，称为数集。实数系是一个数集，同样，全体有理数也构成一个数集，称为有理数集，全体自然数也构成一个数集，称为自然数集。由于实数和数轴上的点是一一对应的，所以实数集就和数轴上一个点集相对应。今后我们将对实数集和数轴上的点集不加区别，即把数集和它在数轴上对应的点集看成是同一个东西，比如，我们既可以说数 a 也可以说点 a 。

一、绝对值概念 任何实数都有绝对值，定义如下：

某数 a 的绝对值，当 a 是正数或零时，就是它本身，当 a 是负数时，则是它的相反数 $-a$ 。

实数 a 的绝对值记为 $|a|$ ，根据上述定义，便有

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{当 } a \geq 0 \\ -a, & \text{当 } a < 0 \end{cases}$$

按绝对值定义，对于任一实数 a ，显然存在如下的性质：

$|a| \geq 0$ ， $|-a| = |a|$ ， $\sqrt{a^2} = |a|$ ， $-|a| \leq a \leq |a|$ 。这些性质都常利用。

由于实数可以用数轴上的点来表示，在几何上， $|a|$ ($|a| = |a-0|$) 就是代表 a 的那个点与原点（记为0）的距离。于是 $|x-a|$ 便是数轴上的点 x 与点 a 的距离，例如 $|x-3|$ 是数轴上的点 x 与点 3 的距离，而 $|x+2|$ 则是数轴上的点 x 与点 -2 的距离。

一组等价不等式 下面介绍今后常用的一组等价不等式。

不等式

$$|x-x_0| \leq k (k > 0) \quad (1)$$

与 $-k \leq x-x_0 \leq k$,

$$\text{即与 } x_0 - k \leq x \leq x_0 + k \quad (2)$$

是等价的，其中 k 和 x_0 是常数。

(1) 与 (2) 的等价关系从几何上看是比较明显的。因为 $|x-x_0| \leq k$ 表示动点 x 与定点 x_0 的距离不超过 k (就图1—1考虑)，从而动点 x 在点 $x_0 - k$ 与点 $x_0 + k$ 之间，即 $x_0 - k \leq x \leq x_0 + k$ 。显然，从这个结果也容易反推回去。

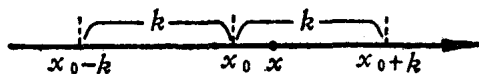


图 1—1

如果 $x_0 = 0$ ，即点 x_0 是原点，便得到上述等价关系的特殊情形，即

$$|x| \leq k$$

与

$$-k \leq x \leq k$$

是等价的。

二、绝对值的运算性质 下面主要介绍两个绝对值不等式，同时也把中学代数里的两个绝对值等式写在这里。这几个公式都关系到绝对值的运算。

(1) 和的绝对值不大于（小于或等于）各数绝对值的和，即

$$|a + b + \cdots + k| \leq |a| + |b| + \cdots + |k|$$

证明：因

$$-|a| \leq a \leq |a|$$

$$-|b| \leq b \leq |b|$$

.....

$$-|k| \leq k \leq |k|$$

逐项相加，得

$$-(|a| + |b| + \cdots + |k|) \leq a + b + \cdots + k \leq |a| + |b| + \cdots + |k|$$

从而

$$|a + b + \cdots + k| \leq |a| + |b| + \cdots + |k|$$

推论 代数式的绝对值不大于各数绝对值的和，即

$$|a \pm b \pm \cdots \pm k| \leq |a| + |b| + \cdots + |k|$$

(i) 二数差的绝对值不小于(大于或等于)各数绝对值的差, 即

$$|a - b| \geq |a| - |b|$$

证明 因

$$|a| = |(a - b) + b|$$

由上面性质(i)有

$$|(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|$$

于是 $|a| \leq |a - b| + |b|$

移项得

$$|a - b| \geq |a| - |b|$$

推论 $|a + b| \geq |a| - |b|$

事实上, $|a + b| = |a - (-b)| \geq |a| - |-b| = |a| - |b|$

(iii) 乘积的绝对值等于各数绝对值的乘积, 即

$$|ab \cdots k| = |a| \cdot |b| \cdots |k|$$

若 $a = b = \cdots = k,$

则有 $|a^n| = |a|^n$

(iv) 商的绝对值等于被除数的绝对值与除数的绝对值的商, 即

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} (b \neq 0)$$

根据乘法与除法定义, 上面两个等式显然成立。

§ 1.2 变 量

数学分析就其更广泛的意义, 可以说是研究变量理论的一门科学, 因此它的第一个基本概念就是变量的概念。初等

数学所研究的对象，主要是不变的量（即常量）和图形。当由初等数学转向高等数学的学习，首先经常要以运动变化的观点去研究各种变量的变化状态，我们应当迅速地把这种观点树立起来。下面就来讲讲变量与常量的概念。

一、变量与常量 当我们观察各种自然现象或技术过程时，经常遇到各种各样的量。例如在研究物体自由降落时，需要考虑物体降落的速度，经过的时间，降落的距离；在考察气体的加热过程时，要注意气体的温度、压力、体积等等。诸如此类的一些量，就其物理属性来看，虽然并不一样，但却存在着共同点：任何量都是通过一系列数值来表现的。各种物理量的这种共同点，便是变量这个概念的来源。

当我们把一个密闭容器内的气体加热时，气体的体积保持常值，气体分子的个数也保持一定；但是相反地，气体的温度和压力便取得越来越大的数值。又如观察飞机的飞行，便要碰到更多不同的量，其中有的量在飞行过程中保持常值，比如乘客的人数，行李的重量，机翼的长度等；但是还有更多的量时时刻刻在起变化，诸如飞机的航程，机体距地面的高度，油的储存量，周围空气的压力等等，这些量都随时间的推移而取不同的值。所谓变量就是变化着的量，可以变动的量，说得详细一点，就是在某一过程中可以取得不同数值的量。

定义 在某一过程中，取不同数值的量叫做变量，保持同一数值的量叫做常量。

变量与常量并不是绝对的，在一定条件下可以转化。如果变量的变化微不足道，并不影响我们的结论时，也可以把变量当作常量来处理。例如重力加速度本来是随着纬度和高

度而变的，但在地面附近的局部地区，由于纬度和高度变化很小，就可以认为重力加速度是常量。然而在发射人造卫星时，就必须考虑重力加速度的差别，把它当成真正的变量。

常量一般地用开头几个拉丁字母如 a, b, c 等表示，变量常用末尾的几个字母如 x, y, z, u, v 等表示。应注意的是，任何一个字母本身并没有指明这个量究竟是常量还是变量，因此当我们利用字母表示量时，一般的应当说明它所代表的是常量还是变量。

数学中所说的量既然是指量的数值，因而可以用数轴上的点来表示量。如果 a 是常量，则用以表示这个量的 a 点就是一个定点；如果 a 是变量，则用以表示这个量的 a 点就要视为动点。

二、区间和邻域 变量所取的每一个值都是一个数，所有这些数的全体便构成变量的变化范围，也称为变量的**变域**。在许多情形下，变量的变域是一个区间。下面先来介绍区间的概念，然后介绍邻域。

(一) 有限区间 以相异二数（点）为端点的全体实数（点），称为有限区间，这两个数（点）称为区间的端点，它们可以属于区间，也可以不属于区间。按端点是否属于区间，分为以下三种情形。

(1) 闭区间 设 a 和 b 为二实数，且 $a < b$ ，满足不等式

$$a \leq x \leq b$$

的实数全体，称为闭区间，用符号 $[a, b]$ 表示。

显然闭区间的两个端点都属于区间， a 是左端点（最小的数）， b 是右端点（最大的数）。几何表示如图1—2。

(ii) 开区间 满足不等式

$$a < x < b$$

的实数全体, 称为开区间, 用符号 (a, b) ① 表示。

开区间的两个端点都不属于区间, 因此对于开区间来说, 它既没有最左边的点 (即最小数), 也没有最右边的点 (即最大数)。可见开区间的每一点都是区间内部的点。几何表示如图1—3。

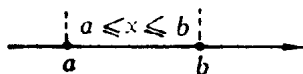


图 1—2

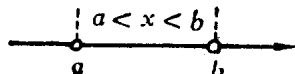


图 1—3

(iii) 半开区间 满足不等式

$$a < x \leq b \text{ 或 } a \leq x < b$$

的实数全体, 称为半开区间, 前者称左半开区间, 后者称右半开区间, 依次用符号 $(a, b]$, $[a, b)$ 表示。

(二) 无穷区间 无穷区间有以下几种情形。

满足不等式 $a \leq x < +\infty$ ② 的实数全体, 用符号 $[a, +\infty)$ 表示。类似地有:

$[a, +\infty)$, 表示满足 $a \leq x < +\infty$ 的实数 x 全体,

$(a, +\infty)$, 表示满足 $a < x < +\infty$ 的实数 x 全体,

$(-\infty, b]$, 表示满足 $-\infty < x \leq b$ 的实数 x 全体,

$(-\infty, b)$, 表示满足 $-\infty < x < b$ 的实数 x 全体,

① 闭区间符号用方括号 $[]$, 开区间符号用圆括号 $()$, 要避免混淆。例如: 闭区间 $(2, 5)$, 开区间 $(2, 3)$ 。

② 符号“ ∞ ”读作无穷大, “ $+\infty$ ”, “ $-\infty$ ”依次读作正无穷大, 负无穷大。关于无穷大的概念将在第二章介绍。

$(-\infty, +\infty)$ 表示全体实数, 即满足 $-\infty < x < +\infty$ 的实数 x 全体。

(三) **邻域** 邻域就是一个开区间, 不过它是以开区间的中点 (称为中心) 为标准来考虑的概念。

定义 以点 a 为中心, 长度等于 2δ 的开区间, 称为点 a 的 δ 邻域, 点 a 称为**邻域中心**, δ 称为**邻域半径**。

换句话说: 数轴上与点 a 的距离小于 δ 的所有点的集合, 就是点 a 的 δ 邻域。

点 a 的 δ 邻域, 用不等式表示为 $|x - a| < \delta$ (即 $a - \delta < x < a + \delta$); 用符号表示为 $(a - \delta, a + \delta)$ 或 $(a - \delta, a + \delta)$, 几何表示如图 1-4。

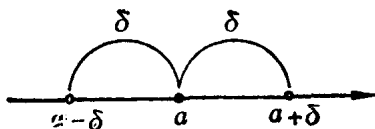


图 1-4

§ 1.3 函数的概念

一、函数的定义 在同一现象或技术过程中所存在的各种量, 通常并不是彼此孤立地在那里变化, 一般说来, 它们之间总是存在一定的依赖关系, 而且其中有的关系还是相当精确的。客观世界量与量之间的这种依赖关系, 就是函数概念的实际背景。我们先看几个例子。

例 1 质量一定的气体, 在一定温度下, 它的压力 P 与体积 V 的关系是

$$P = \frac{K}{V}$$

这里 K 是一个物理常数。

现在假定体积 V 经历着由 5 到 10 的增大过程，于是在这个过程中，体积 V 和压力 P 都是变量。并且在闭区间 $[5, 10]$ 上对 V 每指定一个值，则 P 都有唯一的一个对应值（比如令 $V = 7$ ，则 $P = \frac{K}{7}$ ），因而上面公式给出了这两个变量之间所存在的一种精确的依赖关系。

例 2 真空中自由落体下落的距离 S 和经过的时间 t 都是变量，它们的关系由公式

$$S = \frac{1}{2}gt^2$$

所给定，其中 g 代表重力加速度，是一常数。

假定物体开始降落的时刻 $t = 0$ ，着地时刻为 $t = T$ ，则 t 的变化范围是 $0 \leq t \leq T$ ；并且当 t 在闭区间 $[0, T]$ 上每取一值时， S 都有唯一的一个值与之对立。

例 3 在边长为 1 的正方形的四角上，切去四个边长为 x 的小正方形（图 1—5），然后作成是一个高度为 x 的盒子。令这个盒子的容积为 V ，则容积与高度的关系显然是

$$V = x(1 - 2x)^2$$

现在设想 x 经历一个在 0 与 $\frac{1}{2}$ 之间的增大过程，则 x 和 V 都是变量，并且当 x 在区间 $(0, \frac{1}{2})$ 内每取定一值时， V 总存在一个确定的对应值。

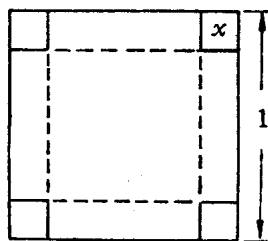


图 1—5

例 4 水文站统计了某河流在 40 年内的平均月流量 v 如

下表:

月 份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
平均月流量 v (亿立方米)	0.39	0.30	0.75	0.44	0.35	0.72	4.3	4.4	1.8	1.0	0.72	0.50

从表看出, 在平均月流量 v 与月份 t 之间存在着明确的对应关系。当月份 t 每取一个值, 由表即可找出平均月流量 v 的对应值。

上述各例, 就其具体意义而言, 有物理的, 有几何的, 也有统计学上的, 如果抛开各自的具体意义, 就其共同的本质的来看, 参与同一过程的两个变量之间则是互相依赖的, 而且这种依赖关系最主要的是体现了这样一个事实: 只要第一个变量在它的变域内取定了某一个数值, 那么第二个变量就存在一个确定的对应值。至于这两个变量之间的关系表达, 则既可以是一个鲜明的公式, 也可以是一个数值表。函数的概念也正是从变量之间的这样一种本质属性抽象出来的。

定义 设在某一过程中有两个变量 x 和 y , 变量 x 的变域为 D 。如果对于 D 中的每一个值 x , 根据某种对应关系, y 都有唯一确定的值和它对应, 则称变量 y 是变量 x 的函数, 记为

$$y = f(x)$$

x 称为**自变量**, y 称为**因变量**。

根据上述定义, 我们回顾一下前面的例子, 自然可以这样说:

定量气体的压力 P 是体积 V 的函数,

自由落体的下落距离 S 是经过时间 t 的函数。