SHUXUE
WULI
FANGFA

（研究生用）

数学物理方法

郭玉翠／编著

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

数学物理方法

（研究生用）

郭玉翠 编著

北京邮电大学出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法/郭玉翠编著.—北京:北京邮电大学出版社,2002
ISBN 7-5635-0665-9

Ⅰ.数… Ⅱ.郭… Ⅲ.数学物理方法 Ⅳ.0411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 084513 号

出 版 者: 北京邮电大学出版社(北京市海淀区西土城路 10 号)
邮编:100876 (发行部)电话:62282185 传真:62283578
电子信箱: publish@bupt.edu.cn
经 销: 各地新华书店
印 刷: 北京源海印刷有限责任公司
印 数: 1—3000 册
开 本: 850 mm×1168 mm 1/32
印 张: 12.875
字 数: 332 千字
版 次: 2003 年 1 月第 1 版 2003 年 1 月第 1 次印刷

ISBN 7-5635-0665-9/O·41 定 价: 23.00 元

· 如有质量问题请与北京邮电大学出版社发行部联系 ·

内　容　提　要

本书从理论到实例都考虑了电子、通讯类各专业的特点，兼顾数学理论的严谨性和物理背景的鲜明性，体现了数学物理方法作为数学应用于其他科学的桥梁作用。

本书内容包括数学物理定解问题的常用解法（分离变量法、行波法、积分变换法，格林函数法和变分法等）；特殊函数（着重是贝塞尔函数和勒让德函数）的理论和应用；场论基础和积分方程的基本理论，共分九章，每章后配有习题。

本书可以作为高等学校工科硕士研究生的教材，也可供对这门课程要求较高专业的本科生使用，或作为教学参考书。

前　言

本教材为通讯、电子、电磁场及应用物理类硕士研究生学习数学物理方法这门课程而编写，也可作为应用数学及应用物理等对这门课程有较高要求的专业的本科生使用或作为教学参考书。

本书的特点或称区别于大多数同类教材之处在于：一、充分考虑通讯、电子类及相关专业研究生的培养目标及相关课程的设置情况，在确保理论体系完整和概念正确的前提下，加强实际背景的阐述和分析；二、注重物理思想和数学方法、手段之间的有机联系和依存关系，注重物理思想的建立，同时兼顾数学上的严谨与玄妙，不仅讲知识，更强调讲方法，充分体现数学物理方法作为数学联系其他自然科学和技术领域最重要桥梁之一的作用，培养学生综合利用数学知识解决实际问题的能力；三、体现科学的新进展，这一点一般在基础课中很难做到，本书力图加强数学物理近代方法的成分，以适应科学发展和计算机广泛普及的需要。

数学物理方法历来以内容多而杂，题目难而繁而著称，教好和学好这门课程都不是容易的事。作者的初衷是写一本好的教材以帮助教师教好、学生学好这门课，但由于水平有限，不足乃至错误

在所难免，敬请读者不吝赐教。

本书的编写与完成，得到赵启松教授多方面的鼓励与帮助，编者对赵老师深表敬意和谢意；本书的出版，得到北京邮电大学教材出版基金的资助，在此编者对北京邮电大学教材出版基金委员会，北京邮电大学教务处及其北京邮电大学出版社给予的关怀与支持深表感谢；北京师范大学彭芳麟教授和北方交通大学李文博教授审阅了全书，并提出了许多宝贵意见，在此一并表示深深的感激。

编　者

2002 年 12 月

目　录

第二章　数学物理定解问题

第三章　分离变量法

第四章　二阶常微分方程的级数解法　本征值问题

第五章　特殊函数

第六章　行波法与积分变换法

第七章　Green 函数法

第八章 变分法

第九章 积分方程的一般性质和解法

第一章　场　论　初　步

§1.1　梯度、散度与旋度在正交曲线坐标系中的表达式

一、直角坐标系下的“三度”及 Hamilton 算子

1. 标量场及其梯度

如果对于空间区域 G 内的任一点 M，都有一个确定的数量 $u=u(M)=u(x,y,z)$ 与之对应，则称在这空间区域 G 内确定了一个标量场(如温度场、密度场等)；如果与点 M 相对应的是一个向量 $\boldsymbol{F}(M)$，则称在这空间区域 G 内确定了一个向量场(如力场、速度场、电位场等).

标量场用标量函数 $f(x,y,z)$ 确定；向量场用一个向量函数 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 来确定.

设 $u=u(M)=u(x,y,z)$ 是一个标量场，其梯度定义为

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} u &= \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}\\ &\xlongequal{\text{记为}}\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)u\\ &\xlongequal{\text{记为}}\nabla u \qquad (1.1.1)\end{aligned}$$

其中，$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 为沿直角坐标 x,y,z 方向的单位向量.

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{1.1.2}$$

为(直角坐标系下的)Hamilton 算子，它是一个矢性微分算子，在运算中具有矢量和微分的双重性质.其运算规则是：

$$\nabla u = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{a} &= \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}) \\ &= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{a} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

2. 矢量场的散度

设有矢量场 $\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$，其散度是通过 Gauss 公式定义的.

设有空间区域 Ω，其边界曲面为 Σ(图 1.1.1)，Gauss 公式表示为

$$\begin{aligned}\oiint_{\Sigma} \boldsymbol{a}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} &= \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right)\mathrm{d}v \\ &= \iiint_{\Omega} \mathrm{div}\boldsymbol{a}\,\mathrm{d}v \end{aligned}\tag{1.1.3}$$

等式的左端可解释为单位时间内通过边界 Σ 离开闭区域 Ω 的流体的总质量，在假设流体不可压缩，且流动是稳定的情况下，流体离开 Ω 的同时，Ω 内必须有产生流体的“源头”产生同样多的流体

来进行补充，所以右端可解释为分布在 Ω 内的源头在单位时间内所产生的流体的总量."向外流"——"向外散"，"散度"名字的由来.

故矢量的 $\boldsymbol{a}$ 在 M 点的散度为

$$(\mathrm{div}\boldsymbol{a})_M = \lim_{\Delta v\to 0}\frac{\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\boldsymbol{a}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}}{\Delta v} = \frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_y}{\partial y} = \nabla\cdot\boldsymbol{a} \tag{1.1.4}$$

3. Stokes 公式与旋度

以曲线 L 为边界，所张曲面为 S(图 1.1.2)，则 Stokes 公式表示为

$$\oint_L \boldsymbol{a}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint_s \mathrm{rot}\boldsymbol{a}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

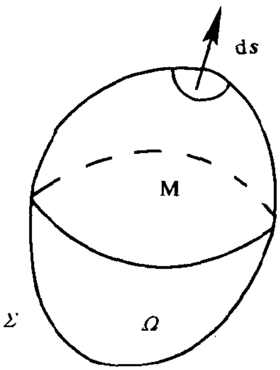

图 1.1.1

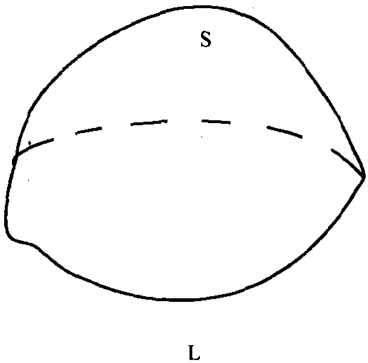

图 1.1.2

即向量场 $\boldsymbol{a}$ 沿着有向闭曲线 L 的环流量等于向量场的旋度场通过 L 所张曲面 S 的通量，即向量场 $\boldsymbol{a}$ 的旋度定义为

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{a} = \left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right),\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right),\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\right]$$

$$\stackrel{\text{记为}}{=\!=}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \nabla \times \boldsymbol{a} \tag{1.1.5}$$

例 1 设电荷 q 位于点(x_0, y_0, z_0)，在其周围电场中任意一点的电场强度为 $\boldsymbol{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$，电势为 $u=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r}$，则 $\boldsymbol{E}=-\nabla u$.

事实上 $\quad \nabla r=\nabla\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$

因而
$$-\nabla u=-\nabla\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\nabla r=\boldsymbol{E}$$

二、正交曲线坐标系下的"三度"

1. 正交曲线坐标系

设有空间曲线坐标系 q_1, q_2, q_3（即空间任意一点与三个有序数建立了一一对应的关系），$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$分别为沿 q_1, q_2, q_3 切线方向的单位矢量(图 1.1.3)，若有关系

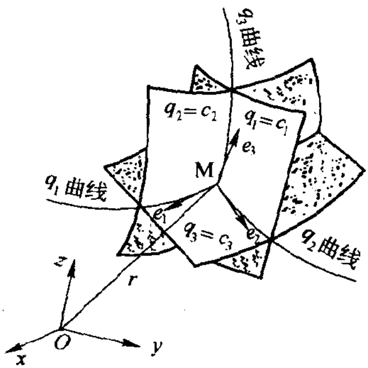

图 1.1.3

$$e_i \cdot e_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (i,j = 1,2,3) \tag{1.1.6}$$

则称 q_1,q_2,q_3 为正交曲线坐标系. q_1,q_2,q_3 与直角坐标系的变换关系为

$$\begin{aligned} x &= x(q_1,q_2,q_3) \\ y &= y(q_1,q_2,q_3) \\ z &= z(q_1,q_2,q_3) \end{aligned} \tag{1.1.7}$$

2. 正交曲线坐标系中的弧微分

现在令空间两点有相同的坐标 q_2,q_3,而另一个坐标 q_1 相差微元 $\mathrm{d}q_1$,则这两点的距离为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s_1 &= \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\mathrm{d}q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\mathrm{d}q_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3}\mathrm{d}q_3\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\mathrm{d}q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}\mathrm{d}q_2 + \frac{\partial y}{\partial q_3}\mathrm{d}q_3\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\mathrm{d}q_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2}\mathrm{d}q_2 + \frac{\partial z}{\partial q_3}\mathrm{d}q_3\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2}\,\mathrm{d}q_1 \\ &= h_1 \mathrm{d}q_1 \end{aligned} \tag{1.1.8}$$

式(1.1.8)称为坐标曲线 q_1 的弧微分. 同理,在有增量 $\mathrm{d}q_2$ 发生,而 q_1,q_3 坐标不变时,坐标曲线 q_2 的弧微分为

$$\mathrm{d}s_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2}\,\mathrm{d}q_2 = h_2 \mathrm{d}q_2 \tag{1.1.9}$$

显然,q_3 的弧微分为

$$\mathrm{d}s_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2}\,\mathrm{d}q_3 = h_3 \mathrm{d}q_3 \tag{1.1.10}$$

h_1,h_2,h_3 称为度规系数.