高等学校教学用書

三角学專門教程

上册

С. И. 諾渥塞洛夫著

高等教育出版社

高等学校教学用書

三角学專門教程

上册

C. И. 諾渥塞洛夫著
鄭醒華等譯

高等教育出版社

本書系根據苏联國立"苏維埃科学"出版社(Государственное издательство "Советская наука")出版的諾渥塞洛夫(С. И. Новоселов)著"三角学專門教程"(Специальный курс тригонометрии)1954年第二版譯出。原書經苏联文化部高等教育司審定为师范学院教学参考書。

本書由西北大学鄭醒華、張以信、張玉田与紀珽翻譯，趙根榕校訂。

三角学專門教程

上 冊

С. И. 諾渥塞洛夫著

鄭 醒 華 等 譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇號

(北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號)

中華書局上海廠印刷 新華書店總經售

書號 13010·42 開本 850×1168 1/32 印張 8 2/16 字數 195,000

一九五六年七月上海第一版

一九五六年七月上海第一次印刷

印數 1—20,000 定價(8)¥0.95

序

本書預計作为师范学院物理数学系初等数学專門教程“三角学”部分的教学参考書之用。編寫这本書的时候所遵循的原則和我在“初等代数專門教程”一書的原則一样，在那本書的序言中已經把它們詳細敍述了，玆不复贅。

高等师范学校的学生必須深入与系統地研究初等数学，卽研究他們將來在中学里要教的那門科目，这恐怕是不需要多加說明的了。在高等师范学校中所研究的“高等”数学的各門課程，虽然它們具有巨大的价値，但它們本身並不能保証未來的教师具备必要的業务上的修养。

以前，人們錯誤地認为：师范学院的学生僅只在学習教学計划中称为“初等数学專門教程”的那个科目时才研究初等数学。这个科目只包含初等数学的相当少的和主要的問題，同时只研究它們相互間的关条与它們跟“高等”数学的諸科目之間的关系。然而数学教学法的研究、教育实踐的学習与特別实習課的工作却都需要学生認眞地独立研究初等数学。因此我認为：关於初等数学的教学書籍，不能嚴格地局限於“專門教程”大綱的范圍，而应当包含初等数学的系統的、深入的、有科学根据的与全面的敍述。在初等数学的教科書与教学参考書中，学生应当能找到他在中学数学教程的內容方面所發生的各种各样的問題的答复。这些理由，迫使我在寫这本書时給出了关於三角的有系統的敍述；其实在“專門教程”大綱中，三角問題比較起來所佔的比重並不大。

本書应当看成我的“初等代数專門教程”一書的延續，所以凡

是在"初等代数專門教程"中的对三角学教程的某些部分是必要的那些問題(例如,方程与不等式的一般概念),在課文中不再敍述,而只引証"初等代数專門教程"里有关的節次。

本書第七章包含复数域的初等超越函数論的基礎。这些材料本來並不屬於三角学。我把它加到三角学教程中來,是因为不能彼此無关地來研究复数域的指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数。

必須指出:初等数学"專門教程"是"年青的"、尙待建成的教学科目;現行大綱只在不久以前編成;而教学書籍还是首次寫作。因此本書不可能沒有缺点,我希望从高等师范学校的教师、中学教师与大学生那里得到有助於消除这些缺点的批評、願望与意見。

我認为有必要指出莫斯科区师范学院代数教研組所給予我的巨大的帮助,謹向該教研組主任安得洛諾夫(И. К. Андронов)与組員奥庫湼夫(А. К. Окунев)及希姆比列娃婭(Е. П. Шимбиревая)表示眞誠的謝意。

謝謝拉里切夫(П. А. Ларичев)、庫圖佐夫(Б. В. Кутузов)、孟傑諾夫(П. С. Моденов)与列紹夫(Н. О. Решов)在我編著这本書时所給予的帮助;謝謝阿塔別科夫(Н. А. Атабеков)为本書繪制插圖。

在这第二版中,为了適应师范学校物理数学系的現行大綱,新添一章:"球面三角学原理"並改正了第一版中的許多錯誤。

所有关於本書的批評与願望,請寄 Москва, 64, Подсосенский пер., д. 20, Издательство "Советская наука".

С. И. 諾渥塞洛夫

1954年1月1日,於莫斯科

目　　錄

引　　論

第一章　三角函数的几何理論

第二章　加法定理及其推論

第三章 反三角函数

引　　論

§1. 論三角学教程的內容

三角是由計算实踐的需要產生的，也就是由於創造一种工具，以便按照各种几何圖形的足夠个已知元素而計算其他元素的这种需要而產生的。早在古代希臘，由於解一系列天文学的計算問題，三角就得到了相当大的發展。第九到十三世紀中，中亞細亞——塔什克，烏茲別克，阿捷尔拜疆——的科学家的著作，在作为独立科学的三角学的建成这一方面有着奠基的意义。虽然三角学得到了作为具有專門研究法的科学科目的独立性，但畢竟它的最終目的还在於制定最簡單的几何圖形(平面三角形和球面三角形)的元素的計算方法。三角函数的学說一直是以几何作圖为基礎的；用几何方法所建立的三角函数間的代数关系，使我們能夠用代数方法，以研究三角函数、以施行变換、以建立几何圖形元素間的各种关系。这样一來，便形成了以几何为基礎同时又廣泛应用代数方法的三角学所特有的性質。

科学的進一步的發展証明，三角函数的价値不僅在於制定解决几何計算問題时所必要的工具；在研究週期过程时这些函数在力学和物理上也獲得了重要的意义。这样，三角函数的理論有了独立的意义，並且引起了这个理論的不依賴於几何的解析結構的需要。

三角函数的解析理論奠基於偉大的学者、彼得堡科学院院士尤拉的著作。偉大的俄罗斯数学家罗巴切夫斯基提出不依賴歐氏

几何系統以定义三角函数的問題后，創立了三角函数的解析理論，冪級数的工具是这理論的基礎。

現代，三角学作为独立的科学已不存在：关於几何圖形的元素的計算問題自然屬於几何，这兒三角只起着"輔助的"作用；另一方面，三角函数的解析理論自然归併到分析中講述初等函数的一般理論那一章里。虽然現在三角学不再作为独立的科学而存在，但是它仍旧是很重要的独立的教学課目。在中学的数学教程中三角学确实佔有相当大的比重。

因为建立三角函数解析理論所必需的十分發达的解析工具远超出大綱的范圍，所以中学的三角学教程势必要以几何为基礎。此外，三角函数的几何理論在很大的程度上適应着三角学的实际应用。

在現代中学三角学教程里反映出兩种路線，即函数路線和計算路線。第一种表現在三角函数作为数字自变量的函数的研究上，由於三角函数在現代数学解析中、物理中、力学中、工程中起着巨大的作用，而有重要的原則性的价值。第二种表現在几何圖形的元素的計算方面，因为給出几何、物理、工程、天文、測量等等所必需的計算方法，而有重要的实用价值。①

按照师范学院初等数学專門教程的总任务，三角学專門教程

① 中学教程中上述兩种路線的適当配合是数学教学法的任务。我們只提出，下面兩种極端的观点是同样錯誤的。

第一种極端表現在忽視函数路線而認为三角学只是"三角形的解法"。这种在許多旧教科書中佔統治地位的观点現在已变成史話了。

另一种極端表現在忽視計算的路線。依照國外"改良主义运动"的函数濫用，"三角形解法"被認为是某种"無思想性"与"低級的"东西。这种观点之不能为苏維埃教学法所接受，正認为三角学好像只是数学分析的一章，因而"取消"三角学作为一个独立的教学課目的那种不切实际的想法一样。國外的这种歪曲以及与其类似愚笨的主張，比方說將內容貧乏的微積分"概要"放到中学教程中，在現在先進的教学法中是不受欢迎的。

的目的在於加深、發展三角学教程，並打下它的科学基礎以及通曉三角的实际应用。三角学專門教程包含中学数学教程中所有問題的廣泛敍述，因此与初等数学專門教程的其他章節同样，从中学教师業务修养的观点來看，它有很重要的价值。师范学院的教学計划包含着数学解析与函数論的詳細的教程。因此專門教程中包括三角函数的解析理論和它有关的初等复变函数的学說的基礎，这可使未來的教师領会到中学教程中数学科目的科学內容。

在引論这一章中，概述一下在师范学院所研究的其他課目中已知的知識，和作为三角学教程以后各章敍述的基礎的知識。

§ 2. 射影理論的基本概念

为了寫出由点 A 和 B 所界的線段的确定方向，按一定次序給出点 A 和 B；第一个点（寫在第一个位置上的）叫做線段的始点，第二个点（寫在第二个位置上的）叫做它的終点（圖 1）。有向線段叫做向量。

設 $\boldsymbol{AB}$ 是已知向量；經过点 A 和 B 的直線 l 含有線段 AB 的一切点；向量 $\boldsymbol{AB}$ 的始点 A 將直線 l 分成兩条射線，其中一条包含向量的端点 B，我們說：这条射線和向量 $\boldsymbol{AB}$ 的方向相同；另一条不包含点 B，我們說：这第二条射線和向量的方向相反（圖 2）。

圖 1.

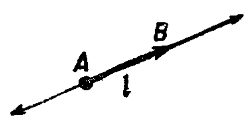

圖 2.

如果点 A 和 B 相重，就說：向量 $\boldsymbol{AB}$ 是零向量。

將某个線段 l 取作長度單位。線段 AB 的長（对於已知的量度單位來說）叫做向量 $\boldsymbol{AB}$ 的長或模。向量的模是这样表示：$|\boldsymbol{AB}|$。

設 AB 和 CD 是位於同一直線 l 上的兩个向量，而且都異於零向量；这兩个向量可能方向相同，也可能方向相反。这表示下列事实：第一种情形中，直線 l 上和 AB 同方向的射線与和 CD 同方向的射線有公共部分，它也是直線 l 上的射線（圖 3）；第二种情形中这兩条射線的公共部分或者是線段，或者是点（公共始点），或者是空集合（兩射線沒有公共部分）（圖 4）。

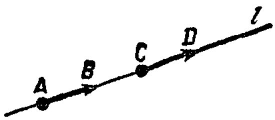

圖 3.

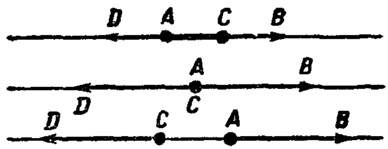

圖 4.

設 AB 和 CD 是平面上位於二平行直線上的兩个異於零向量的向量；这二向量可能方向相同，或者方向相反。这表示下列事实：第一种情形中已知向量的終点 B 和 D 位於平面上直線 AC 的同側，直線 AC 是他們始点的連線（圖 5）；在第二种情形中点 B 和 D 位於直線 AC 的異側（圖 6）。

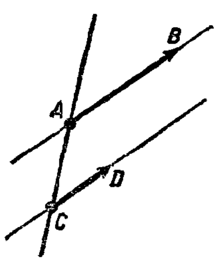

圖 5.

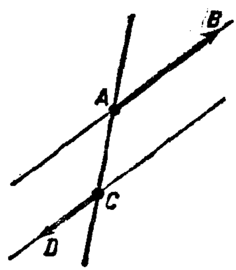

圖 6.

兩向量当且僅当它們平行，或位於同一直線上、方向相同、且長度相等时，才認为是相等的（圖 7）。

用和某向量相等的向量來代替它，叫做向量的平移。

設 l 是已知直線，在其上給出兩点：原点 O 和單位点 E，这时線段 OE 的長度等於 1。我們說：在直線上由点 O 和 E 确立了正方向：直線 l 上各种異於零向量的向量，其方向与單位向量 $\boldsymbol{OE}$ 的方向相同（相反）时，看成正（負）方向（圖 8）。零向量認为是沒有方向的。

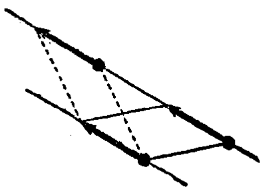

圖 7.

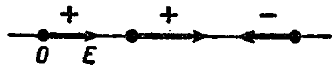

圖 8.

确立了正方向和选取了單位線段的直線，叫做軸。

設 $\boldsymbol{AB}$ 是位於軸 l 上的向量；如果它有正方向，它的長度就叫做向量的量；如果有負方向，它的長度加上負号叫做向量的量；零向量的量看成等於零。向量 $\boldsymbol{AB}$ 的量是这样表示：AB。

向量加法按照下列法則進行：为了加已知向量，应当（利用平移法）使第二个向量的始点連結到第一个的終点上，第三个向量的始点連結到第二个向量的終点上，余依此类推，然后作一連結第一向量的始点和最后向量的終点的向量。

設 A_1、A_2、…、A_n、A_{n+1} 是已知点；这时按照上述法則，有：

$\boldsymbol{A_1A_2}+\boldsymbol{A_2A_3}+\cdots+\boldsymbol{A_nA_{n+1}}=\boldsymbol{A_1A_{n+1}}$　（圖 9）。

在特別情形，如点 A_1、A_2、…、A_{n+1} 位於一直線上（圖 10，

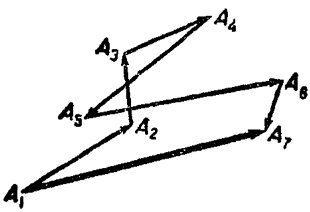

圖 9.

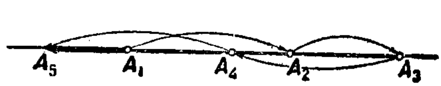

圖 10.

$n=4$)，法則也可適用。如 a_1、a_2、…、a_n 是位於軸上的向量 $\boldsymbol{A_1A_2}$、$\boldsymbol{A_2A_3}$、…、$\boldsymbol{A_nA_{n+1}}$ 的量，則向量和(或叫和向量)的量等於被加向量的量的和：

$$A_1A_{n+1}=A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_nA_{n+1}$$

或

$$A_1A_{n+1}=a_1+a_2+\cdots+a_n。$$

最后的这个等式，在几何中，对於兩个被加向量的情形，可以借助於直接討論点 A_1、A_2、A_3 的一切可能的相互配置(六种情形)而建立，用完全归納法，且可以推廣到任意个被加向量的情形。

如所週知，

1°. 自点 A 引至軸 l 的垂線的垂足 A_1 叫做点 A 在軸 l 上的射影。

2°. 向量 $\boldsymbol{AB}$ 与軸 l 在同一平面上。联結 $\boldsymbol{AB}$ 的始点的射影 A_1 与終点的射影 B_1，得向量 $\boldsymbol{A_1B_1}$。这个向量的量 A_1B_1 叫做 AB 的射影。$\text{пр}_l\,\boldsymbol{AB}=A_1B_1$ (圖 11)。为簡便起見，向量 $\boldsymbol{A_1B_1}$ 的量 A_1B_1 与向量 $\boldsymbol{A_1B_1}$ 本身，常常用同一術語，統叫做射影。

向量平移时它在已知軸上的射影不变 (圖 12)。

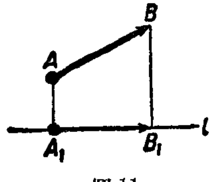

圖 11.

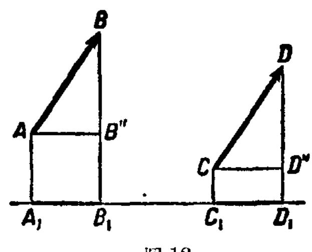

圖 12.

設 $A_1A_2\cdots A_{n+1}$ 是平面上的任意折線。把这个折線的各節看作向量 $\boldsymbol{A_1A_2}$、$\boldsymbol{A_2A_3}$、…、$\boldsymbol{A_nA_{n+1}}$，其方向由頂点的給出次序而决定。和向量

$$\boldsymbol{A_1A_{n+1}}=\boldsymbol{A_1A_2}+\boldsymbol{A_2A_3}+\cdots+\boldsymbol{A_nA_{n+1}}$$

也叫做已知折線的封閉向量。下面关於折線射影的基本定理是成立的（圖 13）。

定理 折線各節在軸上的射影的和等於封閉向量在該軸上的射影；換句話說，向量和的射影等於被加向量射影的和。

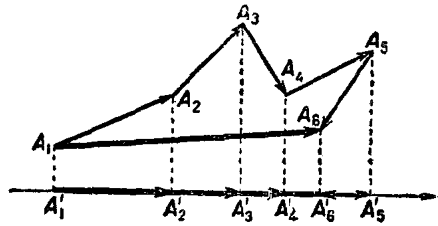

圖 13.

事实上，設 A'_1、A'_2、…、A'_n、A'_{n+1} 是已知折線的頂点在軸 l 上的射影；对於点 A'_i 的任意配置，我們有：

$$A'_1A'_{n+1}=A'_1A'_2+A'_2A'_3+\cdots+A'_nA'_{n+1},$$

卽 $$\text{пр}\ \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_{n+1}=\text{пр}\ \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2+\text{пр}\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3+\cdots+\text{пр}\ \boldsymbol{A}_n\boldsymbol{A}_{n+1}。$$

特别情形中，如点 A_1 与 A_{n+1} 重合，则已知折線是封閉的；封閉向量是零向量，因而折線的封閉向量在軸上的射影等於零。

§ 3. 角及其量度

已知从一点 O 發出的二射線 h 和 k 的組。这个射線組把平面分为兩部分。一般情形，这兩部分中有一个是凸的，而另一个不是凸的（圖 14）①。

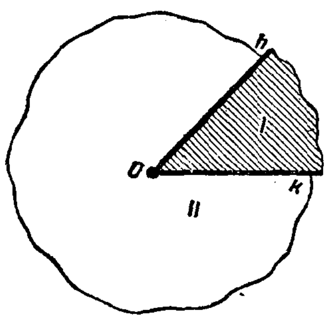

圖 14.

只有在射線 h 和 k 重合为一直線的情形下才不是这样的，在这种情形下，平面的兩部分（半平面）都是凸的（圖 15）。

在几何学中，把从一点 O 發出的

① 係大家所知道的，如平面部分包含其中無論那兩个点的联線，则这平面部分叫做凸的。

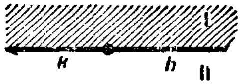

圖 15.

二相異射線 h 和 k 的組叫做角，而且指明，把平面被已知射線所分成的兩部分中的那一部分看作角的內部。平面的这部分叫做角的內域，平面的另一部分叫做外域，射線 h 和 k 叫做角的边，而点 O 叫做角的頂点。

有时候不僅把二射線 h 和 k 的組叫做角，而且还把形成角的內域的平面部分連它的边一起也叫做角。

在三角学中，把角理解为从某一点 O 發出且經过以点 O 为頂点的某角的內域的一切射線的集合以及它的边 h 和 k (圖 16)。这与运动学中角的概念相当，运动学中，將角看成平面上的射線，繞点 O 旋轉时，所扫过的路徑，这时边 h 和 k 是旋轉射線的开始位置和終了位置，而其余的“內”射線是它所經过的位置。

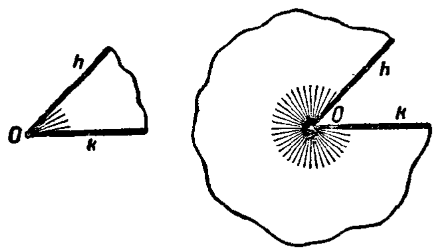

圖 16.

从点 O 發出的二相異射線 h 和 k 決定兩个角，其中一角的內域是另一角的外域；我們把这兩个角互称为补周角。

如射線 h 和 k 重合，則在这种情形也說有兩个互补周角；它們中間一个是零，它的內域是空集合；另一角的內域是除射線 $h=k$ 以外的整个平面，这个角叫做周角 (圖 17)。

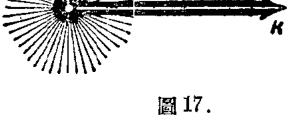

圖 17.

現在來考察圍成已知角的一条射線，例如 h，但預先假定这个角異於零角和周角。如延長射線 h (延过点 O)，則所得直線將平面分成兩部分——兩个半平面。其中的一个半平面 I 或者包含着已知角的內域，或者它本身被角的內域包含着，另一半平面

II 或者包含着补周角的內域，或者它本身被这个域包含着（圖 18）。

我們說：就已知角的边 h 來說半平面 I 位於內向。

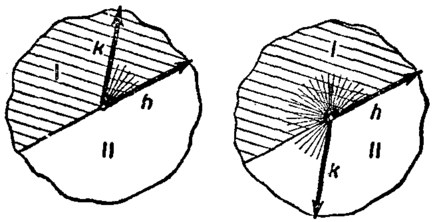

圖 18.

对於零角來說，位於內向的半平面概念沒有意义。对於周角应加以特别說明，說明这兩半平面的哪一个看成位於內向。

設 O 及 O' 是平面上二角的頂点，而 h、k 和 h'、k' 是它們的边。使这二角的任意兩边，例如 h 和 h' 重合，使位於这兩边的內向平面重合①。換句話說，就是由重合二边 h 与 h' 來互相重合二角，使位於內向的半平面重合。如这时边 k 和 k' 重合（圖 19），則角 $\angle(h, k)$ 与 $\angle(h', k')$ 相等（全等），比如設边 k 和 k' 不重合，則角不等。例如，設边 k' 落在角 $\angle(h, k)$ 的內域，这时（圖 20）$\angle(h, k) > \angle(h', k')$，同时將角 $\angle(h, k)$ 考慮作角 $\angle(h', k')$ 与角 $\angle(k', k)$

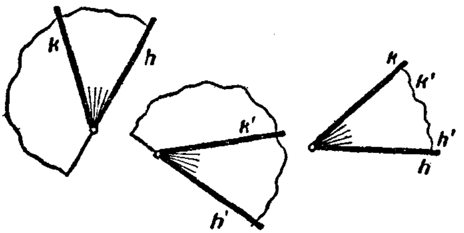

圖 19.

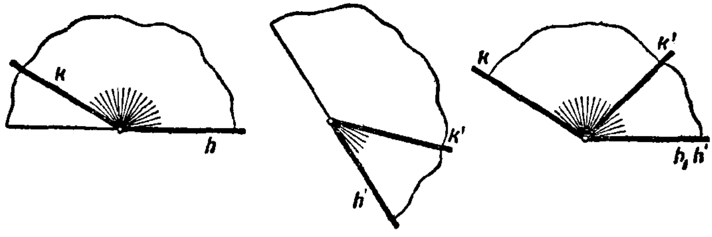

圖 20.

① 重合时可以利用运动、反射即平面的"翻轉"。

的和，这里將角 $\angle(k', k)$ 的內域看成平面上含在角 $\angle(h, k)$ 內的部分。这样，就有：

$$\angle(h, k)=\angle(h, k')+\angle(k', k)。$$

角的量度按照数量量度的一般原理進行。採取某个角作为量度單位，給每个非零角以一个正数——它的量。同时照常，等角有相等的量；兩角和的量等於它們的量的和（量的可加性）；取作量度單位的角的量等於 1；零角的量等於零。

現在來考察中心在已知角 φ 的頂点，半徑为 R 的任意圓周。角 φ 的內域在圓周上截取一个弧 v（圖 21）；說：已知角 φ 張在这个弧上。設 σ 是为取作量度單位的角張於其上的弧，弧 v 的長对弧 σ 的長的比 $\frac{v}{\sigma}$ 不依賴於圓周的半徑 R，因为当 R 改变时半徑为 R 的圓扇形变为相似的扇形，且二共形圖形的对应元素的長的比相同。將弧 σ 取作已知圓周的弧的量度單位，那么角 φ 的量和弧 v 的量（用这个單位來量）可用同一个数表出。这样，圓周的弧和張於其上的角之間能作成一一对应。同时，对应的角和弧可用角單位及其对应的弧單位的相同数來計量。

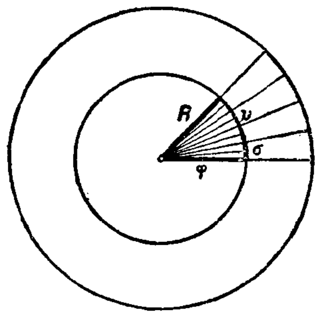

圖 21.

在計算的実踐中，平常取等於周角的 $\frac{1}{360}$ 的角作为角的量度單位，如众所周知的，这个角叫做度。在初等几何学中，常把角的量用"d 的分数"來表示，这意思是取直角作为量度單位。在数学解析和各种理論的討論中，取弳（弧弳）作为角（或弧）的量度單位。弳量的引入是以下面的命題作为基礎的。

張有已知角（中心角）的弧的長，对圓周半徑的比，由給定的角确定（不依賴於半徑的大小）。