运筹学

YUNCHOUXUE

●林齐宁 编

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

运筹学

林齐宁 编

北京邮电大学出版社
·北京·

内容简介

本书主要介绍在生产管理中常用的运筹学理论和方法.全书共九章,分别介绍了线性规划与单纯形法,对偶理论与灵敏度分析,运输问题,整数规划,动态规划,图与网络分析,随机服务理论概述,生灭服务系统,存储理论.在介绍各种运筹学理论和方法时,尽量结合生产管理的具体应用背景,从而使读者比较容易理解和掌握运筹学解决实际问题的基本原理和方法.

本书可作为工商管理硕士,经济、管理类本科和专科学生的运筹学课程教材和教学参考书,也可供经济和经营管理人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

运筹学/林齐宁编．—北京:北京邮电大学出版社,2002

ISBN 7-5635-0674-8

Ⅰ.运… Ⅱ.林… Ⅲ.运筹学 Ⅳ.022

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 101978 号

书　　名:运筹学
编　　者:林齐宁
责任编辑:刘　洋
出 版 者:北京邮电大学出版社(北京市海淀区西土城路 10 号)邮编:100876
发行部电话:(010)62282185　62283578(传真)
经　　销:各地新华书店
印　　刷:涿鹿印刷有限责任公司印刷
开　　本:850 mm×1 168 mm　1/32　　**印　　张**:8.875
字　　数:229 千字　　**印　　数**:1—4 000 册
版　　次:2003 年 1 月第 1 版　2003 年 1 月第 1 次印刷

ISBN 7-5635-0674-8/O·52　　定价:14.00 元

如有印装质量问题请与北京邮电大学出版社发行部联系

前　言

运筹学是采用定量的优化方法解决生产管理过程中的具体问题.运筹学的有关理论和方法已在生产管理中得到广泛的应用.因此,运筹学是工商管理硕士,经济、管理类本科和专科学生的必修课,也是许多经营管理人员非常重视和迫切需要了解和掌握的一门课程.

本书介绍了在生产管理中常用的运筹学理论和方法.主要介绍了线性规划与单纯形法,对偶理论与灵敏度分析,运输问题,整数规划,动态规划,图与网络分析,随机服务理论概述,生灭服务系统,存储理论等内容.

本书是根据作者编写的《运筹学》讲义的基础上改编而成.其中,习题部分由忻展红老师编写,研究生张悦和韩洁参加了运输问题、整数规划和存储理论等三章的部分内容编写工作,研究生肖云和王翠英参加了文字整理和录入工作,特此表示感谢.

由于作者水平有限,书中肯定有不少错误和不妥之处,恳请读者批评指正.

林齐宁

2002 年 11 月

目　　录

绪 论

一、运筹学的起源和发展过程

运筹学在英国称为 Operational Research，在美国称为 Operation Research(缩写为 O. R.).Operation Research 原意是操作研究、作业研究、运用研究、作战研究，译作运筹学，是借用了《史记》“运筹于帷幄之中，决胜于千里之外”一语中“运筹”二字，既显示其军事的起源，也表明它在我国已早有萌芽.

运筹学是在第二次世界大战期间发展起来的一门新兴学科.在二战期间，英国空军为了应用雷达探测德国飞机的空袭，成立了一个由物理学家、数学家、天文学家和军人组成的作战研究小组，称为空军运筹学小组，专门研究作战防空问题，其主要任务包括防卫战斗机的合理布置等.由于空军运筹学小组的出色工作和成效显著，英国海军也成立了类似的作战研究小组，专门研究运输船队护航问题、反潜深水炸弹的合理爆炸深度等问题，结果均取得良好的效果.如研究反潜深水炸弹的合理爆炸深度后，使德国潜艇被摧毁的数量增加到 400％.

二次世界大战以后，英、美等国在军队中成立了更加正式的运筹研究组织，继续研究战略、战术及武器运用等问题.此外，运筹学也开始在工业、农业和经济社会等其他领域得到广泛应用.随着运筹学应用范围不断扩大和深入，一些专家、学者也对运筹学理论进行了更加深入的研究.美国运筹学家 P. M. Morse 与 G. E. Kimball 于 1952 年出版了《运筹学方法》一书，并把运筹学定义为：“运筹学

是在管理领域，运用数学方法，对需要管理的问题统筹规划，作出决策的一门应用科学."

从 20 世纪 40 年代后期开始，一些国家先后成立了运筹学专门学会.1948 年，英国首先成立了运筹学会，美国于 1952 年成立了运筹学会，法国于 1956 年成立了运筹学会，日本和印度于 1957 年成立了运筹学会.到 1986 年为止，世界上已有 38 个国家和地区成立了运筹学会或类似组织.1959 年，英、美、法三国发起成立了国际运筹学联合协会(IFORS)，以后各国的运筹学会纷纷加入.此外，还有一些其他地区性运筹学会组织，如欧洲运筹学协会(EURO)成立于 1976 年，亚太运筹学协会(APORS)成立于 1985 年.

20 世纪 50 年代中期，我国著名科学家钱学森、许国志等教授将运筹学从西方引入国内.1956 年在中国科学院力学研究所成立了运筹学小组，1958 年成立了运筹学研究室.1960 年在山东济南召开了全国应用运筹学的经验交流和推广会议，1962 年和 1978 年先后在北京和成都召开了全国运筹学专业学术会议，1980 年 4 月成立了中国运筹学会.著名数学家华罗庚教授任运筹学会第一届理事会理事长.此后，著名数学家越民义、徐光辉、章祥荪教授先后任运筹学会理事会理事长.目前，运筹学已在我国各个部门得到广泛应用.

随着科学技术和生产的发展，运筹学本身也在不断发展.目前，运筹学已发展成为具有许多分支的研究学科，如线性规划、动态规划、图与网络分析、排队论、存储论等.下面简单介绍一些运筹学的分支学科.

(一) 线性规划

在生产和经营管理工作中，如何有效地利用有限的人力和物力取得最优的经济效果，或在预定的目标条件下，如何花费最少的人力和物力去实现目标，这类问题统称为规划问题.规划问题用数学语言描述为：根据研究问题的目标选取适当的一组变量，问题的

目标用变量的函数形式表示,该函数称为目标函数,问题的约束条件用一组由选定变量组成的等式或不等式表达,这些等式或不等式称为约束方程.即规划问题由一个或几个目标函数和一组约束方程构成.

最简单的规划问题是线性规划.线性规划只有一个目标函数,且目标函数和约束方程都是线性函数.线性规划建模相对简单,有通用的算法和计算机软件,是运筹学应用最为广泛的一个分支.用线性规划求解的典型问题有生产计划问题、混合配料问题、下料问题、运输问题等.

当线性规划的变量只能取整数时,线性规划转变为整数线性规划,简称整数规划.特别地,当线性规划的变量只能取整数 0 或 1 时,整数规划称为 0-1 整数规划,简称 0-1 规划.0-1 规划的一个典型应用是任务分配问题.

如果规划问题的目标函数或约束方程为非线性函数,则规划问题称为非线性规划.非线性规划是线性规划的进一步发展和继续.由于大多数工程物理量的表达式是非线性的,所以,非线性规划在各类工程中的优化设计有广泛的应用,是优化设计的有力工具.

(二) 动态规划

动态规划本质上也是一个规划问题,因为动态规划也有目标函数和约束方程.但是,由于动态规划是一种解决多阶段决策问题的优化方法.多阶段决策有"动态"含义,所以,通常把处理多阶段问题的方法称为动态规划.动态规划是 20 世纪 50 年代初由美国数学家贝尔曼(R.Bellman)等人提出的,该方法根据多阶段决策问题的特点,提出了决策多阶段决策问题的最优化原理.利用动态规划的最优性原理,可以解决生产管理和工程技术等领域的许多实际问题,如最优路径、资源分配、生产计划和库存等.由于动态规划的解题思路独特,所以它在处理某些最优化问题时,比线性规划或非线性规划更有效.

（三）图与网络分析

在日常生活中，我们可见到各种各样的图，如道路交通图、电话网络图等．这些图的共同特征是由一些节点和节点之间的连线组成．当然，对于不同图，节点与节点之间的连线含义不同．在道路交通图中，节点表示道路交叉点，节点之间的连线表示道路；而在电话网络图中，节点表示交换局，节点之间的连线表示中继线．另外，根据研究的具体图与网络对象，节点之间的连线可赋予特定含义的一个或若干个权值，如两点之间的距离、两点之间的流量等．图与网络分析的重要内容有：任意两点之间的最短路径、给定网络的最大通过流量等．图与网络分析在研究各类网络结构和流量优化等领域有重要的应用．

（四）随机服务系统理论

随机服务系统理论是研究随机服务系统的数学理论和方法．在日常生活中，我们经常可见到各种各样的随机服务系统，如在银行办理存、取款业务，在商店购买商品，电话局对电话用户的服务等等．在这些系统服务中，经常出现排队现象，所以随机服务系统理论又称排队论．

随机服务系统早已存在，但对随机服务系统的理论研究直到电话发明后才有了进展．丹麦科学家爱尔朗（A. k. Erlang）于 1909～1920 年发表了一系列根据话务量计算电话机键配置的方法，为随机服务理论奠定了基础．

一般来说，一个随机服务系统存在如下两个方面的要求：

（1）顾客希望服务质量好，如排队等待时间短，损失率低等；

（2）系统运营方希望设备利用率高．

显然，上述两个方面的要求是相互矛盾的．因此随机服务系统理论研究的第一个任务是在给用户一个经济上能够承受的满意的质量条件下，确定系统设备的配备数量．这实际上是一个系统设计问题．随机服务系统理论研究的第二个任务是计算给定一个随机

服务系统的有关参数和指标，如顾客的平均等待时间，顾客的平均排队队长等.

随机服务系统理论在通信网、道路交通网的设计、流量分析以及性能评价等领域有重要的应用.

(五) 存储论

存储是常见的社会现象，如为了保证企业生产的正常进行，需要存储一定数量的原材料和配件；商店为了确保销售，需要存储一定数量的商品. 存储论主要研究最优的存储策略，即确定什么时间进货以及每次进货量，以使系统的总费用最小.

二、运筹学的基本特点和研究对象

运筹学是一门应用科学，它广泛应用现代科学技术知识和数学方法，解决生产和经济活动过程中提出的实际问题，为决策者选择最优决策提供定量的依据.

运筹学的一个最主要的特点是优化. 它是以整体最优为目标，从系统的观点出发，力图以整个系统最优的方式来协调各部门之间的利害冲突，从而求出问题的最优解. 所以运筹学可看成是一门优化技术，为解决各类问题提供优化方法.

运筹学的另一个特点是定量. 它为所研究的问题提供定量的解决方案. 如采用运筹学研究资源分配问题时，其求解结果是一个定量的最优资源分配方案.

运筹学研究的主要对象是来自生产管理过程中的具体问题，如资源分配、物资调度、生产计划与控制等.

三、运筹学研究解决问题的方法步骤

运筹学在研究解决实际问题时，主要方法步骤有：(1)理清问题、明确目标；(2)建立模型；(3)求解模型；(4)结果分析.

1. 理清问题、明确目标　理清问题、明确目标是解决问题的

首要步骤,因为运筹学所解决的问题一般都是生产管理过程中的具体问题,涉及的因素很多,事情发展的后果难以预计,所以要通过调查研究,把问题的实质、影响因素、约束条件以及可能导致的后果理出头绪.明确目标是解决问题的关键.同样的问题,目标不同可能得出不同的方案和结论.

2. *建立模型* 就是把要解决的问题的参数、变量和目标等之间的关系用模型表示,如形象模型、数学模型、模拟模型等.为了易于定量解决问题,运筹学中的模型多半是数学模型.由于社会活动的复杂性,因此很难总结出一套规范的方法来建立模型.所以建立模型是一项创造性的劳动,要依靠运筹工作者发挥其聪明才智并利用其经验来完成.

3. *求解模型* 建立模型之后,对它求解才能得到所要求的答案.现有的各种运筹学中的模型已经研究出多种解法,由于运算量一般都很大,通常需要用计算机计算,所以运筹学能广泛应用与计算机的发展密切相关.

4. *结果分析* 因模型中有许多实际因素需要考虑进去,如社会因素、政策因素等,因此对解出的结果要从其他方面进行评价和研究.

四、运筹学与其他学科的关系

运筹学建模和求解等过程都需要利用很多数学知识,所以学习、应用运筹学应该具备较广的数学知识,许多运筹学者来自数学专业就是这个原因,有人甚至认为运筹学是一门应用数学.但是运筹学所解决的问题的本身并非数学问题,而是生产管理过程的具体问题,在利用运筹学理论和方法解决具体问题时,需要涉及管理科学的有关理论,因此,运筹学的发展与管理学科理论的发展有密切的关系.此外,由于运筹学所研究的实际问题通常比较复杂,而且规模比较大,在求解这些问题时,必须借助计算机来完成,所以运筹学的发展还与计算机科学的发展有很大关系.

第1章　线性规划与单纯形法

1.1　线性规划问题及其数学模型

1.1.1　问题的提出

在生产和经营管理工作中,经常需要进行合理的计划或规划.计划或规划的共同特点是:在人力、财力和物力等资源有限的条件下,如何确定方案,使经济效益达到最大;或在规定的任务或指标的前提下,如何确定方案,使成本或消耗最小.

例1.1　产品生产计划问题

某工厂计划用现有的铜、铅两种资源生产甲、乙两种电缆,已知甲、乙两种电缆的单位售价分别为6万元和4万元.生产单位产品甲、乙电缆对铜、铅的消耗量及可利用的铜、铅数量如表1.1所示.

表1.1　单位产品消耗量与价格表

	甲电缆	乙电缆	资源量
铜(吨)	2	1	10
铅(吨)	1	1	8
价格(万元)	6	4	

另外,市场对乙电缆的最大需求量为7单位,而对甲电缆的需求量无限制.问该工厂应如何安排生产才能使工厂的总收入最大?

解 设 x_1, x_2 分别代表甲、乙两种电缆的生产量,$f(x)$为工厂的总收入,则上述问题可用如下数学模型来表示:

$$\text{OBJ}: \max f(x) = 6x_1 + 4x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leqslant 10 & \text{铜资源约束} \\ x_1 + x_2 \leqslant 8 & \text{铅资源约束} \\ x_2 \leqslant 7 & \text{产量约束} \\ x_1, x_2 \geqslant 0 & \text{产量不允许为负值} \end{cases}$$

最优解:$x_1 = 2, x_2 = 6, \max f(x) = 36$.

即甲电缆生产 2 单位,乙电缆生产 6 单位时,工厂的总收入达到最大,为 36 万元.

上述数学模型表示,在满足(Subject to S.t.)铜资源等约束条件下,使工厂的总收入最大.

例1.2 配料问题

某混合饲料加工厂计划从市场上购买甲、乙两种原料生产一种混合饲料.混合饲料对 VA、VB_1、VB_2 和 VD 的最低含量有一定的要求.已知单位甲、乙两种原料 VA、VB_1、VB_2 和 VD 的含量,单位混合饲料对 VA、VB_1、VB_2 和 VD 的最低含量以及甲、乙两种原料的单位价格如表 1.2 所示.

表 1.2 配料问题数据表

	原料甲	原料乙	混合饲料最低含量
VA 含量	0.5	0.5	2
VB_1 含量	1.0	0.3	3
VB_2 含量	0.2	0.6	1.2
VD 含量	0.5	0.2	2
原料单价(元)	0.3	0.5	

问该加工厂应如何搭配使用甲乙两种原料，才能使混合饲料在满足 VA、VB_1、VB_2 和 VD 的最低含量要求条件下，总成本最小？

解 设 x_1, x_2 分别代表混合单位饲料对甲、乙两种原料的用量，$f(x)$表示单位混合饲料所需要的成本，则上述问题的数学模型如下：

$$\text{OBJ}: \min f(x) = 0.3x_1 + 0.5x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 0.5x_1 + 0.5x_2 \geqslant 2 \\ 1.0x_1 + 0.3x_2 \geqslant 3 \\ 0.2x_1 + 0.6x_2 \geqslant 1.2 \\ 0.5x_1 + 0.2x_2 \geqslant 2 \\ \qquad x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

该问题的最优解为：$x_1 = 3.69$，$x_2 = 0.77$，$\min f(x) = 1.49$. 即混合单位混合饲料对甲、乙两种原料的用量分别为 3.69 单位和 0.77单位时，单位混合饲料所需要的成本最小，为 1.49 单位.

上述数学模型表示，在满足单位混合饲料对 VA、VB_1、VB_2 和 VD 的最低含量要求条件下，使工厂的单位混合饲料成本最低.

例 1.3 下料问题

某工厂要制作 100 套钢筋架，每套需用 2.9 m、2.1 m 和 1.5 m 的钢筋各一根. 这些钢筋均用长 7.4 m 的原材料切割而成. 问如何切割原材料才能使原材料最节省？

解 该问题属如何合理下料问题. 要解决这一问题，应先列出若干种可能的切割方案，如表 1.3 列出了 8 种可能的切割方案.

设 $x_1, x_2, \cdots, x_8$ 分别代表采用切割方案 1～8 的套数，$f(x)$表示总剩余的废料，则上述问题的数学模型如下：