

110364

~~110363~~

修正課程標準適用

新編

高中立體幾何學

全一冊

編者 余介石

中華書局印行

民國二十七年十月再版

修正課程標準用

新編高中立體幾何學（五）

◎實價國幣五角

（郵運匯費另加）

者 余 介

行者 中華書局有限公司

代表人 路

刷者 香港九龍北
中華書局印

行處 中華書局發

行處 各埠中華書

有	著	作	權
不	准	翻	印

01322

7/4/22

1081

09501

何奎垣先生序

幾何爲空間形式科學，自非歐派幾何發明後，覺察空間可依於各種不同方式，換言之，即幾何待原理而成，空間待幾何而表，故原理派尙矣。余君介石編輯是書，根於原理派觀點，洵爲近日教科書中之有極大進步者也。至其秩序緊密，說理周詳，適合學子，抑其次也。此書之最精處，在於比較平面與球面幾何。愛因斯坦之意，以爲如人在球面，而不能離此球面，則彼之直線，乃大圓弧。假如從一定點起，取半徑作圓，當半徑甚小時，周長與半徑之比，極近於 π 。如半徑漸增大時，則周率漸小於 π ，以至爲零。此球面學者解釋此現象曰，吾之平面幾何，乃非歐派幾何也。審此則雖初學亦能分別歐派與非歐派幾何。吾之爲此言也，以客觀空間，近於非歐派幾何，故當先養成學子覺察之力也。此外，余意以爲中等幾何，尙有應注意者數事。一者，平面及空間軌跡，所當注意，此爲解決一切問題之根本。二者，平面之對稱，平移，旋轉及位似圖，應推廣於空間，依克乃恩 *Klein* 之意，此等概念，乃初等幾何之不變羣。換言之，即初等幾何圖形性質，對此等羣而爲不變也。三者，初等幾何，乃可度幾何，故當注意長短，面積，體積，容積之量法。四者，圓錐形截線，除直線與圓而外，尙有拋物線，橢圓，雙曲線等，應細研其幾何性質，及其公同性。

質五者，書中多依綜合法敘述，以示謹嚴，而不適於尋求。學者宜常將定理改作問題，以爲尋求，必能助其精進。余君此著，對上述諸端，頗知注意。平面部於定理復習，甚重解析，於軌跡及作圖題之尋求，亦能揭示運思着手之途徑，此皆最有裨益於初學之處。惜以取材限於官方規定，對空間之變圖各法，與拋物線橢圓，雙曲線等，皆未能備載。故不能不贅數言，以告學子，而望其能參考其他書籍，以補其闕。想余君及善讀是書者，或不河漢斯言，是爲序。

何 魯

編輯要旨

(一)本書取材,完全遵照教育部最近頒布高中課程修正標準,專供高中二年級甲組之用,至於編述次第,則依據二十三年七月江蘇省教育廳所定的修訂高中算學科教學進度表,稿本曾託友人李修睦,陸子芬,劉漢三諸先生,在各著名中學,實地試教,以期適合實際情形。

(二)美人 Schultze, Sevenoak, Schuyler 三氏所編立體幾何一書,在我國流行極廣,已有譯本四五種,其為各校樂於採用之情形,可以想見,即江蘇省教廳的進度表,亦大體依其次序,該書選材妥善,說理周詳,條理井然,習題豐富,能引起初學研習興趣,促進其自動作業,而養成其理解能力,誠為一極優良教本,但就編者經驗所及,其書尚不無缺憾,本書即據為藍本,加以改編,其瑕疵悉予修正,優點則盡行保存,以期益為完善合用。

(三)吾師何奎垣教授所倡之原理教學法,極能助學子精進,本書編制,力求與此原則相合,故對基本原理,力求詳盡明達,復就立體幾何中心事項,分為單元,全書分三大段:第一二兩編為第一段,闡明空間圖形基本元素要義,第三至五編為第二段,詳述多面體,三圓體(圓柱,圓錐球)的度量問題,此為立體幾何最切實用的部分;第六編球面幾何學為第三段,目的在對兩種二度幾何學(平

面幾何與球面幾何)作一比較的研究,并藉以顯出幾何學的性質,而爲高中幾何一科作一總結。

(四)按部頒修正標準,高中甲組立體幾何授課時間,爲全年每週二小時,共約有80小時之譜,本書共174頁,有習題三四集,複習題五集,總習題一集,每小時約授2頁,每週有習題一次,支配尙覺勻稱,惟我國幅幘廣大,各地程度不齊,編制宜富彈性,故本書將球的度量問題,提前編入第五編末,教師如感時間不敷,則末編庶可從略。

(五)幾何注重圖形與說明對照,本書絕不令一理的證明,分跨前後二頁之上,以便初學研習,又立體幾何,頗重計算,故特附對數表,方乘方根表, π 倍數,冪根及倒數表,三角函數表等於卷末,藉爲計算一助。

(六)本書編輯時,時蒙何師奎垣指示匡正,李修睦,陸子芬,劉漢三諸先生曾就試教經驗,多所指教,而李君復將全稿校閱一遍,尤爲可感,謹并志以表謝忱,此外仍望海內方家各校教師隨時賜教,以便修訂。

(七)本書由友人另編習題解答(不久即可由本局印行),但限於教師購置,以供批改學生課卷之參考,非經學校蓋章,概不發售,讀者諒之。

民國二十六年元月編者謹識,

時次成都國立四川大學。

修正課程標準適用

新 編

高中立體幾何學

目 次

第一編		13.各邊同向平行的角.....12
空間的平面和直線		14.平面垂線定理.....12
1. 平面	1	15.垂面的作圖.....13
2. 立體幾何學	2	習題三.....14
3. 平面的決定.....2		16.平面垂線逆定理.....15
4. 二平面的相交.....3		17.過已知點與已知線 垂直面的唯一性.....15
5. 直線與平面的關係.....3		18.二點聯線中垂面定 理.....16
6. 二直線的關係.....4		19.二平行線與其平行 面.....17
習題一.....5		20.二平行線與其公垂 面.....18
7. 過一面平行線的平面.....6		習題四.....19
8. 關於平面的二作圖題.....7		21.過已知點作已知平 面的垂線.....20
9. 二平面的關係.....7		22.平面垂線唯一性.....20
10.平行面上的截線.....8		
習題二.....9		
11.平行截面定理.....10		
12.不在同一平面內的 三平行線.....11		

上3

23.斜線定理.....	22	37.直線與平面的傾角.....	39
習題五.....	23	38.不共面二直線的公 垂線.....	40
24.斜線的垂線.....	24	39.公垂線最短定理.....	41
25.平行面與相交面的 判別.....	24	習題九.....	41
26.互垂面定理.....	27	40.多面角.....	42
27.射影.....	27	41.多面角的種類.....	43
習題六.....	29	42.三面角的種類.....	43
第二編		43.等腰三面角定理.....	44
二面角, 多面角		44.全等三面角定理.....	44
28.二面角.....	30	習題十.....	45
29.二面角的平面角.....	30	45.三面角各面角間關 係.....	46
30.二面角的種類.....	31	46.多面角各面角總和 定理.....	47
31.相等二面角.....	32	47.三面角與三角形比 較.....	47
32.二面角的度量.....	33	48.各面角皆等的二個 三面角.....	48
習題七.....	33	49.對稱三面角定理.....	50
33.垂面的唯一性.....	34	50.對頂多面角.....	50
34.垂線與垂面關係.....	34	習題十一.....	51
35.同一平面的二垂面 交線.....	36		
習題八.....	37		
36.二面角的分角面.....	37		

第一二兩編複習題...52

第三編

多面體

51.多面體.....	55	習題十四.....	68
52.歐拉定理.....	56	65.直平行六面體體積 定理.....	69
53.多面體面角總和定 理.....	57	66.平行六面體體積定 理.....	70
54.正多面體.....	57	67.分平行六面體爲等 積三角柱.....	70
習題十二.....	59	68.三角柱體積定理.....	71
55.兩種重要的多面體.....	59	習題十五.....	72
56.角柱的種類.....	60	69.角錐的要件.....	73
57.角柱的平行截面定 理.....	61	70.正角錐.....	74
58.角柱側面積定理.....	61	71.角錐臺.....	74
59.全等角柱定理.....	62	72.正角錐側面積定理.....	75
60.立體的體積.....	63	73.正角錐計算題的注 意點.....	75
習題十三.....	63	74.角錐底平行截面定 理.....	76
61.斜角柱體積定理.....	61	習題十六.....	77
62.平行六面體.....	65	75.等積三角錐定理.....	78
63.平行六面體側面定 理.....	65	76.三角錐體積定理.....	80
64.長方體體積.....	66	習題十七.....	81
		77.角錐臺體積.....	82

78.角錐臺計算題注意點.....	83	90.相似旋轉柱度量比定理.....	98
79.有相等三面角的二個三角錐.....	84	習題二十一.....	98
80.相似多面體.....	85	91.錐面.....	99
習題十八.....	86	92.錐.....	100
複習題.....	87	93.錐面(或錐)與直線,平面,角錐關係.....	100
第四編		94.過錐體頂點的截面.....	101
柱 與 錐		95.圓錐,旋轉錐,相似旋轉錐.....	101
81.柱與錐.....	91	96.與圓錐底面平行的截面.....	102
82.柱面,柱.....	91	習題二十一.....	103
83.柱面(或柱)與直線,平面,角柱關係.....	92	97.視錐爲其內接外切角錐極限.....	104
84.含柱面元素的截面.....	93	98.直圓錐側面積定理.....	105
85.重要的柱.....	93	99.圓錐體積定理.....	105
86.柱底全等定理.....	94	100.相似旋轉錐的面積比和體積比.....	105
習題十九.....	95	習題二十二.....	106
87.視柱爲其內接角柱極限.....	96	101.錐臺.....	107
88.圓柱側面積定理.....	96	102.內接角錐臺,外切角錐臺.....	108
89.圓柱體積定理.....	97		

103. 直圓錐臺側面積	114. 二球交圓定理	124
定理	115. 二球的關係	124
104. 錐臺體積定理	116. 球與多面體	125
習題二三	117. 外接球定理	126
複習題	118. 求實球直徑	126

第五編

球

105. 球	119. 內切球定理	127
106. 球的基本性質	習題二六	128
107. 平面與球關係	120. 視球爲其內接外	
108. 直線與球關係	切多面體極限	129
習題二四	121. 球面積定理	130
109. 大圓,小圓,球面距	122. 鼓形	131
離	習題二七	131
110. 極,軸	123. 球體積定理	133
111. 極與圓的距離定	124. 球面角錐	134
理	125. 漏斗形	134
112. 大圓極點判別定	126. 梳形	135
理	127. 鼓形體積	135
113. 作過二已知點的	習題二八	137
大圓	複習題	139
習題二五		

第六編

球面幾何學

128. 曲線交角,球面角	141
---------------	-----

129. 球面角定理.....142	143. 極三角形的應用.....151
130. 球面多角形.....143	144. 球面三角形內角 和定理.....152
131. 球面多角形與多 面角的相應情形.....143	習題三一.....153
132. 對稱球面多角形.....144	145. 球面幾何學的度 量問題.....154
習題二九.....144	146. 不等腰三角形判 別定理.....155
133. 球面三角形.....145	147. 球面上點線距離.....155
134. 球面三角形二邊 和差定理.....145	148. 全等或對稱三角 形的又一條件.....156
135. 球面多角形諸邊 關係定理.....146	習題三二.....157
136. 球面三角形全等 與對稱的條件.....146	149. 球面二角形.....158
137. 對頂形.....147	150. 二角形面積比定 理.....158
138. 等腰三角形定理.....147	151. 二角形面積定理.....159
139. 球面多角形性質 的又一研究法.....147	152. 對稱三角形等積 定理.....160
習題三十.....148	153. 球面剩餘.....161
140. 極三角形.....149	習題三三.....161
141. 極三角形互應定 理.....150	154. 球面三角形面積 定理.....162
142. 極三角形基本定 理.....150	

155. 球面多角形面積

定理.....163

156. 球面上最短距.....164

157. 球面幾何學特徵.....166

習題三四.....167

複習題.....168

總習題.....170

附 錄

重要求積公式彙覽.....175

(一)立體的面積

(二)立體的體積

附 表

(一)四位對數表.....178

(二)平方,立方,平方根,

立方根表.....180

(三) π 的倍數表.....180(四) π 的方乘,方根,倒

數表.....180

(五)三角函數本值表.....181

(六)三角函數對數表.....182

索 引

索引

(附 英 文 原 名)

[後面第一數碼, 指所在頁數; 第二數碼指節數; 如係中文字碼, 則係表第幾習題.]

二面角 Dihedral angle	30, 28	錐面的 ~	99, 91
平 ~ Straight ~	31, 30	公切面 Common tangent	
直 ~ Right ~	31, 30	plane	125, 115
銳 ~ Acute ~	31, 30	分角面 (二面角的 ~) Bisector	
鈍 ~ Obtuse ~	31, 30	(of a dihedral angle)	37, 36
補 ~ Supplementary ~ ..	31, 30	六面體 Hexahedron	56, 51
餘 ~ Complementary ~ ..	31, 30	正 ~ Regular ~	57, 54
鄰 ~ Adjacent ~	31, 30	直 ~ Rectangular ~	65, 62
對頂 ~ Vertical ~	31, 30	中垂面 Perpendicular bi-	
多面角的 ~	42, 40	secting plane	16, 18
八面體 Octahedron	56, 51	外切 Tangent externally ...	125, 115
正 ~ Regular ~	57, 54	平行 Parallel	
十二面體 Dodecahedron ...	56, 51	直線與平面的 ~	4, 5
正 ~ Regular ~	57, 54	二平面的 ~	8, 9
二十面體 Icosahedron	56, 51	平行平面 Parallel planes ...	8, 9
正 ~ Regular ~	57, 54	平行六面體 Parallelopiped	65, 62
三面角 Trihedral angle		直 ~ Right ~	65, 62
等腰 ~ Isosceles ~	43, 42	平面 Plane	1, 1
一直角 ~ Rectangular ~ ..	44, 42	平面角 Plane angle	30, 29
二直角 ~ Bisectangular ~	44, 42	切面 Tangent plane	
三直角 ~ Trirectangular ~	44, 42	柱的 ~	92, 83
小圓 Small circle	120, 109	球的 ~	141, 128
大圓 Great circle	120, 109	錐面的 ~	100, 93
~ 弧 Arc of ~	120, 109	假 ~ Pseudo ~	100, 93
內切 Tangent internally ...	125, 115	切線 Tangent line	
內角 Internal angle		柱的 ~	92, 83
球面多角形 ~	143, 130	球的 ~	141, 128
元素 Element		錐面的 ~	100, 93
柱的 ~	91, 82	假 ~ Pseudo ~	100, 93
柱面的 ~	91, 82	切點 Point of contact	
錐的 ~	100, 92		92, 83; 117, 107; 141, 128.

- 半徑 Radius.....114, 105
- 半球 Semi-sphere120, 109
- 半平面 Semi-plane 30, 28
- 母線 Generator
- 柱面的~ 91, 82
- 錐面的~ 99, 91
- 立方體 Cube..... 65, 62
- 立體角 Solid angle 42, 40
- 立體幾何學 Solid geometry 2, 2
- 四面體 Tetrahedron 56, 51
- 正~ Regular~ 57, 54
- 可展面 Developable surface
.....114, 105
- 多面角 Polyhedral angle ... 42, 40
- 凸~ Concave~ 43, 41
- 全等~ Congruent~ 43, 41
- 對頂~ Vertical~ 50, 50
- 對稱~ Symmetrical~ ... 43, 41
- 多面體 Polyhedron 55, 51
- 凸~ Concave~ 55, 51
- 內接~ Inscribed~.....125, 116
- 外切~ Circumscribed~..125, 116
- 相似~ Similiar~ 85, 80
- 全面積 Total surface
- 柱的~ 96, 87
- 角柱的~ 60, 55
- 角錐的~ 73, 69
- 角錐臺的~ 74, 71
- 錐臺的~108, 101
- 角 Angle
- 球面~ Spherical~.....141, 128
- 曲線交~141, 128
- 球面二角形的~158, 149
- 角柱 Prism 60, 55
- 直~ Right~ 60, 56
- 斜~ Slant~ 60, 56
- 斷~ Truncated~ 60, 56
- 內接~ Inscribed~ 92, 83
- 外切~ Circumscribed~.. 92, 83
- 角柱面 Prismatic surface... 60, 55
- 角錐 Pyramid 59, 55
- 正~ Regular~ 74, 70
- 直~ Right~ 74, 70
- 斷~ Truncated~ 74, 71
- 內接~ Inscribed~.....100, 92
- 外切~ Circumscribed~..101, 92
- 角錐臺 Frustum of a pyramid 74, 71
- 正~ Right~ 74, 71
- 內接~ Inscribed~.....108, 102
- 外切~ Circumscribed~..108, 102
- 底(底面) Base
- 柱的~ 91, 82
- 錐的~100, 92
- 角柱的~ 60, 55
- 角錐的~ 73, 69
- 錐臺的~ (上底, 下底).....108, 101
- 鼓形的~131, 122
- 多面角的~ 43, 41
- 漏斗形的~134, 125
- 直徑 Diameter114, 105
- 直紋面 Ruled surface114, 105
- 直截面 Right section
- 角柱的~ 60, 55
- 柱的~ 92, 83
- 長方體 Rectangular solid... 65, 62
- 非歐幾何 Non-Euclidean
geometry166, 157
- 柱 Cylinder..... 91, 81
- 直~ Right~ 93, 85
- 斜~ Slant~ 93, 85
- 圓~ Circular~ 93, 85
- 內切~ Inscribed~..... 93, 83
- 外接~ Circumscribed~.. 93, 83
- 直圓~ Right circular~.. 94, 85
- 旋轉~ Cylinder of revo-
lution 94, 86

- 相似旋轉 ~ Similiar ~ ... 91, 85
- 柱面 Cylindrical surface ... 91, 82
- 面 Face
- 二面角的 ~ ... 30, 28
- 多面角的 ~ ... 42, 40
- 多面體的 ~ ... 55, 51
- 面角 Face angle ... 42, 40
- 相切 Tangency
- 球的 ~ ... 125, 115
- 相等 Equal ... 63, 60
- 逆轉定理 Contrapositive theorem ... 17, 19
- 垂面 Perpendicular plane
- 平面的 ~ ... 31, 30
- 直線的 ~ ... 13, 14
- 垂趾 Foot ... 21, 22
- 垂線 Perpendicular (平面的) ... 13, 14
- 條件 Condition
- 必要 ~ Necessary ~ ... 103, 二一
- 充足 ~ Sufficient ~ ... 103, 二一
- 充要 ~ Necessary and sufficient ~ ... 103, 二一
- 射影 Projection ... 27, 26
- 正 ~ Orthogonal ~ ... 27, 26
- 射影面 Projecting plane ... 28, 27
- 高 Hight
- 柱的 ~ ... 91, 82
- 角柱的 ~ ... 60, 55
- 錐的 ~ ... 100, 92
- 錐臺的 ~ ... 108, 101
- 角錐的 ~ ... 73, 69
- 角錐臺的 ~ ... 74, 71
- 鼓形的 ~ ... 131, 122
- 球 Sphere ... 114, 105
- 內切 ~ Inscribed ~ ... 125, 116
- 外接 ~ Circumscribed ~ ... 125, 116
- 旁切 ~ Excribed ~ ... 128, 二六
- ~ 的面積 Area of ~ ... 129, 120
- ~ 的體積 Volume of ~ ... 129, 120
- 球心 Center ... 114, 105
- 球面 Spherical surface ... 114, 105
- 球面剩餘 Spherical excess ... 161, 153
- 球面三角形 Spherical tri-angle ... 145, 133
- 等腰 ~ Isosceles ~ ... 145, 133
- 等邊 ~ Equilateral ~ ... 145, 133
- 球面多角形 Spherical polygon ... 143, 130
- 凸 ~ Concave ~ ... 143, 131
- 對頂 ~ Vertical ~ ... 147, 137
- 對稱 ~ Symmetrical ~ ... 144, 132
- 梳形 Spherical wedge ... 135, 126
- 側面 Lateral surface
- 柱的 ~ ... 91, 82
- 角柱的 ~ ... 60, 55
- 錐的 ~ ... 100, 92
- 角錐的 ~ ... 73, 69
- 錐臺的 ~ ... 108, 101
- 角錐臺的 ~ ... 74, 71
- 側面積 Lateral area
- 柱的 ~ ... 96, 87
- 角柱的 ~ ... 60, 55
- 角錐的 ~ ... 73, 69
- 錐臺的 ~ ... 108, 101
- 角錐臺的 ~ ... 74, 71
- 斜高 Slant height
- 正角錐的 ~ ... 74, 70
- 正角錐臺的 ~ ... 74, 71
- 直圓錐的 ~ ... 101, 95
- 直圓錐臺的 ~ ... 108, 101
- 頂點 Vertex
- 錐的 ~ ... 100, 92
- 錐面的 ~ ... 99, 91
- 角錐的 ~ ... 73, 69
- 多面角的 ~ ... 42, 40
- 多面體的 ~ ... 55, 51
- 球面角的 ~ ... 141, 128

球面多角形的～	143, 130	錐 Cone	100, 92
軸 Axis	30, 28	圓～ Circular～	101, 95
圓柱的～	93, 85	直圓～ Right～	101, 95
圓錐的～	101, 95	斜圓～ Slant～	101, 95
截圓的～	121, 110	內切～ Inscribed～	101, 93
正角錐的～	74, 70	外接～ Circumscribed～	101, 93
極 Pole	121, 110	球面～ Spherical～	134, 125
極距 Polar distance	121, 111	旋轉～ Cone of revolution	102, 95
極三角形 Polar triangle	149, 140	相似旋轉～ Similar～	102, 95
象限 Quadrant	122, 111	錐面 Conical surface	99, 91
準線 Directrix		上～ Upper nappe of～	99, 91
柱面的～	91, 82	下～ Lower nappe of～	99, 91
錐面的～	99, 91	錐臺 Frustum of a cone	107, 101
等積 Equivalent	63, 60	直圓～ Frustum of right circular cone	107, 101
距離 Distance		旋轉～ Frustum of cone of revolution	107, 101
球面～ Spherical～	120, 109	歐氏幾何 Euclidean geometry	166, 157
二平行面間～	26, 25	歐拉定理 Euler theorem	56, 52
二不共面直線間～	41, 39	離接命辭 Disjunctive proposition	22, 23
自平面至一點的～	21, 22	邊 Side	
稜 Edge		球面多角形的～	143, 130
二面角的～	30, 28	體積 Volume	63, 60
多面角的～	42, 40	長方體～	66, 64
多面體的～	55, 51	直平行六面體～	69, 65
傾角 Inclination	39, 37	角柱～	71, 68
球形 Spherical segment	131, 122	角錐～	80, 76
單底～ (of one base)	131, 122	柱的～	97, 88
雙底～ (of two bases)	131, 122	圓錐的～	105, 99
球帶 Zone	131, 122	球的～	129, 120
漏斗形 Spherical sector	134, 125	體積單位 Unit volume	63, 60
對角線 Diagonal			
多面體的～	55, 51		
球面多角形的～	143, 130		
截面 Section			
柱的～	92, 83		
多面體的～	55, 51		