

新编《中学各科解难》丛书



高中数学 解难手册

根据国家教委最新教学大纲编写

丛书主编 张盛如

分册主编 方金秋 冯琦琳

中国 社会 出版 社



根据国家教委最新教学大纲

新编《中学各科解难》丛书

高中数学解难手册

丛书主编	张盛如	
丛书副主编	张光勤	
分册主编	* 方金秋	* 冯琦琳
编者	冯琦琳	* 孙永顺
	* 蔡玲	任中文
	* 朱国华	段炳燮
	李忠霞	张辉

(参加新编撰稿者名字前加*号)

中国 社 会 出 版 社

(京)新登字022号

新编《中学各科解难》丛书

高中数学解难手册

丛书主编 张盛如

分册主编: 方金秋 冯琦琳

中国社会出版社出版发行

北京西城区西黄城根南街九号 邮政编码 100032

北京地质印刷厂印刷

新华书店北京发行所经销

*

开本: 787×1092 毫米 1/32 印张: 17 插页: 2 字数: 300 千字

1992年7月第一版 1992年7月第一次印刷

印数: 1—18,000 册 定价: 8.50 元

ISBN 7-80088-287-X/G·107

编委会名单

丛书主编 张盛如

丛书副主编 张光勤

编委

时雁行 祁乃成 温才鉴 康锦屏

方金秋 张盛如 孟广恒 郭正权

黄儒兰 张光勤 张永昌 张景林

陶麟 高敬东 冯琦琳 张风清

林镜仁 唐兆钰

1985.04

新 编 小 序

新编《中学各科解难》丛书，是《中学各科解难》丛书的修订本。

《中学各科解难》丛书（13种）自1990年10月面市以来，深受广大中学师生欢迎，因此出版不到半年，就再版重印。即使如此，书店仍然脱销，不少读者纷纷致函编者或出版社要求代购此书。

为什么这套丛书能在较短的时间内就得到读者的一致认可呢？读者普遍指出：因为这套丛书的编写思路非常适合学生学习实际，既能帮助他们加深对课堂知识的重点、难点的理解，又能帮助他们拓开视野和思路，学到一些相应的课外知识，更重要的是还能向他们提示一些卓有实效的学习方法，使他们能较快地掌握各科学学习规律，迅速将知识转化为能力。所以他们在来信中说：“这是一套可心的书”、“解渴的书”，有的甚至称它为“是无师自通的书”，当然，在来信中，读者也诚恳地指出了丛书在排印和撰写中的某些缺欠，尽管如此，他们仍热切地希望编者和出版社今后能编写和出版更多、更好的这类学习丛书。

作为丛书的编者，他们所编的丛书能得到广大读者的如此赞许，无疑感到鼓舞和欣慰。同时，也更加感到自己责任的重大、为使丛书能更好地体现《中学各科教学大纲》所规定的知识能力要求，更好地为广大中学师生服务，在中国社会出版社领导的大力支持下，根据国家教委新颁《中学各科教学大纲》和读者反馈的意见，我们对这套解难丛书作了较大的修订（除个别学科外）。在这次修订中，我们作了如下努力：

第一，努力体现新颁大纲的各科知识、能力的要求，特别要在培养能力上下功夫；第二，增强丛书的解难性能，对于难点力求能举一反三；第三，选例要注意精要、典型并注意题型的更新；第四，文字表述上要求比原版更为准确、流畅。此外，还补编了高初中《政治解难手册》。我们深信，通过这次修订，《中学各科解难》丛书将会以一个更新的面貌出现在读者面前，因此特在《解难丛书》书题之前，冠以“新编”二字。但愿新编《中学各科解难》丛书能成为广大读者新交的老朋友。

欢迎读者继续为这新开的花朵浇水、除草。

丛书主编 张盛如

1992年2月于北京阳照寓所

目 录

第一部分 代 数

第一章 集合与函数	1
内容综述	1
一、知识要点	1
二、本章要求	5
例题分析	5
一、集合	5
二、函数	14
自测题(1-1)	37
第二章 不等式	39
内容综述	39
一、知识要点	39
二、本章要求	42
例题分析	42
一、不等式的性质	42
二、证明不等式常用的变换方法	45
三、不等式证明的几种方法	57
四、解不等式	72
自测题(1-2)	83
第三章 数列与极限、数学归纳法	86
内容综述	86
一、知识要点	86
二、本章要求	89

例题分析	90
一、数列的基本概念及公式应用	90
二、利用等差数列的几何性质进行计算	94
三、与数列类型有关的问题	96
四、求数列的极限及综合应用	103
五、用数学归纳法证明	122
自测题(1—3)	143
第四章 复数	145
内容综述	145
一、知识要点	145
二、本章要求	147
例题分析	147
自测题(1—4)	167
第五章 排列组合与二项式定理	171
内容综述	171
一、知识要点	171
二、本章要求	173
例题分析	174
自测题(1—5)	193

第二部分 平面三角

第一章 三角函数的定义和基本性质	196
内容综述	196
一、知识要点	196
二、本章要求	201
例题分析	201
自测题(2—1)	210
第二章 两角和与差的三角函数	213
内容综述	213

一、知识要点	213
二、本章要求	215
例题分析	216
自测题 (2—2)	247
第三章 反三角函数和三角方程	250
内容综述	250
一、知识要点	250
二、本章要求	250
例题分析	250
自测题 (2—3)	267

第三部分 立体几何

第一章 直线与平面	269
内容综述	269
一、知识要点	269
二、本章要求	274
例题分析	275
自测题 (3—1)	320
第二章 多面体和旋转体	324
内容综述	324
一、知识要点	324
二、本章要求	324
例题分析	324
自测题 (3—2)	382

第四部分 平面解析几何

第一章 平面直角坐标系	385
内容综述	385
一、知识要点	385

二、本章要求	385
例题分析	385
自测题 (4—1)	394
第二章 直线	395
内容综述	395
一、知识要点	395
二、本章要求	397
例题分析	398
自测题 (4—2)	411
第三章 二次曲线	413
内容综述	413
一、知识要点	413
二、本章要求	415
例题分析	415
自测题 (4—3)	452
第四章 参数方程、极坐标	454
内容综述	454
一、知识要点	454
二、本章要求	459
例题分析	460
自测题 (4—4)	471
第五章 曲线与方程	473
内容综述	473
一、知识要点	473
二、本章要求	473
例题分析	473
自测题 (4—5)	488
附录一 自测题的答案或提示	490
附录二 综合练习及其答案或提示	515

第一部分 代 数

第一章 集合与函数

内 容 综 述

一、知 识 要 点

1. 集合的概念

具有某种属性的对象的全体组成一个集合。

集合的三个特征：

确定性：对于任何一个对象都能够确定它是否为某一个给定集合的元素；

互异性：集合中的任何两个元素都不相同；

无序性：集合中的元素不考虑排列顺序。

集合之间的关系如表 1—1—1。

2. 映射与函数

(1) 映射的概念：

① 映射的定义：设 A 、 B 是两个集合。如果按照某种对应法则 f ，对于集合 A 中任何一个元素，在集合 B 中都有唯一的元素和它对应。这样的对应叫做从集合 A 到集合 B 的映射。

② 一一映射：设 $f: A \rightarrow B$ 是从集合 A 到集合 B 的映

表 1-1-1

名 称	记 号	定 义
A 的子集 B	$B \subseteq A$	若 $b \in B$, 则 $b \in A$
A 等于 B	$A = B$	$A \supseteq B$ 且 $B \supseteq A$
AB 的交集	$A \cap B$	$\{x x \in A \text{ 且 } x \in B\}$
AB 的并集	$A \cup B$	$\{x x \in A \text{ 或 } x \in B\}$
A 的补集	$\overline{A}$	$\{x x \in I \text{ 且 } x \notin A\}$

射。如果在这个映射的作用下、对于集合 A 中不同的元素在集合 B 中有不同的象，而且 B 中每一个元素都有原象，那么，这个映射就叫做 A 到 B 上的一一映射。

③ 逆映射：设 $f: A \rightarrow B$ 是集合 A 到集合 B 上的一一映射，如果对于 B 中的每一个元素 b ，使在 A 中 b 的原象和它对应，这样所得的映射叫做映射 $f: A \rightarrow B$ 的逆映射。

(2) 函数的定义：当集合 A 、 B 都是非空的数集，且 B 的每一个元素都有原象时，这样的映射 $f: A \rightarrow B$ ，就是定义域 A 到值域 B 上的函数。

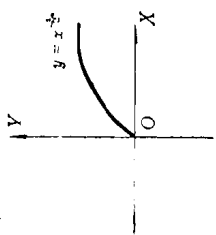
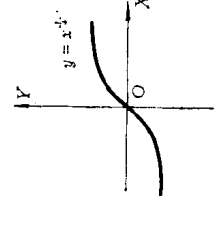
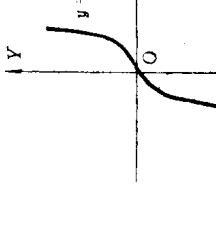
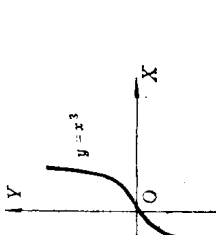
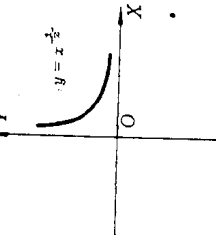
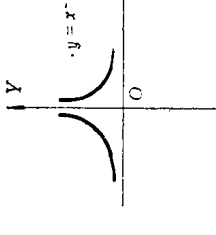
3. 函数的性质

(1) 单调性：对于给定区间上的函数 $f(x)$ 。如果对于属于这个区间的任意两个自变量的值 x_1 、 x_2 ，当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$) 那么就说 $f(x)$ 在这个区间上是增函数 (或减函数)；

(2) 奇偶性：如果对于函数定义域内任意一个 x 都有 $f(-x) = f(x)$ (或 $f(-x) = -f(x)$)，那么 $f(x)$ 就叫做偶函数 (或奇函数)；

(3) 幂函数、指数函数、对数函数

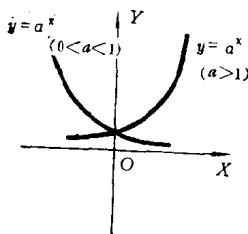
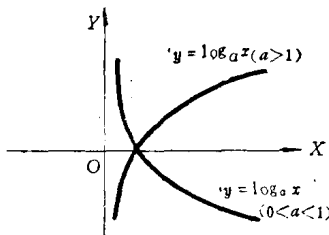
表 1-1-2

函数式	$y = x^a (a \neq 0)$	
定义域	使 $y = x^a (a \neq 0)$ 有意义的实数 x 的集合	
图 象	(以几种常见的比较简单的函数图象为例)  $y = x^{\frac{1}{2}}$  $y = x^{-\frac{1}{2}}$  $y = x^2$  $y = x^3$  $y = x^{-2}$  $y = x^{-3}$	
性 质	(1) $a > 0$ 时, 图象都过 $(1, 1)$ 点和 $(0, 0)$ 点, 在第一象限内函数为增函数; (2) $a < 0$ 时, 图象都过 $(1, 1)$ 点, 在第一象限内函数为减函数.	

① 幂函数如表 1-1-2.

② 指数函数、对数函数如表 1-1-3.

表 1-1-3

	指 数 函 数	对 数 函 数
函 数 式	$y = a^x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$	$y = \log_a x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$
定 义 域	$(-\infty, +\infty)$	$(0, +\infty)$
值 域	$(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
图 象		
性 质	(1) 图象都过 $(0, 1)$ 点且位于 x 轴上方	(1) 图象都过 $(1, 0)$ 点且位于 y 轴右方
	$0 < a < 1$ $a^x = \begin{cases} > 1 & x < 0 \\ = 1 & x = 0 \\ < 1 & x > 0 \end{cases}$ $y = a^x$ 为减函数	$\log_a x = \begin{cases} < 0 & x > 1 \\ = 0 & x = 1 \\ > 0 & 0 < x < 1 \end{cases}$ $y = \log_a x$ 为减函数
质	$a > 1$ $a^x = \begin{cases} < 1 & x < 0 \\ = 1 & x = 0 \\ > 1 & x > 0 \end{cases}$ $y = a^x$ 为增函数	$\log_a x = \begin{cases} > 0 & x > 1 \\ = 0 & x = 1 \\ < 0 & x < 1 \end{cases}$ $y = \log_a x$ 为增函数

4. 反函数的概念

如果确定函数 $y = f(x)$ 的映射 $f: A \rightarrow B$ 是 $f(x)$ 的定义域 A 到值域 B 上的一一映射, 那么这个映射的逆映射 f^{-1} :

$B \rightarrow A$ 所确定的函数 $x = f^{-1}(y)$ 叫做函数 $y = f(x)$ 的反函数。通常记为 $y = f^{-1}(x)$ 。

原函数的定义域是它的反函数的值域；

原函数的值域是它的反函数的定义域；

原函数的图象与它的反函数的图象关于 $y = x$ 对称。

二、本章要求

1. 理解集合的概念、子集、交集、并集、补集的概念，并能通过集合的关系，求集合的交、并、补；

2. 理解集合的包含、相等、空集、全集，并能用集合来表示不等式和方程的解；

3. 通过集合与映射的概念，加深对函数有关概念的理解，会求函数的定义域、值域，掌握基本函数图象的画法；

4. 掌握函数的有关性质，会判断函数的单调性与奇偶性；

5. 掌握指数函数、对数函数的概念、图象与性质，会解简单的指数方程与对数方程；

6. 理解互为反函数的图象与性质。

本章重点是：(1) 集合间的运算；(2) 函数、反函数、幂函数、指数函数、对数函数的图象、性质。

本章难点是：集合间的关系，用映射观点来刻画函数及其性质，以及函数性质的证明。

例题分析

一、集合

例 1 判断下列命题是否正确

(1) 所有高个子构成一个集合。

(2) 点(1, 2)、(1, 3)构成的集合是 $\{(1, 2)(1, 3)\}$ 。

(3) 空集 ϕ 与集合 $\{\phi\}$ 相等。

(4) 三角形的顶点是三角形集合中的元素。

【解】(1) 不正确，因为“高个子”元素特征不能准确判断，元素不确定。

(2) 正确，因为集合是由两个点(1, 2)、(1, 3)组成的，而不是由1 2 3这三个数构成的。

(3) 不正确，因为 ϕ 是空集，而集合 $\{\phi\}$ 是以 ϕ 为元素的集合。

(4) 不正确，因为三角形集合中的元素是三角形，而不是点。

例 2 设集合 $X=\{0,1,2,3,4,5,7\}$, $Y=\{1,3,6,8,9\}$, $Z=\{3,7,8\}$,

那么集合 $(X \cap Y) \cup Z$ 是

(A) $\{0,1,2,6,8\}$, (B) $\{3,7,8\}$,

(C) $\{1,3,7,8\}$, (D) $\{1,3,6,7,8\}$.

(85年高考题)

【解】 根据交、并集定义，

$$\begin{aligned}\text{由于 } (X \cap Y) \cup Z &= \{1\} \cup \{3,7,8\} \\ &= \{1,3,7,8\},\end{aligned}$$

故选 (C)。

例 3 设 $M=\{x|x \leq 0\}$ 则下列关系正确的是()；

(A) $0 \subset M$ (B) $\{0\} \in M$

(C) $\{0\} \subset M$ (D) $\phi \in M$.

分析：从集合与集合，元素与集合的关系，符号正确表示进行选择。

【解】 $\because$ “0”是元素， M 是集合，其关系不能用包含符号，故排除（A）

又 $\{0\}$ 是集合， M 也是集合，其关系不能用属于符号，故排除（B）

同理可排除（D）

故选（C）

注：（1）对于数学选择题，或用直接选择法，即从题设条件出发，通过计算、推理等途径作出正确选择；或用间接法，即从题设条件出发，排除错误的选择，得出正确的选择。前者如例2，后者如例3。

（2）通过例3，我们要注意“ $\in$ ”与“ $\subseteq$ ”区别，“ $\in$ ”用于元素与集合的属于关系；“ $\subseteq$ ”用于集合与集合的包含关系，切勿混淆。

选择题是一种结构新颖的题目，它的特点是给出题目，同时给出几个答案供选择，有且只有一个答案是正确的，因此它的解法比常规的解法丰富而灵活。常用方法有：（1）直接推证法（推算对照法）：从题目条件出发，经过推证或计算求得结果，再与所供选择的答案进行对照、作出判断；或在求解过程中不断与所供选择的答案进行对照，作出判断的方法。（2）筛选法（直接、特殊值、逆推、综合等筛选法。）：选取满足题设条件的特殊值代入，然后对照选择答案，淘汰不正确答案；从题设条件出发，在推证过程中，逐步排除某些结论，进而得出正确判断；从结论出发，再结合某些条件进行推理筛选；同时通过对结论与某些条件分析或推算进行筛选。（3）特殊值法：根据选择题的特殊点，选取满足条件的特殊值代入，并用所推算的结果来进行判断。（4）图象法：通过图象进行分析判断的方法。举例如下：

例4 已知全集 $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ， $A = \{3, 4, 5\}$ ， $B = \{1, 3, 6\}$ ，那么集合 $\{2, 7, 8\}$ 是