数学解题天才

多解全攻略

新课标

高中立体几何

GAOZHONG LITI JIHE DUOJIE QUANGONGLUE

开拓思路
创新解法
凝聚精华
提升能力

廖永康 牟科文 编著

广西教育出版社

数学解题天才

多解全攻略

新课标

高中立体几何

GAOZHONG LITI JIHE DUOJIE QUANGONGLUE

廖永康 牟科文 编著

广西教育出版社

数学解题天才

高中立体几何多解全攻略

廖永康　牟科文　编著

☆

广西教育出版社出版

南宁市鲤湾路 8 号

邮政编码:530022　电话:5850219

本社网址　http://www.gep.com.cn

读者电子信箱　master@gep.com.cn

全国新华书店经销　广西合浦印刷有限责任公司印刷

*

开本 890×1240　1/32　9.125 印张　250 千字

2003 年 1 月第 4 版第 5 次印刷

印数:22 001—32 000 册

ISBN 7-5435-2666-2/G·2050　定价:14.00 元

如发现印装质量问题,影响阅读,请与承印厂联系调换

前言

由于数学概念、公式、定理的高度抽象性，常用的数学方法的概括性与普遍性，数与数、形与形、数与形之间的相互联系，以及中学数学知识、技能具有的基础特点，决定了中学中大量数学问题的解法不是惟一的，这就使数学题的一题多解成为可能.

一题多解的实现，依赖于解题者对基础知识的掌握程度和解题能力的强弱，依赖于解题者一系列分析、综合的思维活动能力. 它与数学教学活动及对学生能力的培养有着密切的关系. 因此，对一题多解在数学教学中的作用的研究和有效地实施就显得很有必要了. 实践证明，适时地把一题多解引入数学教学过程，符合教育规律，对推进素质教育必定能起到积极的作用.

在长期的教学实践中，我们搜集了许多中学数学题的一题多解的范例. 现精选立体几何一百余题，编成本书，献给中学教师、学生和自学青年，愿它能起到抛砖引玉的作用，打开读者的思路，获得教与学的新飞跃.

本书根据新课标的要求，精选的一百余题，按立体几何常见类型分成八个专题. 精选的题都具有典型性、示范性，并覆盖了常见的基本类型. 为读者提供练习和进一步开拓思路的机会，各专题最后还附有练习题，供读者练习之用.

由于具有以上特点，我们相信，本书一定会成为中学生和自学青年的良师，成为广大教师的益友. 同时，也恳切地欢迎大家对本书提出宝贵的意见和建议.

编著者

目录

一、共面与异面专题

1. 若一条直线与三条平行直线都相交，则这四条直线在同一个平面内.

已知： 如图 1-1，$a /\!/ b /\!/ c$，且 $d \cap a = A$，$d \cap b = B$，$d \cap c = C$.

求证：直线 a、b、c、d 在同一个平面内.

攻略 1 **要证 d 与 a、b、c 共面，可先证 d 与 a、b 共面. 因为 $a /\!/ b$，可由 a、b 确定一个平面，设为 α. 由 d 与 a、b 相交可证 d 在 α 内. 为证 a、b、d 与 c 共面，可由 $b /\!/ c$ 确定平面 β，然后证平面 α 与 β 重合，这需要运用确定平面的公理，即设法证明两相交直线 b 与 d 既在 α 上又在 β 上.**

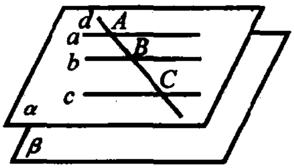

图 1-1

证法 1 如图 1-1.

$\because a /\!/ b$，

$\therefore$ 可过 a、b 作平面 α.

$\because$ a、b 与 d 分别交于 A、B，即 d 上有两点 A、B 在 α 内，

$\because$ d 也在 α 内.

又$\because$ $b /\!/ c$，$\therefore$ 可过 b、c 作平面 β.

$\because$ b、c 与 d 分别交于 B、C，即 d 上有两点 B、C 在 β 内，

$\therefore$ d 也在 β 内.

于是，相交直线 b 与 d 在 α 内，又在 β 内. 而根据公理，过两条相交直线有且只有一个平面.

$\therefore$ 平面 β 与 α 重合.

因此，直线 a、b、c、d 都在同一个平面 α 内.

注 要证 d 与 a、b、c 共面，可先证 d 与 a、b 共面. 还有另一种思路是：因

为$a/\!/b$，所以由a与b可确定一个平面α；又因为$d\cap a=A$，所以由a与d又可确定一个平面β. 在运用确定平面的公理时，利用直线a与a外一点B在α内，同时又在β内，也可说明α与β重合. 同理可证平行线b与c确定的平面γ也可与α重合，于是得证.

攻略 2 同证法 1，先证得d在由a、b确定的平面α内. 接下去，采用反证法证明c也在α内.

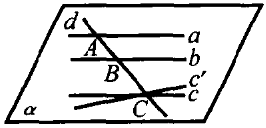

图 1-2

证法 2 如图 1-2.

$\because$ $a/\!/b$，

$\therefore$ a、b确定一个平面，设为α.

$\because$ $A\in a$，$B\in b$，$\therefore$ $A\in\alpha$，$B\in\alpha$.

$\therefore$ 直线$AB\subset\alpha$，即$d\subset\alpha$.

假设直线c不在α内，即$c\not\subset\alpha$，

$\because$ $C\in d$，即$C\in\alpha$，

$\therefore$ 过点C在α内可作直线$c'/\!/b$.

于是得出“过直线b外一点C能作两条直线c与c'都平行于b”，这是不可能的.

$\therefore$ $c\subset\alpha$.

故a、b、c、d都在同一个平面α内.

攻略 3 在由相交直线a与d确定平面α后，可考虑逐一证明直线b、c都在平面α内. 要证直线b在α内，可用同一法，即过交点B，在平面α内作直线b'，使$b'/\!/a$，再证明b'与b重合.

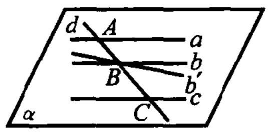

图 1-3

证法 3 如图 1-3，过相交直线a与d作一个平面α.

在平面α内，过b、d的交点B作直线b'，使$b'/\!/a$.

由已知直线b也过B且平行于a.

根据平行公理，经过直线外一点. 有且只有一条直线与已知直线平行.

$\therefore$ 直线b'与b重合.

即　b 在平面 α 内.

又　$c \cap d=C$，且 $c /\!/ b /\!/ a$，

同理可证 c 也在平面 α 内.

故直线 a、b、c、d 都在同一平面 α 内.

简评 证诸直线共面的问题时，本例的三种证法都是有代表性的. 证法 1 为证明平面重合的方法，根据确定平面的公理可知，若两条相交直线都在平面 α 内，又在平面 β 内，则 α 与 β 重合. 依据这些公理还有：若一条直线和此直线外的一点都在平面 α 内，又在平面 β 内，则 α 与 β 重合；若不在一条直线上的三点都在平面 α 内，又在平面 β 内，则 α 与 β 重合.

证法 2 和证法 3 是先由两条平行(或相交)直线确定一个平面，然后证明其余的直线也在此平面内. 为此，它们分别采用了反证法和同一法.

反证法和同一法均属间接证法. 证明有些命题，用直接证法不易证明时，可用间接证法. 反证法证题的一般步骤是：①假设结论的反面成立；②据理推出矛盾的结论(如与题设矛盾，或与定义、公理、定理矛盾，或自相矛盾等等)；③断定结论的反面错误；④断定结论的正面正确. 同一法则是先做出一个与题目要求证明的结论相同的图形，然后再证明这图形与题设的图形完全一致，从而达到证明的目的.

2. 长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，C_1D_1、D_1D、DA、AB、BB_1、B_1C_1 的中点分别为 P、Q、R、L、M、N，试证明 P、Q、R、L、M、N 在同一平面内.

攻略 1　由于经过平面外一点有且只有一个平面与已知平面平行，若能证得 LP、RN、MQ 都相交于长方体的中心 O，而且这些相交线确定的平面既过此点 O，又与某平面(如平面 BC_1D)平行，即可证得题设的六点共面.

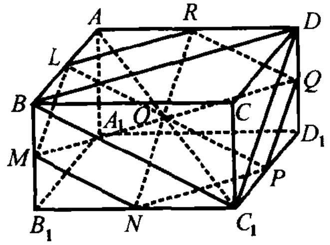

图 1-4

证法 1　如图 1-4，设长方体的中心为 O，则 O 是长方体对角线 AC_1 的中点.

∵　$AL \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} C_1P$，

∴　ALC_1P 为平行四边形，且对角线 AC_1、LP 交于长方体的中心 O.

同理，由 $AR \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} C_1N$ 知 RN 与 AC_1 交于 O；由 $MN \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} RQ$ 知 MQ 与 RN 交于 O.

即 MQ、LP、RN 都过长方体中心 O.

连结 BC_1、C_1D、BD.

∵　$LR /\!/ BD$，$MN /\!/ BC_1$，$PQ /\!/ C_1D$，

∴　相交线 MQ、LP、RN 两两确定的平面通过中心 O，而且和平面 BC_1D 平行.

故 MQ、LP、RN 在同一平面内，

即 P、Q、R、L、M、N 在同一平面内.

攻略 2　根据“若一条直线与两条以上的平行线都相交，则这些直线都在同一平面内”，可考虑证明 LP 与三条平行线 LR、MQ、NP 都相交，则可证得题设的六点在同一平面内.

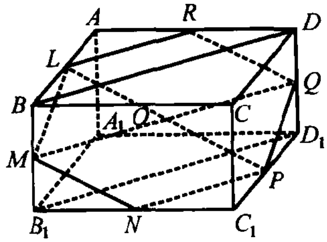

图 1-5

证法 2　如图 1-5，连结 MQ、LP 及 BD、B_1D_1.

∵　$LR /\!/ BD$，$BD /\!/ MQ$，

又　$NP /\!/ B_1D_1$，$B_1D_1 /\!/ MQ$，

∴　$LR /\!/ MQ /\!/ NP$.

同理可证　$LM /\!/ QP$.

又　$LM = \frac{1}{2}AB_1 = \frac{1}{2}DC_1 = QP$，

∴ $MPQL$ 为平行四边形，对角线 LP 与 MQ 相交于 O.

由 LP 与三条平行线 LR、MQ、NP 都相交，得知这四条直线在同一平面内，

故 P、Q、R、L、M、N 在同一平面内.

攻略 3 根据两平行线确定一个平面和不在同一直线上的三点确定一个平面，可以先证题设的六点中的若干点分别在两个平面内，然后证这两个平面重合.

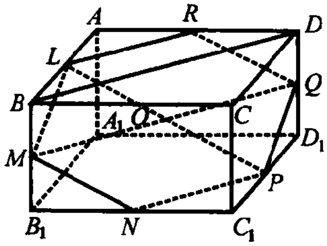

图 1-6

证法 3 如图 1-6，

∵ $LR /\!/ BD$，

$BD /\!/ MQ$，

∴ $LR /\!/ MQ$，

于是 LR 与 MQ 确定一个平面 α.

同理可证 $RQ /\!/ LP$，

∴ RQ 与 LR 确定一个平面 β.

而不在同一直线上的三点 L、R、Q 既在 α 上也在 β 上，

∴ 平面 α 与 β 重合.

即点 M、L、R、Q、P 都在 α 内.

同理可证 N 也在平面 α 内.

故 P、Q、R、L、M、N 在同一平面内.

证法 1 运用了两平行平面的关系，证法 2 运用了直线与平行线相交的关系，而证法 3 只运用确定平面的公理. 显然，证法 3 较简捷. 类似以上的重合法是证明点共线、共面或线共面的常用方法.

3. 如图 1-7，已知不共面的三条直线 a、b、c 都过 O 点. 点 A、B、E、F 均不同于 O，且 $A\in a$，$B\in a$，$E\in b$，$F\in c$. 求证：直线 AE 与 BF 为异面直线.

攻略 1 本题宜采用反证法. 假设 AE 与 BF 都在平面 α

内，则由 A、B 在 α 内可推得 O 在 α 内，由 O 与 E 在 α 内推得直线 b 在 α 内. 同理推出直线 c 在 α 内，从而 a、b、c 共面，导致与题设矛盾.

证法 1　假设直线 AE 与 BF 不是异面直线，则它们共面，设这平面为 α.

∵　$A\in\alpha$，$B\in\alpha$，且 $A\in a$，$B\in a$，

∴　$a\subset\alpha$.

∵　$O\in a$，∴　$O\in\alpha$.

又　$E\in\alpha$，且 $O\in b$，$E\in b$，

∴ $b\subset\alpha$.

同理　$c\subset\alpha$.

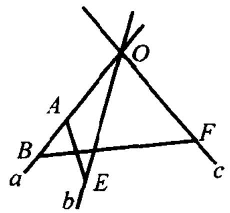

图 1-7

于是 a、b、c 在同一平面 α 内，这与题设"a、b、c 不共面"矛盾.

∴　AE 与 BF 是异面直线.

攻略 2　假设 AE 与 BF 都在平面 α 内. 由 a、b 相交，确定平面 β，由 a、c 相交，确定平面 γ. 再证明 α、β、γ 重合，导致 a、b、c 共面，引出矛盾，即可反证 AE 与 BF 是异面直线.

证法 2　假设 AE 与 BF 不是异面直线，则它们共面，设这个平面为 α.

∵　$a\cap b=O$，

∴　过 a 与 b 确定一个平面 β.

∵　A、B、$E\in\alpha$，

又　A、B、$E\in\beta$，

而经过不在同一直线上的三点，有且只有一个平面，所以 α 与 β 重合，即 $b\subset\alpha$.

同理可证，由 a 与 c 确定的平面与 α 重合，即 $c\subset\alpha$.

于是 a、b、c 都在 α 内，这与题设"a、b、c 不共面"矛盾.

∴　AE 与 BF 是异面直线.

攻略 3　证明两直线为异面直线，还可利用异面直线判定

定理：过平面外一点与平面内一点的直线，和平面内不经过该点的直线是异面直线. 此时，需先由其中两条相交直线确定一个平面.

证法 3　如图 1-8，设由两相交直线 a、b 确定的平面为 α.

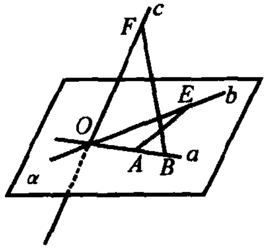

图 1-8

根据题意，A、B 为在 a 上不同的两点，所以 A、$B\in\alpha$.

又　$E\in b$，$\therefore$　直线 $AE\subset\alpha$.

而　$F\notin\alpha$，$B\notin AE$，

因此 BF 为过 α 外一点 F 及 α 内一点 B 的直线，

$\therefore$　直线 AE 与 BF 为异面直线.

注　上述"异面直线判定定理"的证明如下：

如图 1-9，设 $a\subset\alpha$，$A\notin\alpha$，$B\in\alpha$，$B\notin a$.

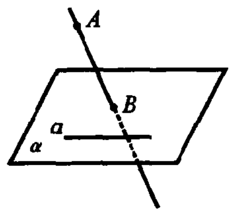

图 1-9

假设直线 AB 与 a 不是异面直线，则它们在同一个平面 β 内，那么 $B\in\beta$，$a\subset\beta$. 因为 $B\notin a$，而经过点 B 与直线 a 只能有一个平面，所以 α 与 β 重合，于是直线 $AB\subset\alpha$，得知 $A\in\alpha$，这与已知 $A\notin\alpha$ 矛盾. 故直线 AB 和 a 是异面直线.

前两种证法都是用反证法，但具体推理过程不同，证法 1 运用了公理：如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内；证法 2 运用的是公理：经过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面，以及它的推论. 证法 3 运用有关的判定定理，这就必须把题设的条件对应转化到定理的前提条件来解决.

4. 在空间四边形 $ABCD$ 中，M、N 分别是 AC、BD 的中点，且 MN 为 AC、BD 的公垂线，求证：$AD=BC$，$AB=CD$.

攻略 1　$ABCD$ 是空间四边形，说明 AB 与 CD 是异面直线，AC 与 BD 也是异面直线. 解决有关异面直线的问题，经常是

采用平移的方法，把一些重要的几何元素（如线段、角……）集中到平面图形中进行研究. 鉴于本题提供有线段的中点，则可以运用三角形的中位线的知识来解决.

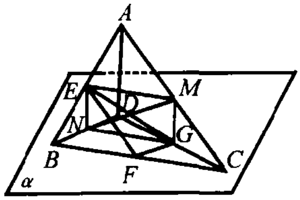

图 1-10

证法 1 如图 1-10，设 E、F、G 分别为 AB、BC、CD 的中点，连结 EM、MG、EN、NG、EF、FG、EG，则有

$EN /\!/ AD$，$EN=\frac{1}{2}AD$，$MG /\!/ AD$，$MG=\frac{1}{2}AD$，

即 $EN \underline{/\!/} MG$，

∴ $ENGM$ 是平行四边形.

又 $EF /\!/ AC$，$FG /\!/ BD$，$MN \perp BD$，$MN \perp AC$，

∴ $MN \perp EF$，$MN \perp FG$，

从而 $MN \perp$ 平面 EFG.

∴ $MN \perp EG$.

因此 $ENGM$ 是菱形.

∴ $MG=NG$.

而 $AD=2MG$，$BC=2NG$，

∴ $AD=BC$.

取 AD 的中点 H，同理可证 $HNFM$ 为菱形，$MF=NF$，

于是 $AB=CD$.

攻略 2 由于本题的条件涉及线段的中点，故也可以把问题转化为三角形的中线问题.

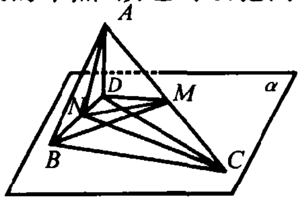

图 1-11

证法 2 如图 1-11，连结 AN、NC、BM、MD.

∵ $AM=MC$，$MN \perp AC$，

∴ $AN=NC$.

∵ $BN=ND, MN\perp BD$,

∴ $MB=MD$.

设 $AB=a, BC=b, CD=c, AD=d$，则在$\triangle ABD$与$\triangle CBD$中，由中线长公式，得

$$4AN^2=2(a^2+d^2)-BD^2,\qquad 4CN^2=2(b^2+c^2)-BD^2.$$

以上两式相减，得 $a^2+d^2=b^2+c^2$. ①

同理，在$\triangle ABC$与$\triangle ADC$中，可得

$$a^2+b^2=c^2+d^2. \quad ②$$

①－②，得 $d^2-b^2=b^2-d^2$，即 $b^2=d^2$，

∴ $b=d$，

代入①式，得 $a=c$.

即 $AD=BC, AB=CD$.

点评 利用平移的方法解决有关异面直线的问题，是常用的方法. 本题由于提供了线段中点的条件，这就为运用三角形的中位线来促成线的平移带来了方便，同时，也达到了证明线段相等的目的. 由此看来，证法1是具有典型性的. 证法2是基于三角形中线长的定理，方法较特殊.

5. 如图1-12，直线AB是异面直线a和b的公垂线，垂足为A与B. β是过AB中点H且与AB垂直的平面（即线段AB的中垂面）. 在b上任取一点C，在a上任取一点D，连结CD. 求证：线段CD必被平面β所平分.

攻略1 设$CD\cap\beta=G$. 要证CD被β平分，只需证$CG=GD$. 因为"平面外一条直线与这个平面同垂直于另一条直线，则这条直线与这个平面平行"，由$AB\perp\beta$；$AB\perp a$，可得$a/\!/\beta$. 过a可作平面$\gamma/\!/\beta$. 又知$b/\!/\beta$，所以可将AB平移使之过C，即过C作$CF/\!/AB$，设分别交β、γ于E、F（图1-13），则$CE=EF$. 由此便可在CF、CD确定的平面内证$CG=GD$.

证法 1 如图 1-13，$\because$ $AB\perp\beta$，$AB\perp a$，$\therefore$ $a/\!/\beta$.

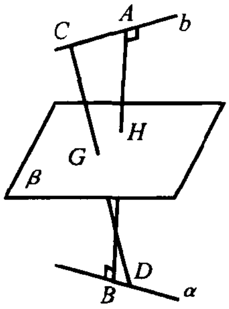

图 1-12

过 a 作平面 $\gamma/\!/\beta$，过 C 作 $CF/\!/AB$，分别交 β、γ 于 E、F. 又过 CF 和 CD 作平面 CDF，设与平面 β、γ 的交线分别为 EG 和 FD，则 $EG/\!/FD$.

$\therefore$ $\triangle CEG\backsim\triangle CFD$，

有 $\dfrac{CE}{EF}=\dfrac{CG}{GD}$.

$\because$ $AB\perp\beta$，$AB\perp b$，$\therefore$ $b/\!/\beta$.

又 $\beta/\!/\gamma$，$\therefore$ $AH=CE$，$HB=EF$.

而 $AH=HB$，$\therefore$ $CE=EF$.

故 $CG=GD$，即 CD 被平面 β 所平分.

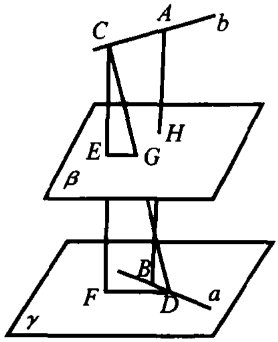

图 1-13

攻略 2 设 $CD\cap\beta=G$，要证 CD 被 β 平分，需证 $CG=GD$. 若过 C 作 $CE\perp\beta$ 于 E，过 D 作 $DF\perp\beta$ 于 F（图 1-14），则 $CE/\!/DF$，而且可证 $CE=DF$. 过 CE 和 DF 作平面，知 G 点在交线 EF 上，于是可设法证$\triangle CEG\cong\triangle DFG$，从而导出 $CG=GD$.

证法 2 如图 1-14，过 C 作 $CE\perp\beta$ 于 E，过 D 作 $DF\perp\beta$ 于 F，则 $CE/\!/DF$.

过 CE 和 DF 作平面与平面 β 相交于 EGF.

$\because$ $AB\perp a$，$AB\perp b$，且 $AB\perp\beta$，

$\therefore$ $a/\!/\beta$，$b/\!/\beta$.

$\because$ $CE=AH$，$DF=HB$，且 $AH=HB$，

$\therefore$ $CE=DF$.

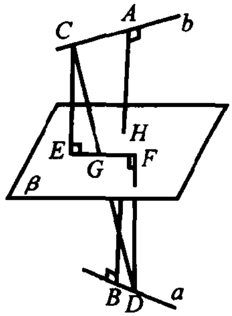

图 1-14

又　$\angle CGE=\angle FGD$，

$\therefore$　$Rt\triangle CEG\cong Rt\triangle DFG$.

故 $CG=GD$，即 CD 被平面 β 所平分.

攻略 3　由于 AB 与 CD 不共面，若连结 AD、CD，则可过 AB 和 AD 作平面，过 AD 和 CD 作平面，再利用 $a\parallel\beta$ 和 $b\parallel\beta$ 的关系，将 $AH=HB$ 通过两平面的交线 AD 转换为 $CG=GD$.

证法 3　如图 1-15，连结 AD，交平面 β 于 F. 过 AB 和 AD 作平面交 β 于 HF；过 AD 和 CD 作平面交 β 于 GF.

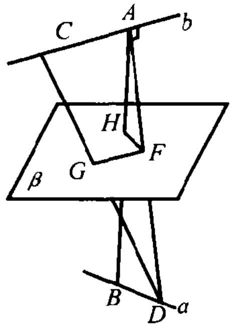

图 1-15

$\because$　$AB\perp a$，$AB\perp b$，且 $AB\perp\beta$，

$\therefore$　$a\parallel\beta$，$b\parallel\beta$.

于是　$HF\parallel BD$，$GF\parallel AC$.

$\therefore$　$\dfrac{AH}{HB}=\dfrac{AF}{FD}=\dfrac{CG}{GD}$.

而　$AH=HB$，

故 $CG=GD$.

$\therefore$　CD 被平面 β 平分.

简评　证法 1 和证法 2 运用了平移的方法，即把 AH 和 HB 平移至 CE、EF（证法 1）；或把 AH 和 HB 平移至 CE、DF（证法 2），然后作出平面进行证明. 证法 3 连结 AD，作出平面，把 AH、HB 的关系经 AF、FD 转换到 CG、GD. 这些直线平移和连线转换的方法，在解决异面直线的证明和计算问题时运用较多.

练习题一

1. 在梯形 $ABCD$ 中，$AB /\!/ DC$，求证：梯形 $ABCD$ 是平面图形.

2. 已知 a、b、c、d 是两两相交且不共点的四条直线，求证：直线 a、b、c、d 在同一平面内.

3. 正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，G、H 分别是 BC、CD 的中点，求证：D_1、B_1、G、H 四点在同一平面内.

4. 已知 $ABCD$ 是空间四边形，求证它的两条对角线 AC 和 BD 是异面直线.

5. 如图 1-16，$\alpha \cap \beta = a$，$b \subset \beta$，$b /\!/ a$，$c \subset \alpha$，$a \cap c = A$，求证：b、c 是异面直线.

6. 如图 1-17，空间四边形 $ABCD$ 中，$AB \neq AC$，AE 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的高，DF 是 $\triangle BCD$ 的 BC 边上的中线. 求证：AE 和 DF 是异面直线.

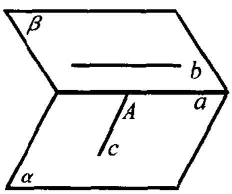

图 1-16

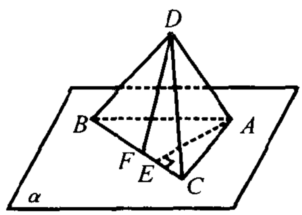

图 1-17