现代分析引论

XIANDAI FENXIYINLUN

邱曙熙 编著

厦门大学出版社

现代分析引论

XIANDAIFENXIYINLUN

邱曙熙 编著

厦门大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

现代分析引论/邱曙熙编著. —厦门:厦门大学出版社,2002.8
ISBN 7-5615-1929-X

Ⅰ.现… Ⅱ.邱… Ⅲ.数学分析-高等学校-教材 Ⅳ.O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 037068 号

厦门大学出版社出版发行
(地址:厦门大学 邮编:361005)
http://www.xmupress.com
xmup@public.xm.fj.cn
三明地质印刷厂印刷
2002 年 9 月第 1 版 2002 年 9 月第 1 次印刷
开本:850×1168 1/32 印张:11.5
插页:2 字数:283 千字
定价:20.00 元

引　言

分析(数学)是研究分析运算——代数运算和极限运算之综合——的数学学科，换言之，分析结构是代数结构和拓扑结构的综合。因此，编写本书既要涉及到一些代数，也要涉及到一些拓扑，而且还不能不涉及到集论的公理系统，至少到目前为此，它是现代数学最基本的命题，缺了它就不能建立严格的数学理论。本书所涉及的内容大多是19世纪末至20世纪40年代间建立起来的。读者可以通过它学习到分析学科的基础知识。

本书是供数学专业人员阅读的。考虑到作为研究生教材，显然此书无法在一学期内授完，因而教师可以按具体情况对教材进行取舍。

本书具有如下特点：一是起点低，适当介绍一些本科知识，以保持逻辑的完整性，并且为专业基础程度不齐的学员提供方便；二是尽可能保持各章节的相对独立性(这样难免发生个别概念在不同地方出现的现象)，以便教材的取舍(例如对第五章广义函数，可以不讲§1拓扑线性空间而直接从§2广义函数的概念和基本性质开始讲授)；三是介绍一些略为专门化的知识以供参考(例如连续函数与拓扑空间的紧致化)；四是对有些在国内一般的数学书籍中较少系统见到的知识进行详细论述，以供查阅(例如实数之有理区间套的定义、半连续函数等)。

本书是作者在为厦门大学数学系研究生多年来讲授《现代分析》课程的基础上编写而成的。编者在授课过程中深深体会到厦门大学数学系老一辈教授在分析学科方面有着较深的造诣，特别是已故的张鸣镛教授(作者的恩师)和厉则治教授，他们的著作对本

书的编写不仅有着直接的影响，而且部分内容还在本书中出现。比如本书第一章公理化集论是编者从张鸣镛教授的《现代分析基础》一书中摘录修改而成的，而第三章线性代数是编者取材于张鸣镛教授的授课讲义。

本书的编写得到作者所在单位厦门大学数学系领导的支持，编者在此表示衷心的谢意。

鉴于作者的水平有限，错误在所难免，敬请赐教。

编　者

常用符号

A^C	集 A 的余集
$A\backslash B := \{x \mid x\in A, x\overline{\in} B\}$	集 A 关于集 B 的差集
$B_a(\rho)$	度量空间中以 a 为中心以 $\rho>0$ 为半径的开球
$C^m(E)\quad(0\leqslant m\leqslant\infty)$	集 E 上具有直至 m 阶连续偏导的函数全体；$C(E)=C^0(E)$
$C_C^m(E)\quad(0\leqslant m\leqslant\infty)$	支集在 E 中紧致的 $C^m(E)$ 类函数全体；$C_C(E)=C_C^0(E)$
∂D	集 D 的边界
$\overline{D}$、$\mathrm{Cl}(D)$	集 D 的闭包，即 $\overline{D}=D\cup\partial D$
$\mathrm{Ext}(E)$	集 E 的外部
$\mathscr{F}^+ := \{f\in\mathscr{F} \mid f\geqslant 0\}$	函数类 $\mathscr{F}$ 中的非负元素全体
$G\ni x\to a$	$x\in G$ 且 $x\to a$
$\mathrm{Int}(E)$、E°	集 E 的内部
$\mathfrak{M}^+ := \{\mu\in\mathfrak{M} \mid \mu\geqslant 0\}$	测度类 $\mathfrak{M}$ 中的非负元素全体
$\mathrm{mes}(A)$、$\mathrm{m}(A)$	集 A 的 Lebesgue 测度
$\mathbf{N}$	自然数全体
$\omega := \{0\}\cup\mathbf{N}$	非负整数全体，有限序数全体
$O(a,\rho)$	复平面上以 a 为心以 $\rho>0$ 为半径的开圆盘
$L^p := L^p(X,\mu,\mathscr{R})$	L^p 空间，p 次可积函数全体
$\mathbf{Re}\ z$	复数 z 的实部
$\mathbf{Im}\ z$	复数 z 的虚部

$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \mid f(x) \neq 0\}}$	函数或广义函数等的支集
$\omega^n := \omega \times \omega \times \cdots \times \omega$ (n 个)	n(多)重指标全体所成之集
$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \overline{\in} A, \end{cases}$	集 A 的特征函数
$\lVert \cdot \rVert_p$, $0 < p \leqslant \infty$	L^p 空间的范数
$\square$	表示“证毕”
§1.2.3	表示“§1 的第 2.3 小节”
$:=$	表示“定义”，例如“$P := Q$”表示：P 定义为 Q，或 P 记为 Q；或 Q 定义为 P，或 Q 记为 P

目　　录

第一章　公理化集论

集论是G. Cantor在19世纪70年代开创的. 当初，他所谓的“集”指的无非是“集体”的意思，是一个日常用语而不是一个严格的数学名词. 但是他利用“集”的概念，通过严密的逻辑推理获得了一些用常规数学方法所不能获得的重大成果. 例如他令人信服地证明了超越数不仅存在，而且比代数数多得多. 这使集论风靡了整个数学界，也使集论的语言流行于数学的各个分支，大家逐渐习惯用“集”来为其他数学概念下定义. 久而久之，一些原先并非“集体”的概念也用“集”来代替.

现在，“集”和“属于”已经成了最基本的数学概念. 其他一切数学概念都可以用这两个概念定义，一切数学命题都可以表示成关于这两个概念的逻辑式子. 因此，集论成了整个数学的最基础的部分. 但是充当数学基础以后，集论却一再暴露严重的逻辑缺陷. 首先是定义问题. “集”和“属于”可以用来说明其他数学概念，但按照传统定义方式，它们本身当然不能用自己定义. G. Cantor是用非数学的语言说明“集”这个概念的，不过他的定义经不起精密推敲. 大家不久就发现，他的定义引起不能容许的混乱(参看§1.3.B. A. W. Russell悖论).

为避免引起混乱，D. Hilbert根据他确立几何基础的成功经验，倡议用公理系统代替集的定义. 接着，1908年E. Zermelo提出了第一个公理系统. 于是集论进入公理化的时期. 公理集论的根据可以概括如下：集论定理并非每个都需要从集和属于的定义出

发来证明，事实上只有少数最基本的定理才需要这样做，其他定理都可以从这些基本定理推理得到. 因此，只要假设这少数最基本的定理成立，全部集论的定理就都可以得到证明了. 这少数最基本的定理就是公理，公理本身作为假设当然没有必要证明. 不但这样，"集"和"属于"的定义也变成不必要了，因为"公理系统"已经起着定义的作用：凡是满足这些公理的才是集，不满足的就不能算集. 公理化集论就是用这种方式避免了传统定义法的缺点.

必需指出，**集合的概念是不可严格定义的数学概念之一**，这是因为集论公理系统并不是完美无缺的(参看§2.7). 不过到目前为止，人们还没有发现集论基础的缺陷威胁到常规数学的成立，所以我们仍然认为：公理化集论是整个数学的最基础部分.