农林课程提高与应试丛书

- 涵盖课程重点及难点
- 精设典型题详解及评注
- 选配课程考试模拟及全真试卷

刘光祖　刘迎洲　主编

线性代数

典型题解析及自测试题

西北工业大学出版社

农林课程提高与应试丛书

线性代数
典型题解析及自测试题

主编 刘光祖 刘迎洲

西北工业大学出版社

【内容简介】 全书分为三部分。第一部分为典型题解析，每一章首先给出本章的内容提要，其次给出从众多试卷和习题中精选的本章必考内容所涉及到的各种典型题目并加以详细解证，同时在一些题后的评注中指出了在解同类型题目时应注意的问题，包括解题技巧、易错点和可用的其他方法，在每章的最后给出了适量的习题。第二部分为自测试题，是根据课程要求给出的模拟试题。第三部分附录为习题和试题答案。

本书可作为高等农林院校各专业本科、专科学生的课程辅导及应试参考书，也可以作为考研的强化训练指导书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数典型题解析及自测试题/刘光祖，刘迎洲主编．—西安：西北工业大学出版社，2002.8

（农林课程提高与应试丛书）

ISBN 7-5612-1490-1

Ⅰ．线… Ⅱ．①刘… ②刘… Ⅲ．线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 057904 号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路 127 号 邮编：710072 电话：(029) 8493844
网　　址：http://www.nwpup.com
印 刷 者：西北工业大学出版社印刷厂
开　　本：850 mm×1 168 mm 1/32
印　　张：9.125
字　　数：226 千字
版　　次：2002 年 9 月第 1 版 2002 年 9 月第 1 次印刷
印　　数：1～5 000 册
定　　价：12.00 元

农林课程提高与应试丛书编委会

序

□ 李振岐*

21世纪，社会对德才兼备的高素质科技人才的需求更加迫切。通过行之有效的途径和方法培养符合时代要求的优秀人才，是摆在全社会尤其是高等院校和科学研究院（所）面前的一个艰巨而现实的问题。

为了强化素质教育，使大学生学有所长，增强才智，高等教育部门各有关单位对高等学校公共基础课、技术基础课到专业课的整个教学过程做了大量细致的工作。与之相配合，不少出版社也相继出版了指导学生理解、领会教学内容，增强分析、解决问题能力的辅导读物，其中多数是面向理工院校学生的。这些辅导读物，极大地满足了大学生学习相关课程的需求。

对于农林院校来说，学生们同样需要合适的参考书来帮助他们掌握课程重点和难点，明确解题思路、方法和技巧，提高课程学习能力和水平。不过，这类读物目前比较少见。基于此，西北工业大学出版社的同志们深入作者、读者之中，进行深入的市场调查研究，在广泛听取意见的基础上，组织了众多在农林院校执教多年，具有较高学术造诣的一线教师，精心编撰了这套旨在有效指导农林院校学生学习相关课程，为今后参加课程结业考试、

---

* 李振岐，男，中国工程院院士，植物病理学家和小麦锈病专家，我国小麦锈病研究和植物免疫学教学的主要奠基人之一。现为西北农林科技大学植保系教授、博士生导师，杨凌国家农业高新技术产业示范区专家组组长。

研究生入学考试及为以后工作提供帮助的参考书。

该套丛书首批推出9种，所有书稿几经修改，并经同行专家审定。内容选材符合课程基本要求，并且重在加深对知识的理解和提高读者分析问题、解决问题的能力。我热情地向大家推荐这套丛书，希望它能对广大读者的学习有所帮助，更期望它能在强化素质教育、推动教学改革方面起到积极作用。

李振岐

2001年10月

出版说明

随着经济建设的快速发展和科教兴国战略的实施，社会对高素质专业人才的需求更加迫切。崇尚知识，攻读学位，不仅是一种知识价值的体现，更是社会进步的标志。

过去，农林院校因为带着个“农”字，故一向不在热门之列。不过今年情况有所不同，因为“九五”特别是“十五”规划、“西部大开发”战略的实施，农业开发得到重视，农业单位的积极性得到调动，农业院校毕业生就业的形式随之发生变化。以河南农业大学为例，今年毕业 1 000 人，用人单位的需求达到了 3 000 人，西南农业大学毕业生的供需比则达到了 1∶4，许多农业院校尤其是重点院校的毕业生也变得甚为“抢手”，专业方面畜牧、园艺显得比往年更热，一些冷门专业也开始受到青睐。预计在未来的几年里，将会有更多的单位投身到农业建设中，同时也需要更多的农林院校毕业生。

为了配合全国各农林院校加强高素质、知识型人才的培养，西北工业大学出版社精心策划和组织编写了《农林课程提高与应试丛书》，首期推出 9 种公共基础课，其他课程将陆续出版。

本丛书具有以下 4 大特点。

1. 选题新颖，独树一帜

根据市场需求，全国首家有针对性、有计划性地推出整套农林院校课程的辅导学习用书，填补市场空白，一改广大农林院校学生找不到相关辅导书的尴尬局面。

2. 紧扣大纲，严把尺度

丛书紧紧围绕国家教育部制定的教学大纲和研究生入学考试

大纲，按照“基础知识－例题解析－自测实战”的主线，把握住内容的深浅程度，既保证课程学习时开卷有益，又能对复习应试行之有效。

3. 重视能力，提高技巧

丛书严格遵从不管是课程学习还是考试，其最终目的都是为了提高学生分析问题、解决问题的能力这一主旨，重在通过阐明基础要点及典型例题解析来引导学生掌握学习知识和解决实际问题的方法与技巧，以提高个人的综合素质。

4. 选材得当，重点突出

参加本丛书编写的作者均是从事教学工作多年的资深教师，因此，在丛书内容的取舍、材料的选编以及文字表达方面能更胜一筹，使丛书内容详略得当，材料全而不滥，讲解精而易懂，注释简明扼要。

本丛书的出版得到了多方面的支持和关心，西北农林科技大学、中国农业大学、华中农业大学、华南农业大学、西南农业大学等单位的有关人士为本丛书的出版出谋划策，提出了许多建设性的意见和建议。79 岁高龄的中国工程院院士、西北农林科技大学李振岐教授，献身教育事业 50 余年，德高望重，学识渊博，他在百忙之中出任本丛书的编委会主任，并为本丛书作序，充分肯定了本丛书的价值。为此，我们一并表示衷心的感谢。

我们坚信，这套丛书将为在书海中勤奋进取的同学们指引一条通向成功的捷径，也必将成为在知识海洋中遨游的学子们不断搏击、获取胜利的力量源泉。

丛书编委会

2001 年 10 月

前　言

微积分、线性代数、概率论与数理统计是农林院校各专业必修的三门重要的基础课程。具备较为坚实的数学基础和应用数学知识的能力是学好许多后继课程必需的条件。微积分、线性代数、概率论与数理统计也是农林院校有关专业硕士研究生入学考试的必考内容。

为了加强学生对所学内容的深入理解，帮助他们了解解题规律，掌握解题的方法与技巧，提高应试解题能力，强化技能训练，我们根据农林院校的教学特点，编写了“农林课程提高与应试丛书”之一的《线性代数典型题解析及自测试题》一书。

本书涵盖了教学大纲和研究生考试大纲涉及的全部内容，并注重突出了难点和重点内容。全书分为三个部分。第一部分是典型题解析，也是全书的主要部分；第二部分是自测试题；第三部分是附录。第一部分各章结构安排相同，首先对本章内容作一个全面系统地总结；其次对本章要求掌握的一些基本的、重要的典型例题进行解析；最后给出供读者练习以巩固学习效果的习题。第二部分以课程考试的模拟试卷形式给出了四套自测试题，读者可以自行检测自己的整体水平和应试能力，正在学习此门课程的学生也可从中了解课程考试的要求和命题特点，同时在这部分也给出了四套内容要求不完全相同的考研模拟试题，供报考硕士研究生的读者进行全面检测。第三部分给出了所有习题和试题答案。

本书第一部分各章中选择进行解析的例题，基本包含了课程考试和考研试题中的常见题型。在例题的编排上，按照由易到难、由简到繁的顺序进行，并在其中强调了由特殊到一般的思维方式。

在一些例题解后的“评注”中，或指出解此类题目的规律、要点和易犯的错误，或提示其他可用的方法，或指出可引申的概念等，使读者在读完题解后通过思考，加深对此类题型的印象，总结此类题目的解题规律，使解题能力得到进一步提高。第一部分各章给出的习题基本覆盖了教学大纲和考研大纲的要求，通过演练这些习题，无疑可使读者加深对所学知识的理解，提高应试解题能力。

本书还在注意内容的覆盖面并突出重点的同时，针对学生较为薄弱的环节，加强了综合题、应用题和证明题等有关内容的解析训练，而且难易适度，比较适合实际应试要求。

本书可作为高等农林院校各专业本科、专科学生学习提高和应试的参考书，也可以作为报考硕士研究生的考生强化训练的指导书。

本书的第一章、第二章和第三章由刘光祖编写，第四章、第五章和第六章由刘迎洲编写，吴养会和郑立飞参加了部分内容的编写工作。

由于编者水平所限，错漏和不当之处在所难免，诚请读者指正。

编　者

2002 年 7 月 2 日

目　　录

第一部分　典型题解析

第二部分 自测试题及考研模拟试题

附录 习题及试题答案

第一部分　典型题解析

第一章　行　列　式

一、内 容 提 要

(一) 行列式的概念

n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

其中 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 是 D 中不同行不同列的 n 个元素的乘积，$\tau(p_1\cdots p_n)$ 为该项列标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的反序数，Σ 表示以这样的方式得到的 $n!$ 个项的代数和.

(二) 行列式的性质

(1) 行列式 D 与它的转置行列式 D^{T} 相等，即若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

则 $D=D^{\mathrm{T}}$.

行列式的这一性质表明，凡对行成立的性质，对列也成立.

(2) 行列式的两行(列)互换，行列式改变符号.

(3) 以数乘行列式，等于以这个数乘该行列式的任一行或任一列. 行列式中某一行(列)的所有元素有公因子，则这个公因子可以提到行列式符号的外面.

(4) $D=0\begin{cases}\text{当 } D \text{ 中某一行(列)元素全为零.} \\ \text{当 } D \text{ 中某两行(列)元素对应成比例.}\end{cases}$

(5) 行列式中某一行(列)的所有元素都是两个数之和，则这个行列式等于两个行列式的和：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(6) 将行列式某一行(列)的所有元素的 k 倍加到另一行(列)的对应元素上，行列式的值不变.

(三) 行列式展开

1. 行列式按一行(列)展开

设 D 为 n 阶行列式，则

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}D, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}\quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases}D, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}\quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

2. 行列式按某 k 行(列)展开

在 n 阶行列式 D 中，任选 k 行、k 列，位于这些行与列交叉处的 k^2 个元素按原来相对位置组成的 k 阶行列式 M，称为 D 的一个 k 阶子式. 在 D 中划去 M 所在的行与列后得到的 $n-k$ 阶行列式 N，称为 M 的余子式. 如果 M 所在行的序数是 $i_1,i_2,\cdots,i_k$，所在列的序数是 $j_1,j_2,\cdots,j_k$，则称

$$(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}N$$

为 M 的代数余子式.

设 D 为 n 阶行列式，在 D 中任取 $k(k\leqslant n)$ 行，位于这 k 行中所有 k 阶子式(共有 C_n^k 个)为 $M_1,M_2,\cdots,M_s$，相应的代数余子式为 $A_1,A_2,\cdots,A_s$，则

$$D=M_1A_1+M_2A_2+\cdots+M_sA_s$$

(四) 范德蒙(Vader monde)行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1{}^2 & x_2{}^2 & \cdots & x_n{}^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1{}^{n-1} & x_2{}^{n-1} & \cdots & x_n{}^{n-1}\end{vmatrix}=$$

$$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n}(x_j - x_i) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\cdot$$
$$(x_3 - x_2)\cdots(x_n - x_2)\cdot$$
$$\cdots\cdots$$
$$(x_n - x_{n-1})$$

(五) 克莱姆(Gramer) 法则

1. 非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式 $D \neq 0$ 时，该方程组有惟一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

其中

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \cdots, D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

2. 齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数行列式 $D \neq 0$，则方程组有惟一零解，即

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

反之，如果齐次线性方程组有非零解，则系数行列式 $D = 0$.

二、典型题解析

例 1.1　如果n阶行列式D中为零的元素个数比n^2-n还多，问D的值为何？

解　n阶行列式共有n^2个元素，由于D中等于零的元素个数比n^2-n还多，这说明非零元素的个数比$n^2-(n^2-n)=n$还少，根据行列式定义，每一项都是取自不同行又同列的n个元素的乘积，所以所有项均因含有零元素而为零，故$D=0$.

例 1.2　设行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=5$$

求$D=\begin{vmatrix} a_1 & a_3+2a_1 & a_2 \\ 2b_1 & 2b_3+4b_1 & 2b_2 \\ c_1 & c_3+2c_1 & c_2 \end{vmatrix}$的值.

解　$$D\xlongequal{c_2-2c_1}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_2 \\ 2b_1 & 2b_3 & 2b_2 \\ c_1 & c_3 & c_2 \end{vmatrix}\xlongequal{\frac{1}{2}r_2}2\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_2 \\ b_1 & b_3 & b_2 \\ c_1 & c_3 & c_2 \end{vmatrix}\xlongequal{c_2\leftrightarrow c_3}$$

$$-2\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=-2D^{\mathrm{T}}=-2\times 5=-10$$

例 1.3　计算 2003 阶行列式