高等医药院校试用教材

物理学教程

WULIXUE JIAOCHENG

主　编/顾柏平

大学出版社

426

高等医药院校试用教材

物理学教程

（供中医、中西医结合、中药、制药、药理、制剂、针灸、推拿、护理、中医工程等专业使用）

主　编　顾柏平（南京中医药大学）

东南大学出版社
·南京·

内容提要

本书是依据卫生部制定的高等中医药院校医药及相关专业的物理学课程的教学大纲，并结合近几年来各院校的专业设置和教学实践，由全国多所中医药院校共同协作编写而成的。全书共13章，包括了力学、热学、光学、电学和量子物理等经典物理和近代物理的内容。

本书重视基本概念和基本理论的阐述，在保证基本理论体系的前提下，注重理论联系实际，力求反映物理成就在医药上的应用成果。全书内容重点突出，深入浅出，叙述简练。本书主要作为全国高等中医药院校医药及相关专业的物理学课程的教材，也可作为其他院校相关教师及科研人员的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

物理学教程/顾柏平主编. 一南京：东南大学出版社，2002.8

ISBN 7-81089-014-X

Ⅰ.物...　Ⅱ.顾...　Ⅲ.物理学一中医学院一教材　Ⅳ.O4

中国版本图书馆(CIP)数据核字(2002)第046954号

东南大学出版社出版发行
(南京四牌楼2号　邮编210096)
出版人：宋增民
江苏省新华书店经销　　南京五四印刷厂印刷
开本：787mm×1092mm　1/16　印张：17.5　字数：437千字
2002年8月第1版　2002年8月第1次印刷
印数：1—8000册　定价：23.80元

(凡因印装质量问题，可直接向发行科调换。电话：025—3792327)

前　言

本书是一本供全国高等中医药院校医药及相关专业使用的物理学教材。该书主要依据卫生部制定的高等中医药院校医药专业的物理学课程的教学大纲,根据各院校现有专业设置的实际情况和多年的教学实践,结合当今科技发展趋势和对学生综合素质的要求,由全国多所中医药院校教师共同编写而成。

全书共有13章,内容包括力学、热学、电学、光学和量子力学等经典物理学和近代物理学的内容。各院校可根据不同的教学层次,不同专业的教学时数对教学内容进行选择。

在编写过程中,我们重视对基本概念和基本理论的阐述,在保证理论的系统性和完整性的同时,特别注重其应用性,力求反映物理成就在医药研究中的应用,以拓展学生的知识视野,培养学生的学习兴趣,提高学生学习物理的积极性和主动性。

在本书编写过程中,我们得到了各相关兄弟院校的各级领导和同行专家们的大力支持和帮助,在此一并表示感谢。

由于编者水平有限,加之时间仓促,书中难免有错误和不妥之处,恳请广大师生和读者批评指正。

编　者

2002年8月

目　　录

1 刚体的转动

物体的运动往往是很复杂的，只有当物体的形状和大小与所研究的问题无关时，物体才可以被当作质点来处理。例如，汽车沿公路运动，可以被看作质点的运动。但是，如果要研究汽车轮子的转动，轮子就不能简单地被看作质点。实际上，在许多问题中，物体的运动是直接与其形状、大小有关的。比如，大到地球的自转、小到原子及原子核的转动（称之为自旋）等等，这时，物体就再也不能被看作为质点了。

在外力作用下，物体总要或多或少地发生一些形变。但在某些问题中，物体的形状和大小变化很小，可以忽略。这样，我们就可以引入刚体这一理想模型。所谓**刚体**，是指无论在多大的外力作用下，其形状和大小都不发生任何变化的物体。因此，刚体上任意两点之间的距离永远不变。

平动和定轴转动是刚体最简单和最基本的两种运动形式。刚体的任何运动都可以看成是其质心的平动和绕通过质心轴转动的合成。当刚体运动时，如果刚体上任意一条直线在各个时刻的位置始终彼此平行，这种运动称为**平动**。根据平动的定义可以得出，刚体做平动时，其上各点的运动情况是完全相同的。知道了刚体上任一点（比如质点）的运动，整个刚体的运动情况也就知道了。因此，做平动的刚体可以被当作质点来处理，描述质点运动的各种物理量，如速度、加速度等等，以及质点力学的规律都适用于描述刚体的平动。本章主要讨论刚体定轴转动的描述方式和它所遵循的力学规律。

1.1 刚体定轴转动的描述

刚体运动时，如果刚体的各个质点在运动中都绕同一根直线做圆周运动，这种运动称为转动，这一根直线称为转动轴（简称转轴）。其转轴固定不动的转动称为**定轴转动**。比如，电动机的转子的转动就是定轴转动。定轴转动是刚体最简单的一种转动形式。

刚体定轴转动具有如下特点：

(1) 除转轴上的点以外，刚体上其他各个质点都绕转轴做圆周运动，但各个质点做圆周运动的半径不一定相等。

(2) 各质点做圆周运动的平面垂直于轴线，圆心是该平面与轴线的交点。

(3) 各质点与圆心的连线，在相同时间内转过的角度是相同的，因此，只需要一个独立的转角（变量）就可以确定刚体的位置。

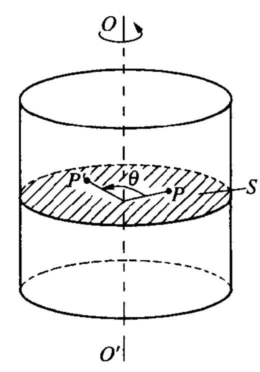


图 1 - 1 刚体转动的描述

如图 1 - 1 所示，根据定轴转动的特点，在描写刚体的转动时，通常取任意一个垂直于定轴 OO' 的平面 S 作为转动平面；再根据转动平面的运动情况，就可以确定整个刚体的运动情况。当刚体做定轴转动时，转动平面上各点的线量，比如位移、速度和加速度等，各不相同，显然仅用这些物理量来描述刚体的运动

情况是不够的，也是不适用的。因此，必须引进角量来对转动的刚体做整体的描述，比如角位移、角速度和角加速度等。

1.1.1 角坐标与角位移

研究转动平面上任意一点 P。如图 1-2 所示，假定规定水平向左为参考方向，则从圆心 O 到 P 点的连线，即为 P 点的**矢径**；而矢径与参考方向的夹角 θ 称为**角坐标**，它是描写刚体位置的一个变量。当选取不同的参考方向时，角坐标的值也不同。通常规定：以参考方向为准，矢径 $\boldsymbol{r}$ 沿逆时针方向旋转，角坐标为正($\theta>0$)；矢径 $\boldsymbol{r}$ 沿顺时针方向旋转，角坐标为负($\theta<0$)。刚体做定轴转动时，其角坐标 θ 将随时间而变，函数 $\theta = f(t)$ 就是其运动方程。角坐标的单位是弧度(rad)。

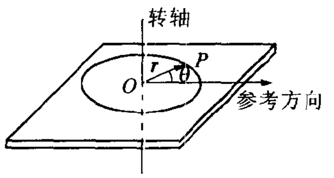


图 1-2 角坐标

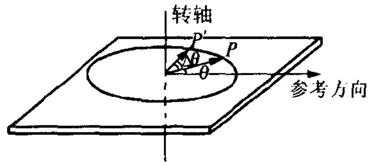


图 1-3 角位移

如图 1-3 所示，设 t 时刻质点在 P 点，角坐标为 θ；在 $t+\Delta t$ 时刻，质点到达 P' 点，角坐标为 $\theta+\Delta\theta$，则角坐标的增量 $\Delta\theta$ 称为**角位移**。

角位移是一个矢量，其大小就等于矢径 $\boldsymbol{r}$ 转过的角度；对于定轴转动来说，由于只有逆时针、顺时针两个转动方向，因而角位移的方向可用正负号表示，一般规定沿逆时针方向转动的角位移为正，沿顺时针方向转动的角位移为负。角位移的单位也是弧度(rad)。

1.1.2 角速度

为了描述刚体转动的快慢，引进角速度的概念。设刚体在 $t \sim t+\Delta t$ 时间内的角位移为 $\Delta\theta$，则角位移与所用时间之比称为刚体在这段时间 Δt 内的**平均角速度**，用 $\bar{\omega}$ 表示，即

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{1-1}$$

当 $\Delta t \to 0$ 时，平均角速度的极限值称为 t 时刻的**瞬时角速度**，用 ω 表示，即

$$\omega = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{1-2}$$

角速度的单位为弧度/秒(rad/s)。

角速度是矢量，其大小由式(1-1)和式(1-2)确定，方向则由**右手螺旋法则**确定：将右手拇指伸直，其余四指弯曲，使右手螺旋转动的方向与刚体的转动方向一致，这时拇指的方向就是角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向，如图1-4所示。当刚体同时参与多个转动时，其总角速度是各分转动的角速度的矢量和。

在任意相等的时间内，如果刚体转过的角位移都相等，或 $\boldsymbol{\omega}$ 始终不变，那么这种转动称为匀速转动。

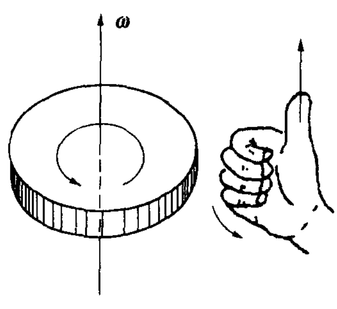


图 1-4 右手螺旋法则

1.1.3 角加速度

刚体在 t 时刻的角速度为 $\boldsymbol{\omega}_0$，在 $t+\Delta t$ 时刻的角速度为 $\boldsymbol{\omega}$，则角速度的增量 $\Delta\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\omega}_0$ 与时间 Δt 之比，称为在 Δt 这段时间内刚体转动的**平均角加速度**，用 $\bar{\boldsymbol{\beta}}$ 表示，即

$$\bar{\boldsymbol{\beta}}=\frac{\Delta\boldsymbol{\omega}}{\Delta t} \tag{1-3}$$

取 Δt 趋近于零的极限值，得到

$$\boldsymbol{\beta}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{\omega}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \tag{1-4}$$

$\boldsymbol{\beta}$ 称为在 t 时刻刚体转动的**瞬时角加速度**，简称**角加速度**。对匀速转动，$\boldsymbol{\beta}=0$。角加速度的单位是弧度/秒^2（$\mathrm{rad/s^2}$）。

角加速度 $\boldsymbol{\beta}$ 也是矢量，依 $\boldsymbol{\beta}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}$ 定义，$\boldsymbol{\beta}$ 的方向与 $\boldsymbol{\omega}$ 的变化情况有关；对于定轴转动，当刚体转动加快时 $\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{\omega}$ 方向相同，当刚体转动减慢时 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\omega}$ 方向相反。

刚体做匀速和匀变速转动时，用角量表示的运动方程与质点做匀速直线运动和匀变速直线运动的运动方程极其相似。匀速转动（$\boldsymbol{\beta}=0$）的运动方程为

$$\theta=\theta_0+\omega t \tag{1-5}$$

匀变速转动（$\boldsymbol{\beta}$ 不变）的运动方程为

$$\begin{aligned}\omega&=\omega_0+\beta t\\ \theta&=\theta_0+\omega t+\frac{1}{2}\beta t^2\\ \omega^2&=\omega_0^2+2\beta(\theta-\theta_0)\end{aligned} \tag{1-6}$$

式中 θ、θ_0、ω、ω_0 和 β 分别表示角坐标、初角坐标、角速度、初角速度和角加速度的大小。

1.1.4 角量与线量的关系

在研究刚体转动时通常把描写质点运动的物理量叫**线量**，描写刚体转动的物理量叫做**角量**。定轴转动刚体上的每个质点（轴线上的点除外）都做圆周运动。所以，从描写质点运动的角度来说，用的是线量；从描写整个刚体转动的角度来说，用的是角量。因此，角量与线量之间必然有一定的关系。

如图 1-5 所示，刚体在 Δt 时间内角位移为 $\Delta\theta$，P 点在这段时间内的位移为 Δs，当 Δt 极小时，弦长可以认为等于弧长，所以有

$$\mathrm{d}s=r\mathrm{d}\theta$$

两边除以 $\mathrm{d}t$，则得

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{1-7}$$

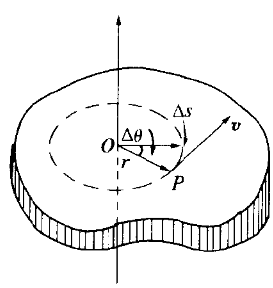


图 1-5 线量与角量的关系

而 $v=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$，$\omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$，所以上式改写为

$$v = r\omega \tag{1-8}$$

写成矢量形式为

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \tag{1-9}$$

将(1－8)式两边对 t 求导数，由于 r 是恒量，故得

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \tag{1-10}$$

即

$$a_t = r\beta \tag{1-11}$$

这就是切向加速度 a_t 与角加速度 β 之间的关系式。把 $v=r\omega$ 代入向心加速度的公式 $a_C=v^2/r$，可得到

$$a_C = v\omega = r\omega^2 \tag{1-12}$$

这就是向心加速度 a_C 与角速度 ω 之间的关系式。

1.2 转动动能 转动惯量

1.2.1 转动动能

刚体可以看成是由许多质元所组成的，而每个质元又近似地看作为质点。设各质点的质量分别为 Δm_1、Δm_2、…、Δm_n，各质点与转轴的距离分别为 r_1、r_2、…、r_n。当刚体绕定轴转动时，各质点的角速度 ω 相等，但线速度各不相同。

设第 i 个质点的线速度为 $\boldsymbol{v}_i$，其大小为 $v_i = r_i\omega$，则相应的动能为

$$\Delta E_{Ki} = \frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\Delta m_i r_i^2\omega^2 \tag{1-13}$$

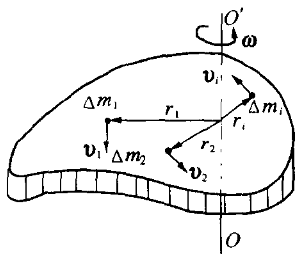


图 1－6 刚体转动惯量

整个刚体的动能是所有各质点的动能之和，即

$$\begin{aligned} E_K &= \frac{1}{2}\Delta m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}\Delta m_2 v_2^2 + \cdots + \frac{1}{2}\Delta m_n v_n^2 \\ &= \frac{1}{2}\Delta m_1 r_1^2\omega^2 + \frac{1}{2}\Delta m_2 r_2^2\omega^2 + \cdots + \frac{1}{2}\Delta m_n r_n^2\omega^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\Delta m_i r_i^2\omega^2 \end{aligned} \tag{1-14}$$

因 $\frac{\omega^2}{2}$ 对各质点都相同，可从括号内提出，所以刚体转动动能为

$$E_K = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i r_i^2\right)\omega^2 \tag{1-15}$$

式(1－15)中括号内的量常用 I 来表示，称为刚体对给定转轴的**转动惯量**，因此刚体的转动动能 (1-16)

$$E_K = \frac{1}{2} I\omega^2 \tag{1-16}$$

式中
$$I = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_i^2 \tag{1-17}$$

1.2.2 转动惯量

由式(1－17)可知转动惯量等于刚体中每个质点的质量与这一质点到转轴的距离平方的乘积之和,即所有质点的质量与其转动半径的平方的乘积之和。把转动动能与平动动能公式相比较可知,转动惯量对应于平动的惯性质量,它是刚体转动时转动惯性大小的量度。转动惯量的单位是千克·米^2($kg \cdot m^2$)。

对于质量连续体分布的刚体,式(1－17)则应写成积分形式

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dV \tag{1-18}$$

式中,dV 为体元的体积(m^3);dm 为体元的质量(kg);ρ 为体元处的质量体密度($kg \cdot m^{-3}$);r 为体元与转轴之间的距离(m)。

对于质量连续面分布的刚体,式(1－17)则应写成积分形式

$$I = \int r^2 \sigma dS \tag{1-19}$$

式中,dS 为面元的面积(m^2);dm 为面元的质量(kg);σ 为面元处的质量面密度($kg \cdot m^{-2}$);r 为面元与转轴之间的距离(m)。

对于质量连续线分布的刚体,式(1－17)则应写成积分形式

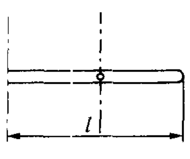
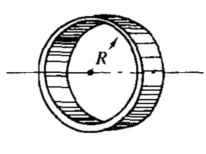
$$I = \int r^2 \lambda dl \tag{1-20}$$

式中,dl 为线元的长度(m);dm 为线元的质量(kg);λ 为线元处的质量线密度($kg \cdot m^{-1}$);r 为线元与转轴之间的距离(m)。

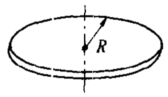
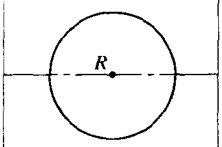
从转动惯量的定义可以看出,刚体的转动惯量与下列因素有关:① 与刚体的质量有关,一般来说质量大的转动惯量大。② 在质量一定的情况下,还与质量的分布有关,同质量的刚体的形状、大小和各部的密度有关。③ 转动惯量与转轴的位置有关,例如同一均匀细长棒,对于通过棒的中心并与棒垂直的转轴和通过棒的一端并与棒垂直的另一转轴,转动惯量是不相同的,后者较大。所以只有指出刚体对某一转轴的转动惯量才有明确意义。

几种形状简单、密度均匀的物体对不同转轴的转动惯量,如表 1－1 所示。

表 1－1 几种特殊形状的物体的转动惯量

物体	转轴	图示	转动惯量	物体	转轴	图示	转动惯量
细杆(质量 m、长度 l)	(a) 过中心垂直杆身		$\frac{1}{12}ml^2$	圆环(质量 m、半径 R)	(a) 过中心与环面垂直		mR^2
	(b) 过一端垂直杆身		$\frac{1}{3}ml^2$		(b) 沿一直径(不计宽度)		$\frac{1}{2}mR^2$

续表 1-1

物 体	转 轴	图 示	转动惯量	物 体	转 轴	图 示	转动惯量
薄圆盘（质量 m、半径 R）	(a) 过中心垂直盘面		$\frac{1}{2}mR^2$	圆 球（质量 m、半径 R）	沿一直径		$\frac{2}{5}mR^2$
	(b) 沿一直径		$\frac{1}{4}mR^2$				

1.2.3 平行轴定理

如图 1-7 所示，刚体对任意一根转轴 Oz 的转动惯量 I 与对通过其质心的平行轴 Cz' 的转动惯量 I_C 之间有如下关系：

$$I = I_C + mh^2 \qquad (1-21)$$

式中，m 为刚体的总质量(kg)；h 为两平行轴之间的距离(m)。式(1-21)称为**平行轴定理**。应用该定理可以很方便地求出刚体绕与通过其质心的转轴相平行的任意一根转轴的转动惯量。

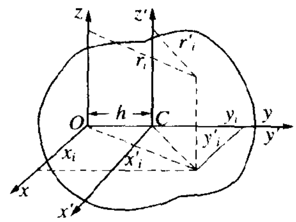


图 1-7 平行轴定理

1.2.4 正交轴定理

设有一簿板状刚体，通过其上面任一点 O 画坐标轴，z 轴垂直于板面，x、y 轴在板面内，如图 1-8 所示，则

$$\begin{aligned} I_z &= \sum(\Delta m_i r_i^2) = \sum \Delta m_i (x_i^2 + y_i^2) \\ &= I_x + I_y \end{aligned} \qquad (1-22)$$

式中，$I_x = \sum \Delta m_i x_i^2$；$I_y = \sum \Delta m_i y_i^2$。式(1-22)称为**正交轴定理**，它表明簿板状刚体对板面内两相互垂直轴的转动惯量之和，等于该刚体对通过该两轴之交点且垂直于板面的轴的转动惯量。

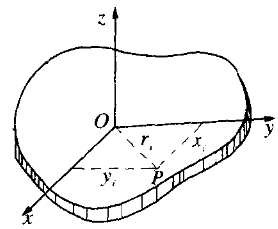


图 1-8 正交轴定理

1.2.5 转动惯量的叠加性

如 1-9 所示，刚体由两球 A、C 及细杆 B 组成，它对转轴 OO' 的转动惯量为 I，根据式(1-17)很容易得到

$$I = I_A + I_B + I_C \qquad (1-23)$$

式中，I_A、I_B和 I_C分别是 A、B 和 C 对转轴 OO' 的转动惯量。上式表明，由几部分物体组成的刚体对转轴的转动惯量，等于其各部分物体对同一轴的转动惯量之和。这一特性，是利用实验方法来测定特殊形状的物体的转动惯量的基本依据。

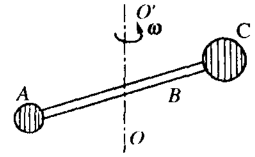


图 1-9 转动惯量叠加性

【例 1-1】 如图 1-10 所示，质量为 m、长为 l 的均匀细棒绕离质心 C 为 h 的 O 点且垂直于棒的轴转动，求该棒的转动惯量。

【解】 沿细棒取坐标轴 Ox，使原点 O 位于转轴处。在细棒上坐标为 x 的地方取一长为 dx 的质元，其质量为 $dm=\lambda dx$，其中 $\lambda=m/l$ 为细棒的质量线密度。根据转动惯量的定义，细棒对 O 处垂直轴的转动惯量为

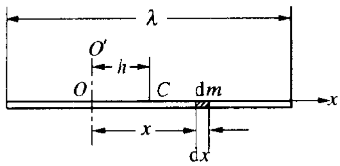


图 1-10 均匀细棒的转动

$$I=\int_{-\frac{l}{2}+h}^{\frac{l}{2}+h} x^2\lambda dx=\frac{1}{3}\lambda\left(\frac{l}{2}+h\right)^3-\frac{1}{3}\lambda\left(-\frac{l}{2}-h\right)^3$$

$$=\frac{\lambda l^3}{12}+\lambda l h^2=\frac{1}{12}ml^2+mh^2$$

$$=I_C+mh^2$$

上式与平行轴定理一致。如果转轴通过棒的中心且与棒垂直，则 $h=0$，$I=ml^2/12$；如果转轴通过棒的一端且与棒垂直，则 $h=l/2$，$I=ml^2/3$。

【例 1-2】 如图 1-11 所示为质量 m，半径为 R 的均匀薄圆盘，求其绕通过盘心且垂直于盘面的轴的转动惯量。

【解】 设圆盘质量面密度为 σ，$\sigma=m/\pi R^2$，取半径为 r，宽为 dr 的细圆环作为质量元 dm，$dm=\sigma dS=(m/\pi R^2)2\pi r dr$，所以质量元对转轴的转动惯量 dI 为

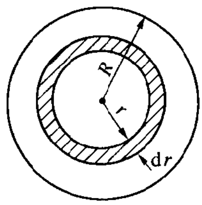


图 1-11 均匀薄圆盘

$$dI=r^2 dm=\frac{m}{\pi R^2}2\pi r^3 dr$$

于是，圆盘对给定轴的转动惯量 I 为

$$I=\int_0^R\frac{m}{\pi R^2}2\pi r^3 dr=\frac{2m}{R^2}\int_0^R r^3 dr=\frac{1}{2}mR^2$$

【例 1-3】 如图 1-12 所示，两小球的质量分别为 m_1 和 m_2 分别连在一根质量为 M、长为 $2l$ 的均匀刚性细棒的两头，整体绕通过中心 O 的垂直轴转动，求在下列情况时，刚体总的转动惯量：(1)不计小球的大小；(2)小球的半径分别为 r_1 和 r_2。

【解】 该问题应用转动惯量的叠加性和平行轴定理来求解。

(1) 两小球 m_1 和 m_2 绕轴的转动惯量分别为

$$I_1=m_1l^2,\ I_2=m_2l^2$$

棒的转动惯量为

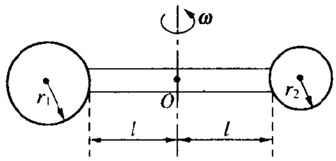


图 1-12 转动惯量的叠加

$$I_C=\frac{Ml^2}{3}$$

总的转动惯量为

$$I=I_1+I_2+I_C=m_1l^2+m_2l^2+\frac{1}{3}Ml^2$$

(2) 计入小球的大小后，首先应用平行轴定理求出各小球对轴的转动惯量

$$I_1=I_{C1}+m_1(l+r_1)^2=\frac{2m_1r_1^2}{5}+m_1(l+r_1)^2$$

$$
\begin{aligned}
I_2 &= I_{C2} + m_2(r_2 + l)^2 \\
&= \frac{2m_2 r_2^2}{5} + m_2(r_2 + l)^2
\end{aligned}
$$

再应用转动惯量的叠加性求出总的转动惯量为

$$
\begin{aligned}
I &= I_1 + I_2 + I_C \\
&= \frac{2m_1 r_1^2}{5} + m_1(l + r_1)^2 \\
&\quad + \frac{2m_2 r_2^2}{5} + m_2(l + r_2)^2 + \frac{Ml^2}{3}
\end{aligned}
$$

1.3 转动定律

1.3.1 力矩

要使原来静止的刚体以某一角速度转动，或者使转动的刚体改变其角速度，则必须对刚体施加外力矩。设刚体所受外力 $\boldsymbol{F}$ 在垂直于转轴 OO' 的平面内，如图 1－13(a)所示，力的作用线和转轴之间的垂直距离 d 称为力对转轴的力臂。力和力臂的乘积称为力对转轴的**力矩**，用 M 表示，即

$$M=Fd$$

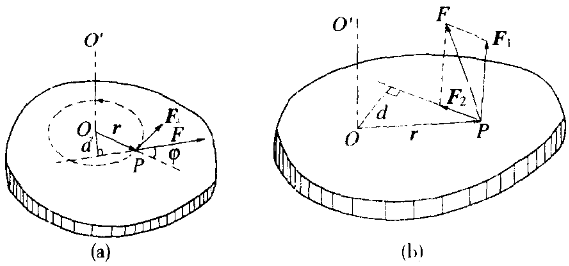


图 1－13　力　矩

设力的作用点为 P，P 点至转轴 OO' 的垂直距离为 d，相应的矢径为 $\boldsymbol{r}$。从图 1－13(a)可知，$d = r\sin\varphi$，φ 角是力 $\boldsymbol{F}$ 与矢径 $\boldsymbol{r}$ 之间的夹角($\boldsymbol{F}_{\perp}$ 与矢径 $\boldsymbol{r}$ 垂直)，所以上式也可写成

$$M = Fr\sin\varphi = rF_{\perp} \qquad (1-24)$$

可见，力对转轴 OO' 的力矩也等于从转轴到该力作用点的距离 r 和该力垂直于矢径 $\boldsymbol{r}$ 的分量的乘积。

力矩是矢量，它的大小由式(1－24)确定，它的方向可按右手螺旋法则确定，即让右手四指沿矢径 $\boldsymbol{r}$ 的方向，经过小于平角的角度转到力 $\boldsymbol{F}$ 的方向，此时拇指的方向就是力矩 $\boldsymbol{M}$ 的方向。那么将式(1－24)改写成矢量式，即

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \qquad (1-25)$$

如果刚体所受的作用力不在垂直于转轴的平面内，那就必须把外力分解为两个互相垂

直的分力，一个是与转轴平行的分力 $\boldsymbol{F}_1$，它不能使物体转动；另一个是与转轴垂直的分力 $\boldsymbol{F}_2$，它才能使物体转动。如图 1－13(b)所示。力矩的单位为米·牛顿(m·N)。

1.3.2 转动定律

刚体运动的动力学规律可以在牛顿运动定律的基础上演绎和推导出来。

图 1－14 表示一个绕垂直于纸面过 O 点且绕 Oz 轴转动的刚体，t 时刻的角加速度为 $\boldsymbol{\beta}$，P_i 为构成刚体的任一质点在 t 时刻所经过的位置，质点的质量为 Δm_i，P_i 点离转轴的距离为 r_i，相应的矢径为 $\boldsymbol{r}_i$。设刚体绕轴转动的角速度和角加速度分别为 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$，此时质点 P_i 所受外力为 $\boldsymbol{F}_i$，内力 $\boldsymbol{f}_i$(刚体中其他各质点对质点 P 所施作用力的合力)。设 $\boldsymbol{F}_i$、$\boldsymbol{f}_i$ 都在转动平面内且与 $\boldsymbol{r}_i$ 的夹角分别为 φ_i 和 θ_i。根据牛顿第二定律，可得

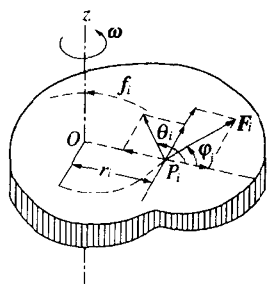


图 1－14 转动定律推导

$$\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{f}_i = (\Delta m_i)\boldsymbol{a}_i \qquad (1-26)$$

式中的 $\boldsymbol{a}_i$ 是质点 P_i 的加速度(m/s^2)。质点 P_i 绕转轴做圆周运动，可把力和加速度都沿径向和切向分解。由于径向力的方向是通过转轴的，其力矩为零，对转动无影响，因此，可不予考虑。切向分量的方程如下

$$F_i\sin\varphi_i + f_i\sin\theta_i = (\Delta m_i)a_{it} = (\Delta m_i)r_i\beta \qquad (1-27)$$

式中 $a_{it}=r_i\beta$ 是质点 P 的切向加速度。式左边表示质点 P_i 所受的切向力。在式的两边各乘以 r_i 可得到

$$F_ir_i\sin\varphi_i + f_ir_i\sin\theta_i = (\Delta m_i)a_{it} = (\Delta m_i)r_i\beta \qquad (1-28)$$

可见左边第一项是外力 $\boldsymbol{F}_i$ 对转轴的力矩。

同理，对刚体中全部质点都可写出类似的方程。把这些式子全部相加，则有

$$\sum_i F_ir_i\sin\varphi_i + \sum_i f_ir_i\sin\theta_i = (\sum_i \Delta m_ir_i^2)\beta \qquad (1-29)$$

上式与力 $\boldsymbol{f}_i$ 相关的项表示内力对转轴的力矩的代数和，而内力总是成对出现的，每一对都是大小相同、方向相反、力臂相同，所以该项等于零，即

$$\sum_i f_ir_i\sin\theta_i = 0 \qquad (1-30)$$

于是，得

$$\sum_i F_ir_i\sin\varphi_i = (\sum_i \Delta m_ir_i^2)\beta \qquad (1-31)$$

式(1－31)的左边是刚体所有质点受的外力对转轴力矩的代数和，称为**合外力矩**，用 M 表示；式(1－31)右边的 $\sum_i \Delta m_ir_i^2$ 是转动惯量 I。于是，式(1－31)可写成为

$$M=I\beta \qquad (1-32)$$

此式表明，刚体做定轴转动时，刚体的角加速度和它所受合外力矩成正比，与它的转动惯量成反比(M、I、β 都是对同一根转轴而言)，这一关系称为**转动定律**。它体现了转动的规

律性，是刚体动力学的一个基本方程式。

用矢量式表示时，转动定律可写作为

$$\boldsymbol{M} = I\boldsymbol{\beta} = I\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \tag{1-33}$$

【例 1-4】 如图 1-15 所示，一只均匀圆盘，半径为 R，质量为 m，使它通过中心与盘面垂直的转轴转动，在盘边缘上施拉力 T，求此圆盘的角加速度及圆盘边缘上切向加速度（摩擦力不计）。

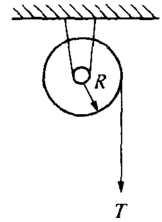


图 1-15 定轴转动

【解】 依题意圆盘的转动惯量 $I = mR^2/2$，力矩 $M = TR$，把这两个关系式代入式(1-32)中，则得下面等式

$$TR = \frac{1}{2}mR^2\beta$$

于是求得圆盘的角加速度为

$$\beta = \frac{2T}{mR}$$

圆盘的切向加速度为

$$a_t = R\beta = \frac{2T}{m}$$

【例 1-5】 复摆。如图 1-16 所示，设质量为 m 的复摆绕通过某点 O 与摆面垂直的水平转轴做微小摆动（也称振动），求运动方程及摆动周期。($\theta < 5°$)

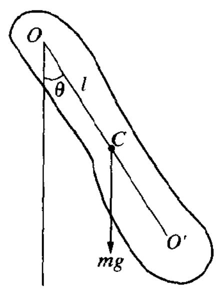


图 1-16 复摆

【解】 该图代表复摆中包含质心 C 的一个截面，O 是悬点，O、C 距离为 l，绕过 O 点轴的转动惯量为 I_o，根据转动定律得到

$$-mgl\sin\theta = I_o\beta$$

因为 $\theta < 5°$，所以 $\sin\theta \sim \theta$；根据定义，$\beta = \mathrm{d}\theta^2/\mathrm{d}t^2$，得到运动方程

$$\frac{\mathrm{d}\theta^2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{mgl\theta}{I_o} = 0$$

解此方程得到

$$\theta = \theta_0\cos\left(\frac{mglt}{I_o} + \alpha\right)$$

式中，θ_0 为摆幅（即振幅）；α 为初位相；它们由初始条件决定，有关内容请参见第 10 章。