职工中等专业学校试用教材学习指导书

代数

AISHU

XUEXI ZHIDAOSHU

上海科学技术文献出版社

职工中等专业学校试用教材学习指导书

代　　数

职工中等专业学校教材编写组　编

上海科学技术文献出版社

职工中等专业学校试用教材学习指导书
代　　数
职工中等专业学校教材编写组　编
*
上海科学技术文献出版社出版发行
(上海市武康路2号)
新华书店经销　　宜兴南漕印刷厂印刷
*
开本 787×1092 1/32　印张 3.25　字数 78,000
1987年7月第1版　1987年7月第1次印刷
印数：1—10,000
统一书号：ISBN 7-80513-007-8/G·01
定价：0.75元
科技新书目：148-271

编 写 说 明

这本学习指导书是根据职工中等专业学校数学教材《代数》编写的，主要供职工中等专业学校学员学习时使用，也可以供教师备课时作参考．编写这本学习指导书的目的，在于帮助学员解决学习时可能遇到的困难，使他们能有重点地、系统地和较深入地领会教材内容．基于上述目的，编写时采用了全面指导、重点解释的方法，使重点内容得到强化，难点能转化为易，并着重引导解题方法，总结解题规律．各章备有自我检查题，并附解答，供学员检查学习效果．

在使用本指导书时，可与教材紧密配合，在透彻理解教材内容和掌握学习指导的要点的基础上，独立地完成自我检查题，检查学习效果，并根据自己的不足之处加以弥补．

本书由许均、毛燮钧、韩文龙同志编写．由于作者水平有限，编写时间仓促，书中难免有缺点和错误，希望读者提出宝贵意见．

编　　者

1986.3.1

目　　录

第一章 方 程 组

一、学 习 要 求

1．正确理解二阶、三阶行列式的概念，能熟练地运用对角线法则计算二阶、三阶行列式。

2．正确地运用行列式解法解二元一次、三元一次方程组，并了解二元一次方程组解的各种情况。

3．掌握简单的二元二次方程组的解法的几种常见的类型，并能正确地求解简单的二元二次方程组。

二、学 习 指 导

1．教材分析

本章教材内容分为三部分。第一部分在用消元法解二元一次方程组的基础上引进二阶行列式的概念，导出行列式解法这一新的方法，然后用二阶行列式讨论二元一次方程组的解。第二部分是三阶行列式的定义和对角线展开法则，并不加证明直接给出三元一次方程组的行列式解法。第三部分是简单的二元二次方程组，主要是能通过消元、降次转化为一元二次方程或二元一次方程组来求解的一些特殊类型的二元二次方程组。

这部分教材对于已学过的学员可以起到复习巩固的作用。本章教材理论要求不高，简明易懂，但对计算能力的要求较高，因此配备了较多的练习题，供学员练习。方程组是代数学的重要

内容之一，也是一个重要的解题工具。在解析几何中研究直线的位置关系、直线与二次曲线的位置关系，以及二次曲线的位置关系时，就要用到方程组。因此，学好本章内容将为今后进一步的学习打下基础。

本章学习的重点是方程组的解法，难点是关于二元一次方程组的解的讨论。

2. 各节内容学习指导

(一)二阶行列式及二元一次方程组(§1-1)

(1) 二阶行列式的定义及展开的对角线法则是学习本节教材的一个关键。应当指出，方程组(Ⅰ)的解的表示式(5)

$$\begin{cases} x=\dfrac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \\ y=\dfrac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1} \end{cases}$$

比较繁且不容易记忆。这样就有必要引进二阶行列式来表示二元一次方程组的解，即二元一次方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$$

当 $D\neq0$ 时，有唯一解

$$\begin{cases} x=\dfrac{D_x}{D}, \\ y=\dfrac{D_y}{D}. \end{cases}$$

其中

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \qquad D_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \qquad D_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

而且这样的结论，实际上可以类似地推广到 n 元一次方程组(即克莱姆法则)。

(2) 在学习用行列式解法求解二元一次方程组时应当注意三点：一是方程组必须首先化为标准形式[即课本第一页的方程组(Ⅰ)]；二是要注意未知数的系数和常数项的符号；三是一定要先计算系数行列式 D，只有在 $D\neq0$ 时，才能用

$$x=\frac{D_x}{D};\ y=\frac{D_y}{D}$$

求解。

(3) 关于二元一次方程组的解的讨论是学习的一个难点。这里有两个原因：一是因为系数中含有字母，比较抽象；二是解的情况多种多样，不易讨论全面。学习这部分内容时应注意以下几点：一是要熟练掌握课本中所讲的一般的讨论方法，理解其精神实质；二是要按照具体题目的不同实际情况进行讨论，不可生搬硬套；三是讨论的层次要清楚，推理要有根有据。

(二)三阶行列式和三元一次方程组(§1-2)

(1) 这一节内容是上一节的扩展。为了能用行列式解三元一次方程组，我们引进了三阶行列式。正确地用对角线法则计算三阶行列式是学好这一节的关键，学员应反复进行练习，才能熟练。这里要特别注意展开式里项的符号，牢记"实正虚负"，即实线上三元素之积前面放上"+"号，虚线上三元素之积前面放上"-"号。在具体计算时，既要注意项的符号，又要注意三元素相乘时应按照乘法运算中的符号法则，否则就会产生错误。在学习过程中，应严格要求自己，养成认真细致的习惯。

(2) 由于学员已经有了二元一次方程组的行列式解法的基础，加上三元一次方程组的行列式解法的推导过程相当麻烦，需要用到行列式的性质，这些性质本书已经删去，所以本教材不加推导，直接地给出了三元一次方程组的解的行列式表示法。如果学员有兴趣，可以参考全日制中学高中课本的有关部分。对

于三元一次方程组的解的讨论，本书不作过高要求，只要掌握系数行列式 $D\neq 0$ 时，方程组有唯一解这一情况即可。

（三）简单的二元二次方程组（§1-3）

（1）由一个二元一次方程和一个二元二次方程组成的方程组，在一般情况下有两个解，例如教材中例 1。也可能有两个相等的解，或者无实数解，如方程组

$$\begin{cases} 4x^2-9y^2=27, \\ 4x-3y=9 \end{cases}$$

有两个相等的解；而方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2=8, \\ x+y=5 \end{cases}$$

无实数解。这种方程组的一般解法是代入法，即将二元一次方程中的一个未知数解出，代入到另一个方程中去，以达到消去一个未知数的目的。这个方法不难掌握，但也有些学员在解方程组时，随便乱代，以致产生增根。要特别注意理顺关系，切忌盲目乱代，例如课本中例 1：

$$\begin{cases} x^2+y^2+2y-9=0, & (1) \\ 3x-y-1=0. & (2) \end{cases}$$

如果从两式中消去未知数 y，得出 x 的两个值 $x_1=1$，$x_2=-1$ 后，把 x 的值再代入(1)式，就会多出两个不适合方程组的解。学习过程中一定要注意避免这种情形发生。正确的做法应当是把 x 的值代入到(3)式［即由(2)式解出的 $y=3x-1$］中去求 y。

（2）由两个二元二次方程组成的方程组，一般情况是不能化为二次方程来解的。例如方程组

$$\begin{cases} x=y^2+1, & (1) \\ y=x^2-3; & (2) \end{cases}$$

把(2)代入(1)，得 $x=(x^2-3)^2+1$，整理后得

$$x^4-6x^2-x+10=0.$$

这是一个一元四次方程．这种方程的一般解法超出了中等数学的范围，所以我们只能研究一些特殊类型的解法．学员在解题时，一定要从具体问题出发，从观察分析方程组中两个方程的特点入手，研究采取恰当的解法，而不能生搬硬套题型．例如先观察两个方程中是否有一个或两个能分解因式，或者通过加减法得出的第三个方程是一次方程或可以分解因式的方程，或者两个方程中的系数是否存在某种比例关系等等．总之，要根据具体题目的特点来加以解决．由两个二元二次方程组成的方程组，一般是四个解，但也有可能是三解、两解或无实数解．

三、解 题 指 导

本章教材有关的练习题大致分为以下几种．

1．直接计算二阶、三阶行列式的值．这部分题目就是要求利用对角线法则进行计算，只要严格遵守法则、细心计算是不成问题的．

例1 求下列行列式的值

(1) $\begin{vmatrix} \dfrac{1-t^2}{1+t^2} & \dfrac{2t}{1+t^2} \\ -\dfrac{2t}{1+t^2} & \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 0 & -x & y^3 \\ x & 0 & x^2z \\ -y_3 & -x^2z & 0 \end{vmatrix}$．

解 (1) $\begin{vmatrix} \dfrac{1-t^2}{1+t^2} & \dfrac{2t}{1+t^2} \\ -\dfrac{2t}{1+t^2} & \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix} = \dfrac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}+\dfrac{4t^2}{(1+t^2)^2}$

$$=\frac{(1+t^2)^2}{(1+t^2)^2}=1.$$

(2) $\begin{vmatrix} 0 & -x & y^3 \\ x & 0 & x^2z \\ -y^3 & -x^2z & 0 \end{vmatrix}=0-x^3y^3z+x^3y^3z+0+0+0=0.$

例 2 解关于 x 的方程：

$$\begin{vmatrix} 3+x & 2-x \\ 1 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 3+x & 2-x & 1-x \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=3x+4.$$

解 先将方程左端进行化简：

$$左端=(2x+1)+(-2x)=1,$$

所以原方程即为

$$3x+4=1,$$
$$3x=-3,$$
$$x=-1.$$

2. 用行列式法解二元一次、三元一次方程组。解这一类题目，首先应计算方程组的系数行列式，以便把握方程组的解的情况。

例 3 用行列式解方程组

$$\begin{cases} x+3y+3z=5, \\ 6x+3y+9z=19, \\ 6x-3y+3z=13. \end{cases}$$

解 这个方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \\ 6 & -3 & 3 \end{vmatrix}=36\neq 0,$$

所以方程组有唯一解。又

$$D_x=\begin{vmatrix}5 & 3 & 3\\ 19 & 3 & 9\\ 13 & -3 & 3\end{vmatrix}=72,$$

$$D_y=\begin{vmatrix}1 & 5 & 3\\ 6 & 19 & 9\\ 6 & 13 & 3\end{vmatrix}=12,$$

$$D_z=\begin{vmatrix}1 & 3 & 5\\ 6 & 3 & 19\\ 6 & -3 & 13\end{vmatrix}=24.$$

所以方程组的解是

$$\begin{cases} x=\dfrac{72}{36}=2,\\ y=\dfrac{12}{36}=\dfrac{1}{3},\\ z=\dfrac{24}{36}=\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

3．一次方程组的解的讨论。这里着重讨论二元一次方程组的解的情况，在解题时，应根据具体题目的情况加以讨论，不应机械套用课本上的结论。

例 4 解关于 x, y 的方程组：

$$\begin{cases} ax-by=\dfrac{a^2+b^2}{2}, & a\neq 0;\\ (a-b)x-(a+b)y=0, & b\neq 0. \end{cases}$$

解

$$D=\begin{vmatrix}a & -b\\ (a-b) & -(a+b)\end{vmatrix}=-a(a+b)+b(a-b)$$

$$=-(a^2+b^2).$$

$\because \quad a\neq 0,\ b\neq 0, \quad \therefore \quad D\neq 0$, 方程组有唯一解。

$$D_x=\begin{vmatrix}\dfrac{a^2+b^2}{2} & -b\\ 0 & -(a+b)\end{vmatrix}=-\frac{a^2+b^2}{2}(a+b),$$

$$D_y=\begin{vmatrix}a & \dfrac{a^2+b^2}{2}\\ a-b & 0\end{vmatrix}=-\frac{a^2+b^2}{2}(a-b).$$

所以方程组的解是

$$\begin{cases}x=\dfrac{a+b}{2}.\\ y=\dfrac{a-b}{2}.\end{cases}$$

例 5 解关于 x, y 的方程组：

$$\begin{cases}mx+3y=2,\\ 2x+(m-1)y=m.\end{cases}$$

解

$$D=\begin{vmatrix}m & 3\\ 2 & m-1\end{vmatrix}=m(m-1)-3\times 2$$

$$=m^2-m-6=(m-3)(m+2).$$

当 $m\neq -2$ 且 $m\neq 3$ 时，$D\neq 0$，方程组有唯一解：

$$\begin{cases}x=-\dfrac{1}{m-3},\\ y=\dfrac{m-2}{m-3}.\end{cases}$$

当 $m=3$ 时，方程组是

$$\begin{cases}3x+3y=2,\\ 2x+2y=3.\end{cases}$$

$\because \quad \dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}\neq\dfrac{2}{3}, \quad \therefore$ 方程组无解。

当 $m=-2$ 时，方程组是

$$\begin{cases}-2x+3y=2,\\ 2x-3y=-2.\end{cases}$$

$\because \quad \frac{-2}{2}=\frac{3}{-3}=\frac{2}{-2}$， $\therefore$ 方程组有无穷多解。

例6 当 a 取哪些值时，下列关于 x, y, z 的方程组有唯一解，并求出这个解：

$$\begin{cases}x+y+z=1,\\ x+ay+a^2z=a,\\ x+a^2y+az=a^2.\end{cases}$$

解

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & a^2\\ 1 & a^2 & a\end{vmatrix}=a^2+a^2+a^2-a-a-a^4$$

$$=-a^4+3a^2-2a$$

$$=-a(a-1)^2(a+2),$$

$$D_x=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & a & a^2\\ a^2 & a^2 & a\end{vmatrix}=0, \quad D_y=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & a^2\\ 1 & a^2 & a\end{vmatrix}=-a(a-1)^2(a+2),$$

$$D_z=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & a\\ 1 & a^2 & a^2\end{vmatrix}=0.$$

所以当 $a\neq0$ 且 $a\neq1$, $a\neq-2$ 时，方程组有唯一解，这个解是

$$\begin{cases}x=0,\\ y=1,\\ z=0.\end{cases}$$

4．二元二次方程组的解法。这里着重谈谈两个方程都是

二元二次方程的方程组，常见的特殊类型有以下几种：

① 可以消去一个未知数的方程组。这种方程组的特点是含有某一未知数的对应项系数成比例。

例 7 解方程组

$$\begin{cases} x^2-15xy-3y^2+2x+9y-98=0, \\ 5xy+y^2-3y+21=0. \end{cases}$$

分析 这个方程组的两个方程中含未知数 y 的对应项系数成比例，故可以应用加减消元法消去未知数 y，得到一个只含未知数 x 的一元方程。

解法略，由学员自己完成，这个方程组的解是

$$\begin{cases} x_1=5, \\ y_1=-1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=5, \\ y_2=-21. \end{cases}$$

② 可以消去二次项的方程组。这种方程组的特点是两个方程对应的二次项系数成比例。

例 8 解方程组

$$\begin{cases} x^2+5xy-2x+3y=-1, \\ 3x^2+15xy-7x+8y=-4. \end{cases}$$

分析 这个方程组中的两个方程对应的二次项系数成比例，即 $\frac{1}{3}=\frac{5}{15}$。故可以应用加减消元法消去一切二次项，得到一个二元一次方程。

解法略。这个方程组的解是

$$\begin{cases} x_1=1, \\ y_1=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=-1, \\ y_2=2. \end{cases}$$

③ 至少有一个方程可以分解成两个一次方程的。这种方程组的特点是方程组中至少有一个方程的一边可以分解成两个一次因式，而另一边等于零。

例 9 解方程组

$$\begin{cases} x^2-5xy+6y^2=0, \\ x^2+y^2+x-11y-2=0. \end{cases}$$

分析 这个方程组中第一个方程左端可以分解为两个一次因式之积而右端为零．故可以得到两个二元一次方程．

解法略。这个方程组的解是

$$\begin{cases} x_1=-\dfrac{2}{5}, \\ y_1=-\dfrac{1}{5}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=4, \\ y_2=2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3=-\dfrac{3}{5}, \\ y_3=-\dfrac{1}{5}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4=3, \\ y_4=1. \end{cases}$$

④ 两个方程都没有一次项的。这种方程组可以先消去常数项，然后按“至少有一个方程可以分解成一次方程”的方法求解。

例 10 解方程组

$$\begin{cases} 3(x^2+y^2)-2xy=27, & (1) \\ 4(x^2+y^2)-6xy=16. & (2) \end{cases}$$

分析 这两个方程都没有一次项．考虑 $(1)\times16-(2)\times27$ 即可消去常数项，所得的方程必定可以分解因式．

解法略。这个方程组的解是

$$\begin{cases} x_1=3, \\ y_1=2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=-3, \\ y_2=-2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3=2, \\ y_3=3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4=-2, \\ y_4=-3. \end{cases}$$

总之，解二元二次方程组的关键是根据题目的特征选择恰当的方法。在寻求解法之前要把方程写成一般形式，并把两个方程中的同类项对齐，以便观察其系数间的特征。此外，换元法