CONTROL THEORY

浙江大學出版社

国家“九五”重点图书

鲁棒控制理论及应用

现代控制工程丛书

褚健 俞立 苏宏业 著

现代控制工程丛书

国家『九五』重点图书

鲁棒控制理论及应用

褚 健 俞 立 苏宏业 著

浙江大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

鲁棒控制理论及应用 / 褚健,俞立,苏宏业著．—杭州：浙江大学出版社,2000.4
(现代控制工程丛书)
ISBN 7-308-02222-6

Ⅰ．鲁...　Ⅱ．①褚...②俞...③苏...　Ⅲ．鲁棒控制　Ⅳ．TP2739

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 53299 号

出版发行　浙江大学出版社
(杭州浙大路 38 号　邮政编码 310027)
(E-mail:zupress@mail.hz.zj.cn)
责任编辑　张　明
排　　版　浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷　浙江印刷集团公司
经　　销　浙江省新华书店
开　　本　889 mm×1194 mm　1/16
印　　张　12.75
字　　数　326 千字
版、印次　2000 年 4 月第 1 版　2000 年 4 月第 1 次印刷
印　　数　0001—1000
书　　号　ISBN 7-308-02222-6/TP・189
定　　价　25.00 元

内 容 提 要

本书以作者的研究成果为基础，从工程角度出发，系统地介绍了鲁棒控制的概念、理论、设计方法和最新研究成果. 内容包括：鲁棒控制理论的发展过程和现状，鲁棒性分析与综合方法，标准 H_∞ 控制理论和鲁棒 H_∞ 控制系统的分析和设计方法，大系统、离散时间系统和非线性系统的鲁棒控制分析和设计方法.

本书可供从事自动化和自动控制工作的科研人员、工程技术人员以及高等院校有关专业的教师、高年级学生和研究生参考.

前　言

在工业控制领域中，各种工业生产过程、生产设备、运输系统以及其他众多的被控对象，它们的动态特性一般都难以用精确的数学模型进行描述；有时即使能获得被控对象的精确数学模型，但由于过于复杂，利用现有的控制系统设计手段也无法实现，因而不得不进行简化；此外，随着生产过程中工作条件环境变化，控制系统中元器件老化或损坏，被控对象本身的特性也会随之发生变化；众多因素导致所建立的数学模型和实际的被控对象不可避免地存在误差及不确定性．自然地，人们希望有一种控制系统分析和设计方法，能按照已掌握的被控对象的数学模型及关于模型不确定性的某些信息来指导控制系统的分析和设计，使得闭环系统稳定或满足某种性能指标．基于这一思想导致了鲁棒控制问题的产生和发展，并逐渐成为控制理论界和工程应用界的研究重点之一．

鲁棒控制理论所要研究的问题主要可分为两个方面，即控制系统的鲁棒性分析和控制律综合．在分析方面研究的是：当系统存在不确定性和外部干扰时，系统的稳定性和动态性能的分析．在综合方面研究的问题是：当系统存在不确定性和外部干扰时，如何设计有效的控制律使得闭环系统具有更强的鲁棒性．分析是综合的基础，综合是分析的延伸．几十年来鲁棒控制理论主要是围绕这两个方面进行研究和发展的，至今已取得了十分丰富的研究成果．随着当今计算机技术的高速发展、被控对象的日益复杂化和工程界对控制要求的日益提高，使得鲁棒控制理论和应用的研究越来越成为国内外广大科学家和控制工程师共同关注的问题．

本书以作者近年来从事这一领域研究为背景，从工程角度出发，以李雅普诺夫稳定性理论、二次镇定概念、有界实引理和一些相关的线性系统理论为基础和手段，系统地介绍了在时域上基于状态空间描述的不确定系统的鲁棒控制理论和国内外最新研究成果，同时亦介绍了鲁棒控制在工程中的应用例子．行文力求读者可以充分地理解本书的内容，并引起启发和应用．如能达到这一效果，作者会感到十分欣慰．

值此机会，作者衷心感谢国家自然科学基金委员会对本研究工作的关心和支持，书中所介绍的大部分研究成果都是在该基金资助下取得的．浙江大学工业控制技术研究所许多老师和同事多年来对作者的指导和帮助，使作者受益匪浅．古勇、王景成、蒋培刚、郁枫、徐巍华等同志为本书的校对作出了贡献，在此一并表示感谢．

由于作者水平有限，书中难免有不妥和错误之处，恳请读者批评指正．

作　者

1998 年 4 月

目　录

第一章 绪　论

鲁棒性问题是控制系统中的一个具有普遍性的问题. 控制系统的鲁棒性是指系统中存在不确定因素时，系统仍能保持正常工作性能的一种属性.

1.1 引言

对于一个控制系统，无论采用什么样的设计技术，控制器一般总是(但不完全是)基于与被控对象动态行为有关的信息而设计的，这种信息(或称“模型”)可能是脉冲或阶跃响应、传递函数、偏微分方程组，或者简单地就是过程增益和根据操作经验确定的回复时间等等. 但在实际控制工程中，被控对象的精确模型往往难以得到，有时，即使能获得受控对象的精确模型，但也因为过于复杂，在进行控制系统设计时非进行简化不可. 此外，随着系统的工作条件或环境的变化(如化工生产中原料的变化，催化剂活性的变化等)，控制系统中元器件的老化或坏损，被控对象本身的特性也会随之发生变化，从而偏离设计所依据的标称特性，导致系统模型产生误差(有时我们亦称其为不确定性). 从实际应用的角度出发，当然希望按照某种要求，使控制系统对模型的不确定性不那么敏感，或者说控制系统应该具有鲁棒性.

30 年代开始发展起来的古典控制理论(如频率域方法)在一定程度上能较方便地处理单变量控制系统的鲁棒性，尤其是鲁棒稳定性. 如利用 Bode 图进行单变量控制系统综合时，首先确保系统具有一定稳定裕量，使得控制系统对受控对象特性的微小变化(或其模型的微小摄动)具有一定的鲁棒性，然后在经验和经验法则指导下不断迭代修改，直到各种通常互相矛盾的目标达到最好的折衷为止. 这种方法具有明显的试凑性，因此仅限于研究系统存在微小摄动的不确定性情况.

从 50 年代末开始发展起来的现代控制理论(状态空间方法)能较好地解决多变量控制系统的分析和综合问题. 并且已经证明，LQG 状态反馈线性控制系统具有很好的稳定裕度(幅值稳定裕量为 0.5 至∞，相位稳定裕量大于或等于$\pm 60°$)[1]. 然而，LQG 控制系统，甚至是 LQ 最优调节器，对被控对象的摄动(或模型误差)的鲁棒性有时却很差[2,3]. 下面以一个例子的分析来说明这一点[4].

考虑一个单输入单输出的线性系统，被控对象的传递函数为

$$G(s)=\frac{2s+3}{(s+1)(s+2)}$$

其状态空间的最小实现为

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+bu(t),\quad x(0)=x_0\neq 0$$
$$y(t)=C^Tx(t)$$

其中 $y(t)$ 和 $u(t)$ 分别为被控对象的输出和输入，且

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

则根据 LQ 理论，使性能指标

$$J=\int_0^{\infty}[y^2(t)+ru^2(t)]\mathrm{d}t,\quad r>0$$

为最小时的状态反馈控制律为

$$u(t)=-Kx(t)$$
$$K=r^{-1}b^TP$$

其中 P 为如下代数 Riccati 方程的正定解

$$A^TP+PA-r^{-1}Pbb^TP+C^TC=0$$

由上述 A,b,C 的确定值可求得状态反馈矩阵 K 为

$$K=[1+q-\sqrt{5+2q}\quad 2\sqrt{5+2q}-q-4]$$

其中

$$q=\sqrt{4+r^{-1}}$$

容易证明，对于这样构成的状态反馈矩阵 K，如下谱分解方程成立

$$[1+G_0^{\sim}(s)][1+G_0(s)]=1+r^{-1}G^{\sim}(s)G(s)$$

其中

$$G_0(s)=K(sI-A)^{-1}b$$
$$=\frac{(\sqrt{5+2q}-3)s+q-2}{s^2+3s+2}$$
$$G_0^{\sim}(s)=G_0^T(-s)$$

显然，$1+G_0(s)$ 是该系统的回程差函数. 由上述谱分解方程可知

$$|1+G_0(\mathrm{j}\omega)|\geqslant 1,\quad 0\leqslant\omega<\infty$$

因此 $G_0(s)$ 的 Nyquist 轨线到 $(-1,\mathrm{j}0)$ 点的距离总是大于或等于 1，即 $G_0(s)$ 的 Nyquist 轨线不会进入到以 $(-1,\mathrm{j}0)$ 点为圆心，半径为 1 的圆内去. 由此可知，该系统的幅值稳定裕量为 0.5 至 ∞，而相位稳定裕量大于或等于 $\pm 60°$，参见图 1.1.1

假设上述单输入单输出系统具有如下形式的动态摄动(即模型误差)

$$G_P(s)=G(s)+\frac{\varepsilon}{s+1}$$

其中 $G_P(s)$ 是具有模型误差的被控对象传递函数，ε 是一实数. 显然，对于任意实数 $\eta>0$，当 $|\varepsilon|$ 充分小时，总有

$$|G_P(\mathrm{j}\omega)-G(\mathrm{j}\omega)|=\left|\frac{\varepsilon}{1+\mathrm{j}\omega}\right|<\eta,\quad 0\leqslant\omega<\infty$$

上述动态摄动项的状态空间描述可表示为 b 矩阵的摄动

$$b_P=b+\begin{bmatrix}\varepsilon\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+\varepsilon\\1\end{bmatrix}$$

此时对应摄动系统的回程差函数为

$$1+K(sI-A)^{-1}b_P=1+\frac{b_1s+b_0}{(s+1)(s+2)}$$

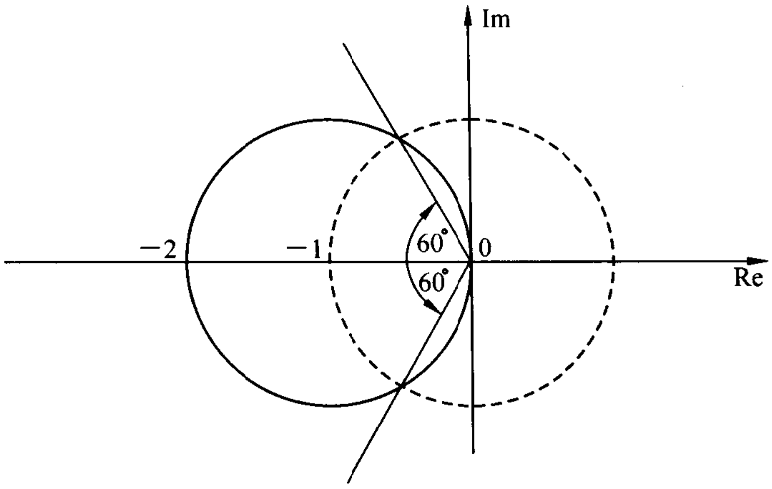

图 1.1.1

其中

$$b_1=\sqrt{5+2q}-3+\varepsilon(q+1-\sqrt{5+2q})$$
$$b_0=q-2+2\varepsilon(q+1-\sqrt{5+2q})$$

对于给定的 ε，当 $r\to 0$ 时

$$b_1=\varepsilon q+O(q)$$
$$b_0=(1+2\varepsilon)q+O(q)$$

其中 $O(q)$表示当 q 趋向于无穷大时，$q^{-1}O(q)$趋于零的项.因此，对于任意给定的 ε，当 $r\to 0$ 时，该系统的闭环极点趋向于如下两实数

$$p_1=-\varepsilon q$$
$$p_2=-\frac{1+2\varepsilon}{\varepsilon}$$

当 $-\frac{1}{2}<\varepsilon<0$ 时，p_1 和 p_2 均为正常数，且$|\varepsilon|$越小，p_2 越大.也就是说，受控对象的微小摄动会使闭环系统具有模很大的正实极点，从而导致系统不稳定.

由上述分析可知，系统的不确定性(模型误差)对控制系统的性能(包括稳定性)具有很大的影响，甚至会使得控制系统崩溃.因此在控制系统的设计过程中，必须充分考虑系统不确定性的影响，研究控制系统的鲁棒性和鲁棒控制问题.

1.2 鲁棒控制理论的历史和发展

关于鲁棒控制问题的最早研究可以追溯到 1927 年 Black 针对具有摄动的精确系统的大增益反馈设计思想.由于当时无法知道反馈增益与控制系统稳定性之间的关系，故基于这一设计思想的控制系统往往是动态不稳定的.直至 Nyquist[5]1932 年提出基于 Nyquist 曲线的频域稳定性判据之后，才使得反馈增益与控制系统动态稳定性之间关系明朗化.进而 Bode[6]于 1945 年讨论了单输入单输出反馈控制系统的鲁棒性，提出利用幅值和相位稳定裕量来得到系统能容忍的不确定性范围，并引入微分灵敏度函数来衡量参数摄动下的系统性能.

60 年代初，Cruz 和 Perkins[7]将单输入单输出系统的灵敏性分析思想推广至多输入多输出系统，并引入灵敏度比较矩阵来衡量闭环和开环系统性能. 这些关于鲁棒控制的早期研究主要局限于系统不确定性是微小参数摄动的情况，属于灵敏性分析的范畴，离工程应用的距离相差甚大. 事实上，实际系统中的参数是不能视为不变或仅具有微小摄动的，系统工作条件和环境的变化、建模的简化处理、降阶近似和非线性系统的线性化等均可描述为相应参数的摄动. 有时被控对象可能存在几个不同的工作状态，当采用同一控制器来控制这种对象时，也可以把由于不同工作状态所对应参数的差别视为系统参数的摄动等. 很显然，这些情况下的系统参数摄动就不仅仅是微小的摄动了，而有可能在较大范围内变化，从而超出基于微分灵敏性分析方法所能解决问题的范畴，导致了面向非微小有界摄动不确定性的现代鲁棒控制理论问题.

从 60 年代以来，通过结合实际工程问题和数学理论，鲁棒控制理论取得了令人瞩目的发展，并已逐步形成具有代表性的三个主要研究方面，即：研究系统传递函数（矩阵）的频率域方法，研究系统特征多项式族的多项式代数方法和研究系统状态方程矩阵族的时域（状态空间）方法. 下面分别从这三个方面讨论不确定性系统鲁棒控制理论的发展过程.

1.2.1 鲁棒控制的频率域方法

基于输入输出传递函数描述的频率域方法是最早发展起来的控制方法. 对于单输入单输出系统，根据 Bode 图或 Nyquist 图可以设计出既有良好动态性能又有一定稳定裕度的控制系统，它是鲁棒控制频率域方法的基础. 而现代鲁棒控制理论的建立与发展在很大程度上可以归功于 60 年代所提出的两个重要结论，一个是 Zames 于 1963 年提出的小增益原理[8]，这一原理是频率域分析非结构不确定性系统鲁棒稳定性的基本工具，在系统鲁棒性分析中具有十分重要的作用，甚至当今研究的一些鲁棒控制方法本质上仍基于这一原理；另一个重要结论就是 Kalman[9]于 1964 年证明了单输入单输出系统线性二次型最优状态反馈控制律（LQ），它具有很好的鲁棒性，即无穷大增益稳定裕量和 60°相位稳定裕量.

70 年代出现了一些多变量频率域鲁棒性分析和鲁棒镇定方法，其代表是 Rosenbrock[10]将经典单输入单输出系统的 Nyquist 稳定性判据推广到了多输入多输出系统，提出了多变量系统的逆 Nyquist 阵列设计方法. Youla 等[11]于 1976 年引入多变量系统传递函数矩阵分式描述方法，为线性多变量系统的频率域分析和综合提供了一种新的方法——多项式矩阵方法. 同时 Youla 和 Kucera[12]等分别独立提出使反馈系统稳定的控制器参数化形式，从而为多变量系统的鲁棒镇定提供了重要工具.

80 年代，Safonov，Zames 和 Doyle 等学者为鲁棒控制理论的发展作出了突出贡献. Safonov[13]把经典频率域分析和设计方法与现代多变量控制方法联系起来，建立了一种新的分析系统稳定性和鲁棒性的方法，它可以对 Lyapunov 稳定性和输入输出稳定性的概念进行完全统一的处理. Safonov 指出，多回路反馈系统闭环稳定的必要条件是：在系统动态特性得以定义的那个空间上，可以找到一个拓扑划分，将它分割成两个互不相交的集合，使得其前向回路的动态关系落在两个集合之一中，而反馈回路的动态关系则落在另一个集合中.

Zames[14]进一步发展了他在 1966 年提出的基于系统输入输出传递函数的稳定性理论. 他不单考虑了系统的稳定性问题，同时利用优化技术来降低系统对不确定性扰动的敏感性，从而首次提出了利用控制系统内某些信号间传递函数（矩阵）的 H_∞ 范数作为优化指标的设计思想. 同时 Zames 还指出，基于状态空间模型的 LQG 设计方法之所以对于参数摄动的鲁棒性不

好，主要是由于 LQG 使用的优化指标是平方积分指标.

自从 Zames 提出控制系统的 H_∞ 优化设计方法以后，有众多的学者投身于 H_∞ 优化设计理论研究，他们发现，很多有关控制系统的鲁棒性分析和综合问题，均可以归纳为标准的 H_∞ 优化设计问题[15]，如鲁棒稳定性、跟踪、鲁棒镇定、加权敏感性和双灵敏度设计等.

H_∞ 控制理论的研究主流可分为两大阶段. 截止 1984 年为第一阶段. 在此阶段，把在控制系统内部稳定的控制器集合中寻求一个传递函数矩阵的 H_∞ 范数最小解的问题，通过镇定控制器的 Youla 参数化，变换成模型匹配或一般距离问题，然后再将其变换为 Nehari 问题来求解. 设计是基于传递函数矩阵的，虽然计算时也采用状态空间描述.

1984～1988 年为第二阶段. 在此阶段，人们不再采用输入输出传递函数矩阵来描述，而直接在状态空间描述上进行设计（虽然 H_∞ 优化设计指标本身是基于输入输出描述的）. 此类方法不仅使设计过程简单，而且所求得的控制器的阶次较低、结构特性明显.

H_∞ 控制理论最大突破是 Doyle 等[16]于 1989 年给出的直接状态空间法. 他们将标准 H_∞ 控制问题归结为两个代数 Riccati 方程的求解问题，并指出 H_∞ 控制器复杂性的上界等于对象的 MicMillan 自由度. 而 Iwasaki 等[17]把 H_∞ 控制问题的求解进一步归结为线性矩阵不等式的求解，从而将 H_∞ 控制问题转化为一个凸优化问题来解决.

H_∞ 优化控制器设计方法有如下几个优点. 首先，鲁棒控制器设计问题被赋予了一个清晰的理论；其次，尽管它回到了输入输出模型，但仍保留了状态空间方法中某些计算上的优点；第三，设计者可以在很大程度上控制由系统产生的频率域响应形状，从而使该方法易被工程师们所接受.

同一时期，Doyle 等[18]以矩阵奇异值为工具，平行推广了单输入单输出系统中的 Bode 设计方法，指出影响系统鲁棒性的关键因素是系统回差矩阵或逆矩阵的奇异值. Postlethwaite 等[19]利用主增益（即奇异值）和主相位的概念研究了多变量系统的稳定裕量，指出系统的主增益相当于单变量系统中的增益. Arkun 等[20]推广了多变量系统的逆 Nyquist 阵列设计方法，提出了鲁棒的逆 Nyquist 阵列设计方法，并讨论了鲁棒对角优势和相应的鲁棒稳定性判据. 鉴于鲁棒的逆 Nyquist 阵列设计方法是单输入单输出系统 Nyquist 设计方法的直接推广，物理概念清晰，因此易为工程技术人员所接受，从而得到广泛应用.

众所周知，鲁棒性是以牺牲系统闭环性能为代价的，为避免针以过分保守的“最坏情况”设计而得到十分保守的设计结果，应将建模的不确定性进行结构化处理，以充分利用其结构信息. 结构奇异值理论（SSV，Structured Singular Value）便是基于这一思路由 Doyle[21]于 1982 年提出的. 这一理论又称为 μ 理论，其主要思想是把系统的确定部分和摄动部分进行关联重构，以隔离所有摄动，转而处理块对角有界摄动问题. 由于 μ 框架与线性分式变换（LFT）的密切关系，该理论随即被用于处理结构不确定的鲁棒性能问题，因为鲁棒性能可通过一假想以不确定性来表达，从而可以将鲁棒性能问题转化为等价的鲁棒稳定性问题. 因此，μ 方法很好地补充了 H_∞ 控制的不足，是一种把性能和鲁棒稳定性结合在一起考虑的分析和设计方法.

从结构奇异值方法的提出至今已有十余年历史，复数摄动情况下的 μ 分析技术已较完善，但 μ 综合方法仍不多见，尽管不乏控制器 μ 综合的实例报道[22,23]，但迄今使用较多的 μ 综合方法仍是 Doyle 提出的 D-K 迭代极小化方法. 由于 D 和 K 的优化并不具有联合凸性，故无法保证上述迭代收敛到全局最优，特别地，对于过程控制来说，μ 综合得到的控制器往往阶数太高，须降阶以后才能投入实施，而降阶使其离全局最优点又远了一步，性能甚至还比不上由

回路成形法得到的控制器. 近年来,已经提出了一些新的 μ 综合方法[24,25],但远没有 μ 分析那样完善,这有待于进一步的研究和发展.

作为鲁棒镇定问题中的一个重要专题——同时镇定问题,自 1982 年提出以来[26],已经得到了很大的发展. 关于同时镇定问题的研究,至今主要有如下几种处理方法:(1)Youla 参数化方法,使用 Youla 插值法构造同时镇定控制器[27,28];(2)把同时镇定问题归结为超越多项式方程的求解问题,利用超越多项式的解来构造同时镇定控制器[29];(3)利用稳定系统逆方法来求解同时镇定控制器[30];(4)局部极点配置方法[31],但这种方法仅能解决某些特殊的多模型问题,而且其构造镇定控制器的分步设计方法不是充要的. 已取得的成果大部分都是在探讨使用一个控制器同时镇定多个对象的充分和必要条件,然而到目前为止,3 个以上对象可同时镇定的充要条件仍未得到,有待进一步地探讨和研究.

1.2.2 鲁棒控制的多项式代数方法

实际上,研究系统特征多项式族鲁棒性的多项式代数方法,是频率域方法中研究时不变不确定系统鲁棒控制问题的一个分支,属于参数鲁棒控制问题. 但由于它主要研究的是有界参数摄动区间多项式矩阵的鲁棒控制问题,并且已形成一类较有特色的方法,故在此用一小节单独阐述.

经典的单输入单输出系统特征多项式稳定性分析方法是著名的 Routh 和 Hurwitz 稳定性判据,仅需对系统的特征多项式系数进行一些简单的运算,就可以判断系统的稳定性,并可用于分析一些较简单的存在有界参数摄动多项式的鲁棒稳定性. 之后,关于参数摄动不确定系统的鲁棒性分析较有成效的结果是 Kharitonov 定理[32],它给出了判别区间多项式族(结构性有界实参数摄动多项式)鲁棒稳定性的顶点判据,它的基本思想是寻找多项式族的一个子集,使得族中所有多项式稳定性可由该子集中多项式的稳定性来保证.

对于区间多项式族

$$K=\{f(s)\mid f(s)=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i s^i,\quad \beta_i\leqslant\alpha_i<\gamma_i\}\subset R^{n+1}$$

构造如下 Kharitonov 多项式

$$\begin{aligned}
K_1(s)&=h_1(s^2)+sg_1(s^2)\\
&=\beta_0+\beta_1 s+\gamma_2 s^2+\gamma_3 s^3+\beta_4 s^4+\beta_5 s^5+\cdots\\
K_2(s)&=h_1(s^2)+sg_2(s^2)\\
&=\beta_0+\gamma_1 s+\gamma_2 s^3+\beta_3 s^3+\beta_4 s^4+\gamma_5 s^5+\cdots\\
K_3(s)&=h_2(s^2)+sg_1(s^2)\\
&=\gamma_0+\beta_1 s+\beta_2 s^2+\gamma_3 s^3+\gamma_4 s^4+\beta_5 s^5+\cdots\\
K_4(s)&=h_2(s^2)+sg_2(s^2)\\
&=\gamma_0+\gamma_1 s+\beta_2 s^2+\beta_3 s^3+\gamma_4 s^4+\gamma_5 s^5+\cdots
\end{aligned}$$

则有如下结果

$$K\subset H \text{ 当且仅当 } K_i\in H,\quad i=1,2,3,4$$

H 表示 Hurwitz 多项式——即连续的稳定多项式全体,这就是著名的 Kharitonov 定理. 以上结果是在实多项式系数空间得到的,对于复多项式,则要检验相应 8 个顶点多项式的稳定性.

随后 Anderson 等[33]进一步给出了 Kharitonov 定理的一些简化形式，主要结论是：分别对于 $n=2,3,4$ 和 5 阶区间多项式族，其判别的顶点多项式数可相应地减少为 1，1，2 和 3，但对于多项式阶数 $n\geqslant 6$ 的情况则无法得到类似的简化结果. 而在离散时间意义下对区间多项式族的稳定性（即 Schur 稳定性）的鲁棒问题，亦已经得到了相应的研究[34]. 结果表明：对于区间多项式族系数空间中的某种超矩形，其顶点多项式的稳定性就保证了全族无穷多个多项式的稳定性.

Kharitonov 定理及相关类似结果的局限性，在于它只讨论了多项式族的 Hurwitz 问题，对于一般的 D 稳定性，困难较大. 这一问题由 Bartlett 等[35]于 1988 年提出的棱边定理得到了很好的解决. 棱边定理的基本思想与 Kharitonov 定理类似，主要用于解决凸多面体多项式族的鲁棒稳定性问题，其主要结论如下：

设 $\Omega\subset R^{n+1}$ 是一多项式多面体，$\sigma:R^{n+1}\to C$ 是多项式的根映射，即 $\sigma(f)=\{z_i\mid f(z_i)=0,i=1,2,\cdots,n\}$，$\sigma(\Omega)$ 是 Ω 在 σ 下的像，E 为 Ω 突出面（棱边）组成的集合，则：

（1） $\partial\{\sigma(\Omega)\}\subset\sigma(E)$；

（2） Ω 为 D 稳定，当且仅当 E 为 D 稳定.

其中 D 为 C 上任意一单连通区域，$\partial\{\}$ 代表对应集的边界集. 其后，Fu 等[36]将棱边定理推广到线性时滞系统.

Kharitonov 定理的另一局限性在于它应用于实际控制系统时的保守性. Kharitonov 定理要求多项式系数满足独立的区间摄动，而对于实际的控制系统，其特征多项式系数通常仅随对象参数摄动，控制器参数则是固定的. 鉴于此，Chapellat 等[37]提出了广义 Kharitonov 定理，给出了前向通道为区间对象的闭环系统鲁棒稳定的充要条件，并且进一步分析了同时具有非线性结构摄动和区间参数摄动的系统鲁棒稳定性，得到了类似于 Kharitonov 定理的顶点判据[38]. 对于比区间模型更为复杂和一般化的凸多面体模型，即传递函数的分子、分母多项式分别属于各自的多项式凸多面体，系数的摄动参数以线性方式进入分子、分母多项式的系数，此时的鲁棒稳定性分析将更具一般性，亦更复杂，有待于进一步的研究.

与 Kharitonov 定理的思路相反，Soh 等[39]则从已经稳定的多项式出发，研究该多项式在参数空间中的最大稳定半径，其实质上是研究系统的鲁棒稳定度量. 随后 Biernacki 等[40]对此作了进一步的研究，并通过在参数空间中嵌入一超球来简化寻求最大稳定半径的迭代算法. 但这种方法的缺陷是球心的选择. 如果一开始球心就靠近稳定边界附近，迭代计算所得的超球半径就很小，从而导致所得的鲁棒稳定度量十分保守. 对于低维系统，这种方法可以精确描述不确定性参数稳定区域，且具有直观、易于计算并能达到最佳鲁棒稳定性的优点；但对于高阶系统及有许多可调参数的系统，这种参数空间法就难以处理.

随着高性能计算机的不断涌现，为了处理稳定性之外的其他性能指标，非线性规划意义下的参数空间法近年来得到了飞速发展. 如果我们把状态空间以及频域的性能要求，例如指数稳定性、阻尼因子、静态误差、时间响应峰值、敏感性等，用于形成一组不等式约束，那么这些不等式约束描述了对象参数空间的可行域. 这样，通过在可行域内嵌入极大化的超球半径，即可得到同时具有一定性能和鲁棒稳定性的完美结果.

总之，以 Kharitonov 定理为代表的多项式代数方法为参数不确定系统的鲁棒控制问题研究提供了强有力的工具. 但其基本上局限于鲁棒稳定性分析，对于参数不确定系统的鲁棒镇定问题，没有什么满意的结果. Bhattacharyya 等[41]在其专著中针对参数不确定系统的鲁棒控制问题做过全面系统的总结.

1.2.3 鲁棒控制的时域方法

本世纪50年代后期，空间技术的发展和计算机技术的普及对控制理论的发展产生了深刻的影响，这种影响促进控制理论由经典控制理论向现代控制理论转变. 以微分方程描述为基础的时域方法(状态空间方法)的引入，使人们第一次能够比较容易地解决线性多变量问题. Pontryagin的极大值原理、Bellman的动态规划和Kalman的滤波理论奠定了现代控制理论的基础. 令人遗憾的是，从大型空间技术控制发展起来的、并得到成功运用的现代控制理论，至今仍主要局限于大型空间技术及机器人控制等少数几种应用场合. 究其原因，是因为现代控制理论以精确的模型描述为基础，没有考虑当真实系统与模型存在这样或那样的偏差时，如何保持系统性能，即鲁棒性问题.

鲁棒控制理论的时域方法是鲁棒控制理论研究中最活跃的一个分支，内容十分丰富. 为了叙述清晰起见，下面分别对时域鲁棒性分析和时域鲁棒镇定两个方面进行介绍，而时域内鲁棒性能问题一般可以转换为某个区域内的广义鲁棒镇定问题，我们把它归入鲁棒镇定方面.

一、时域鲁棒性分析

在时域鲁棒性分析中，Lyapunov方法得到了广泛应用. 其一般思想是针对不确定(摄动的)状态空间对象，选择一个合适的Lyapunov函数，然后基于范数的概念得到鲁棒稳定性界限，亦即鲁棒度[42~44]. Sezer等[45]研究了基于Lyapunov方法所得到的系统鲁棒稳定性界限与Lyapunov函数选择的关系. Juang等[46]进一步将Lyapunov方法扩展，用于极点配置到指定区域上的鲁棒性分析(即所谓的鲁棒D稳定)，这就相当于研究系统性能的鲁棒性. 用Lyapunov方法仅能得到保证系统二次稳定的结果，这对非线性摄动和时变摄动是非常合适的，但对于常实参数摄动来说，所得结果非常保守，故自然会想到利用参数Lyapunov方法(即Lyapunov函数依赖于参数)进行鲁棒稳定性研究，但由于该问题十分复杂，相应的结果仍很少[47,48]；而且即使利用参数Lyapunov方法，保守性能可减少多少仍无定论. 此外，由于Lyapunov方法的充分性，所得结果优劣常常取决于Lyapunov函数选取的好坏，但到底用什么方法以确保所选的Lyapunov函数能够满足要求，或者选取什么样的Lyapunov函数最好，至今为止仍不清楚. 近来仿射Lyapunov方法已有一定的突破，但仍有待进一步的研究.

Tesi等[49]用基于矩阵的Kronecker代数方法，将具有结构不确定性的鲁棒稳定性问题转化为参数空间中矩阵的非奇异性问题，进一步指出参数空间中超球域内的鲁棒稳定性可由一参数矩阵的行列式大于0保证，并给出了单参数和两参数摄动时，在某摄动范围内系统的鲁棒稳定性的检验算法，然而对于多参数情况，却没有给出合适的检验方法. Heinen[50], Dickman[51]和Juang[52]分别利用Gershgorin定理、奇异值分解方法和根轨迹方法，讨论了系统的鲁棒稳定性和摄动系统的极点在某稳定区域的鲁棒性，但均未得到比较理想的结果.

此外，我们亦注意到，所有这些稳定摄动界都被局限在不确定参数的绝对值上，即对稳定区域的确定，一是为了得到系统的稳定裕量，二是为系统闭环标称矩阵的选取提供帮助与依据. 这些对称的稳定区域无疑是保守的，而且不能据此对标称矩阵的选取作一些调整，因而得到系统的非对称鲁棒稳定区域是必要的. Gao等[53]基于Lyapunov方法对此进行了一些有益的讨论.

对于摄动模式形如$A+B\Delta C$的矩阵组(A,B,C)的稳定半径计算已取得了较好的结果. Hinrichsen等[54]于1986年首先提出这一问题，并基于代数Riccati方程解决了复稳定半径的

计算问题.但是,把复稳定半径应用于参数不确定线性系统等实系统时,具有很大的保守性. Qiu 等[55]进一步利用线性代数方法研究了这一问题,并提出了实稳定半径的计算方法.

具有参数不确定性离散系统的鲁棒稳定性分析亦得到了许多结果[56~59],有意思的是 Karan 等[60]研究了离散系统和连续系统鲁棒稳定性之间的关系,并给出了两种确定系统鲁棒稳定界的方法.

作为结构不确定线性系统的特例,时域的区间矩阵族的鲁棒稳定性问题近年来亦得到了广泛的研究,但仅取得了一些充分或者必要条件[61~63].已经证明这一问题是一 NP 问题[64],解析解可能无法得到,于是寻求这一问题的解可能不得不使用数值解法或者借助于 Lyapunov 方程以及线性矩阵不等式.而且研究结果表明,对于状态空间描述的矩阵族的鲁棒性分析问题,难以通过推广多项式代数方法来解决,如 Kharitonov 定理和棱边定理在矩阵族的鲁棒性分析中均不成立.近年来,对于区间矩阵族鲁棒性研究较有意义的结果,是 Wang 等[65,66]利用区间的有限分解方法给出区间矩阵族 Hurwitz 稳定和 Shur 稳定的充要条件和相应算法,以及区间矩阵可控性和可观性的检验算法.但从根本上说,这一计算方法是一种无穷二分法,计算量很大,在一般微机上难以实现.

二、时域鲁棒镇定

对于鲁棒镇定问题,粗略地讲有两种方法:鲁棒分析方法和鲁棒综合方法.在鲁棒分析方法中[67,68],不确定系统被看作具有不确定摄动的标称系统,使用经典线性系统的设计方法,通过分析标称系统来构造一个镇定标称系统的反馈控制律,然后证明它具有所有可能不确定闭环系统的鲁棒稳定性.这种鲁棒镇定方法主要依赖于所采用的鲁棒稳定性分析方法.关于时域鲁棒性分析方法在前面已经介绍过,在此不再赘述.然而鲁棒分析方法有许多缺点,首先,给定不确定性系统的可镇定性未知;其次,通过计算得到的鲁棒稳定充要条件仅由某些特殊情况得到,通常这些结论不能为重新设计反馈控制律,改进闭环系统鲁棒性提供指导.

在鲁棒综合方法中,首先要求确定给定不确定系统的可镇定性,然后再设计合适的鲁棒镇定控制律.因此对于鲁棒综合问题,首要的问题是:什么类型的不确定性系统可以镇定?这就是鲁棒可镇定问题,或者叫做可镇定不变性问题.这一问题是控制理论中最富有挑战性的研究领域之一.

由有限个低阶系统组成的不确定系统的可镇定性可由参数空间法来确定[69~71].当单输入不确定系统包含几个连续参数摄动时,Wei 等[72]提出了一种鲁棒可镇定的充分条件,并给出了相应的鲁棒镇定控制器设计方法;随后 Wei[73]进一步给出了多输入不确定系统可鲁棒镇定的充分条件. Horisberger 等[74]和 Gu[75]研究了不确定线性系统鲁棒可镇定性问题,并利用优化方法给出了检验一类不确定线性系统可鲁棒镇定的算法,可惜的是算法计算量比较大,而且有可能只能得到局部最优解.类似的处理方法还有结构 Lyapunov 函数方法[76]和线性优化方法[77]. Gu[78]进一步研究了一类不确定线性系统的输出反馈鲁棒镇定问题,并利用变量变换及其对偶形式,将这一问题转化为一类伪凸优化问题,以得到全局最小点.

基于不确定参数的位置,Wei[79,80]使用几何方法得到了一类线性区间系统可鲁棒二次镇定和鲁棒镇定的一些充分条件和必要条件.这些条件虽然比较容易检测,但从系统理论观点看,却不一定容易理解,尤其是这些条件与控制理论中的一些熟知概念如可控性等的关系不明确. Petersen[81]于 1989 年提出了可控不变性概念(Controllability invariance),即如果不确定系统是可控不变的,该系统在不确定参数取每一值时都是可控的,并讨论了其与鲁棒二次镇定