龚冬保教授考研数学

数学考研教程

龚冬保 主编

西安交通大学出版社

数学考研教程

主编　龚冬保

编著　龚冬保 王寿生 褚维盘
（高等数学）
崔荣泉（线性代数）
周家良（概率论与数理统计）

西安交通大学出版社
·西安·

内容提要

本书作为考研的数学教材，内容严格按教育部制订的“数学考试大纲”编写。为了适应考生“复习”的特点，本书建立了与普通教材不同的体系；针对考研的特点，突出基本功和综合运用能力的训练，对于数学知识，着重于分析问题和解决问题的能力，全面而有重点地覆盖了数学一、数学二、数学三和数学四的所有考点和解题方法。本书既可作“考研辅导班”的教材，也可用于考生自学，同时也可供就读本科的工学和经济学和管理学的各专业的大学生参考。

图书在版编目(CIP)数据

数学考研教程 / 龚冬保主编 .—西安：西安交通大学出版社，2002.6
ISBN 7-5605-1514-2

Ⅰ.数… Ⅱ.龚… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 038523 号

*

西安交通大学出版社出版发行
(西安市兴庆南路 25 号　邮政编码：710049　电话：(029)2668315)
陕西省轻工印刷厂印装
各地新华书店经销

*

开本：787mm×1 092mm　1/16　印张：32　字数：826 千字
2002 年 6 月第 1 版　2002 年 8 月第 2 次印刷
定价：46.00 元

发行科电话：(029)2668357，2667874

前　言

目前，考研的数学辅导书很多，却没有一本考研的数学教材。广大考生很希望有这样的教材，为此，我们尝试编写了本教程，以帮助考生能按教育部制订的研究生入学考试的"数学考试大纲"，全面系统地复习数学，取得好成绩。

复习是重复学习，不是重新学习。我们认为考研教材应与普通教材不同。首先，普通教材必须严格地按内容的逻辑顺序来编写，而考研教材不必受此拘束，可以从读者最熟悉的内容入手；比如高等数学，我们采取从微分法开始，以微分带积分，以积分促微分，使微积分紧密结合，深入浅出地讲完一元微积分的全部内容。其次，普通教材着重一个一个地讲解知识单元，而考研教材则可侧重于内容间的联系；如本书线性代数将矩阵与行列式、向量代数与线性方程组、特征值特征向量与二次型紧密结合。第三，本教材建立了新的体系，使讲授方法更符合考生的认识层次，如概率论部分，先讲离散型随机变量的有关概率问题，再讲连续型随机变量的问题，再讲它们间的联系。第四，作为考研的数学教材，针对考研主要是考核解题能力的特点，本教材讲述了大量的例题，并且采用一题多解，一题多变的方式讲述，侧重讲解题的思路、方法和技巧，以培养读者灵活的分析和解决数学问题的能力。第五，根据编者多年辅导考研数学的经验，本书严格按"数学考试大纲"，从内容上既照顾了全面覆盖所有的考点，又突出了重点，从方法上既介绍了数学处理问题的基本方法，又突出了主要方法，特别考虑到考研试题中70%左右的是基本题，本教材在基本内容、基本方法上讲述的篇幅最大，对一些难题讲述，则侧重讲一道难题的思路，以及它与基本内容的联系，如何作到熟能生巧等等。第六，作为一本复习教材，本书还考虑要便于考生自学，因此，在许多题后附了不少注释，还介绍了不少自编练习题的方法。希望读者在阅读本书时，要一边看书一边自己动手推导，在读完一节后，最好将这一节书中的例题当作习题，自己独立做一遍，然后再作本章练习题，这样效果会更好些。

本书每章开始的"考试内容"指的是"数学考试大纲"规定的内容，在有的内容后有类似（数学二、四不考）的注释，表示该内容是"数学（二）和（四）"两种试卷不考的内容，要考数学（二）或数学（四）的考生可不看涉及这部分内容的知识和例题。另外，既然是一本考研的复习教材，因此，书中对一些估计考生很熟悉的内容，一些定理的证明、公式的推导在本书中略去不讲，如果有的考生想要知道相关的内容，可以在任何一本普通的教材中找到。

感谢西安交通大学出版社为本书的编辑和出版所作的努力。希望本书能受到读者的欢迎，更希望广大读者多提意见和建议，以使本书能改得更好，成为准备参加考研读者的良师益友。

编者

2002.5于西安

目　　录

第 16 章　数理统计

第 1 章　一元函数微积分(一)

考试内容

导数和微分的概念　导数的几何意义和实际意义(经济意义数学一、二不考)　函数可导性与连续性之间的关系　基本初等函数的导数　微分四则运算　复合函数、反函数、隐函数以及参数方程所确定的函数的微分法　高阶导数概念及某些函数的 n 阶导数　一阶微分形式不变性　原函数和不定积分的概念　不定积分的基本性质　基本积分公式　定积分的概念和基本性质　变上限定积分定义的函数及其导数　牛顿-莱布尼茨公式　不定积分、定积分的换元积分法和分部积分法　有理函数、三角函数的有理式和简单无理函数的积分　广义积分的概念和计算

1.1　微积分的基本方法

读者也许会问,作为“教程”,本书为何从微、积分法开始,而不从函数、极限开始.要知道这正是本书的特点,我们认为,“复习”应当从你最熟悉、最容易提起回忆的内容入手,而不是从头再学一遍,这样效率会更高、效果会更好.

1.1.1　微积分的基本公式

定义 1.1　在某个区间 I 上,若 $F'(x)=f(x)$,便称函数 $f(x)$ 是 $F(x)$ 的导数,而称函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,$F(x)+C$ 是 $f(x)$ 的不定积分(C 是任意常数).

不定积分记为 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

从运算的角度讲,不定积分是微分的逆运算.因此,微积分运算的基础在于微分法.作一个函数的导数或微分,再反过来作积分,是复习微积分运算的好办法.

所谓微积分基本公式,是指一些简单初等函数的求导和积分的公式(见表 1.1).

1.1.2　微分、积分的基本运算法则与联系

1.1.2.1　微分的加法法则与积分的分项积分法

例 1.1　$\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int(x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})\mathrm{d}x=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C.$

例 1.2　$\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int(1-\frac{1}{1+x^2})\mathrm{d}x=x-\arctan x+C.$

例 1.3　$\int\tan^2 x\mathrm{d}x=\int(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x=\tan x-x+C.$

表 1.1　微积分基本公式对照表

① $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	①′ $\int x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C(\alpha \neq -1)$
② $(\ln\mid x\mid)' = \frac{1}{x}$	②′ $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln\mid x\mid + C$
③ $(a^x)' = a^x\ln a$	③′ $\int a^x\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$
④ $(\sin x)' = \cos x$	④′ $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$
⑤ $(\cos x)' = -\sin x$	⑤′ $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$
⑥ $(\tan x)' = \sec^2 x$	⑥′ $\int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x + C$
⑦ $(\cot x)' = -\csc^2 x$	⑦′ $\int \csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x + C$
⑧ $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	⑧′ $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
⑨ $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$	⑨′ $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$
⑩ $(\mathrm{sh}x)' = \mathrm{ch}x$	⑩′ $\int \mathrm{ch}x\mathrm{d}x = \mathrm{sh}x + C$
⑪ $(\mathrm{ch}x)' = \mathrm{sh}x$	⑪′ $\int \mathrm{sh}x\mathrm{d}x = \mathrm{ch}x + C$
⑫ $(\mathrm{th}x)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$	⑫′ $\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}x + C$
⑬ $(\ln\mid x\sqrt{x^2\pm 1}\mid)' = \frac{1}{\sqrt{x^2\pm 1}}$	⑬′ $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2\pm 1}} = \ln\mid x+\sqrt{x^2\pm 1}\mid + C$
⑭ $[\ln\mid\frac{1+x}{1-x}\mid]' = \frac{2}{1-x^2}$	⑭′ $\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\mid\frac{1+x}{1-x}\mid + C$

1.1.2.2　复合函数的微分法与换元积分法

1. 复合函数的求导法则

复合函数求导法则是最重要的法则，我们将它简述成定理：

定理 1.1a(复合函数微分法则)　若 $y = f(u)$ 可导，$u = g(x)$ 可导，则 $y = f(g(x))$ 可导. 且

$$\boxed{y' = f'_u \cdot g'(x) \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}$$

复习应当抓住重点以及重点内容与其它内容间的联系. 讲到复合求导，我们可以回忆起多

元复合求导的法则.即使是考数二的同学,知道一点这个求导法则也是很有益处的.

定理 1.1b(多元函数复合求导法则)　设 $z=f(u,v)$ 可微,而 $u=u(x,y),v=v(x,y)$ 均可导,则 $z=f(u(x,y),v(x,y))$ 可导,且

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}}$$

例 1.4　设 $y=x^{\sin x}$,求 y'.

解 1(用一元复合求导).

$$\begin{aligned}(x^{\sin x})'&=(e^{\sin x\ln x})'=e^{\sin x\ln x}(\sin x\ln x)'\\&=\cos x(\ln x)x^{\sin x}+\frac{\sin x}{x}x^{\sin x}\end{aligned}$$

解 2(用多元复合求导)　记 $u=x,v=\sin x$;则　$y=u^v$.

$$\begin{aligned}y'&=vu^{v-1}\cdot u'+u^v\ln u\cdot v'\\&=\frac{\sin x}{x}x^{\sin x}+\cos x(\ln x)x^{\sin x}\end{aligned}$$

复合求导的逆运算带来两类换元积分法.

2.第一类换元积分法(凑微分的积分法)

例 1.5　计算 $\int\sin 2x\mathrm{d}x$.

解 1　原式 $=\frac{1}{2}\int\sin 2x\mathrm{d}(2x)=\frac{-1}{2}\cos 2x+C$.

注　这里,实际上是令 $2x=u$,但当对这样简单的复合求导逆运算熟悉时,不必写出新的积分元 u,大多数的第一类换元积分法都可以不写出 u,而是将被积表达式凑成微分形式,即如 $\sin 2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(-\frac{1}{2}\cos 2x)$,故也称凑微分法.

解 2　原式 $=2\int\sin x\cos x\mathrm{d}x=2\int\sin x\mathrm{d}(\sin x)=\int\mathrm{d}\sin^2x=\sin^2x+C$.

解 3　原式 $=2\int\cos x\sin x\mathrm{d}x=-2\int\cos x\mathrm{d}(\cos x)=-\cos^2x+C$.

用凑微分法,可以推广积分基本公式⑧′⑨′⑬′⑭′,设 $a>0$.则

⑧′ 推广为	$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{\mathrm{d}(\frac{x}{a})}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$
⑨′ 推广为	$\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$
⑬′ 推广为	$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\mid x+\sqrt{x^2\pm a^2}\mid+C$
⑭′ 推广为	$\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\mid\frac{a+x}{a-x}\mid+C$

以上本质上都是作换元 $u=\frac{x}{a}$ 的第一类换元积分法.

复合求导是最重要的微分法则,因此,**凑微分法是积分的最重要的方法**.

例 1.6 求$\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$.

解 1 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}=\int\frac{\sec x(\tan x+\sec x)}{\tan x+\sec x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(\tan x+\sec x)}{\tan x+\sec x}$

$=\boxed{\ln|\tan x+\sec x|+C}$

解 2 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}=\int\frac{\cos x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}\sin x}{1-\sin^2 x}=\boxed{\ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}+C}$

解 3 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}=2\int\frac{\mathrm{d}\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}=\boxed{\ln\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right|+C}$

解 4 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin(\frac{\pi}{2}+x)}=\int\frac{\mathrm{d}(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})}{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})}$

$=\int\frac{\sec^2(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})}{\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})}\mathrm{d}(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})=\boxed{\ln\left|\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})\right|+C}$

以上 4 个方框的结果都是计算$\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$的公式,读者可用微分还原.

例 1.7 求$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$.

解 1 $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}=\int\frac{(1+\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}=x-\ln(1+\mathrm{e}^x)+C$

解 2 $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}=\int\frac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)}=\int(\frac{1}{\mathrm{e}^x}-\frac{1}{1+\mathrm{e}^x})\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=x-\ln(1+\mathrm{e}^x)+C$

解 3 $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}=\int\frac{\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{-x}}=-\ln(1+\mathrm{e}^{-x})+C$

3.(第二类)换元积分法

这一类是地道的换元法,第一类换元是凑微分,可以不作"换元",第二类是假设被积函数$f(x)$的原函数不易看出,而令$x=x(t)$.这样

$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f(x(t))\dot{x}(t)\mathrm{d}t$,使$F(t)=f(x(t))\dot{x}(t)$比较简单.通常,**这类换元一个最重要思路是有理化被积表达式**.

例 1.8 求$\int x\sqrt{1-2x}\mathrm{d}x$.

解 令$1-2x=t^2$.则$x=\frac{1}{2}(1-t^2),\mathrm{d}x=-t\mathrm{d}t$.

原式$=\frac{1}{2}\int(t^2-1)t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{10}t^5-\frac{1}{6}t^3+C$

$=\frac{1}{30}[3(1-2x)^{5/2}-5(1-2x)^{3/2}]+C$

例 1.9 求$\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$.

解 1 令 $x = a\sin t$，则 $dx = a\cos t dt$.

$$原式= a^2\int\cos^2 t dt = a^2\int \frac{1+\cos t}{2}dt = \frac{a^2}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t) + C$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C(可以当成基本公式).$$

解 2 （分部积分法）.

$$I = \int\sqrt{a^2 - x^2}dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int\frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - I + a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad （移项,解出\ I）$$

$$I = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$$

解 3 （主要也是分部积分法）.

$$I = \int\frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = a^2\arcsin\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2} - I \quad （移项）$$

故

$$I = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

例 1.10 求$\int\frac{dx}{\sqrt{x - x^2}}$.

解 1 （第一类换元）.

$$原式 = 2\int\frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{1 - (\sqrt{x})^2}} = 2\arcsin\sqrt{x} + C.$$

解 2 $原式= -2\int\frac{d\sqrt{1-x}}{\sqrt{1 - (\sqrt{1-x})^2}} = -2\arcsin\sqrt{1-x} + C$

$$= 2\arccos\sqrt{1-x} + C.$$

注 遇到函数，首先要想到定义域. 本题被积函数的定义域是(0,1)，故我们只是在(0,1)内求它的原函数.

解 3 （直接用公式）.

$$原式 = \int\frac{d(x - \frac{1}{2})}{\sqrt{\frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2}} = \arcsin(2x - 1) + C.$$

解 4（换元积分法） 令 $x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sin t$

$$原式 = \int dt = t + C = \arcsin(2x - 1) + C.$$

解 5 由$0 < x < 1$知，可令 $x = \sin^2 t, 1 - x = \cos^2 t, dx = 2\sin t\cos t dt$.

$$原式 = 2\int dt = 2t + C = 2\arcsin\sqrt{x} + C.$$

解 6（有理化变换）考虑被积函数.

由

$$\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x}{1-x}},$$

令$\dfrac{x}{1-x}=t^2$，　则 $x=\dfrac{t^2}{1+t^2}$，$\mathrm{d}x=\dfrac{2t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$

$$\text{原式}=2\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=2\arctan t+C=2\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}}+C.$$

1.1.2.3　乘(除)法求导法则与分部积分法

这是由 $\mathrm{d}(uv)=u\mathrm{d}v+v\mathrm{d}u$，得

$$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u$$

即，将被积函数是 $u(x)v'(x)$ 的积分，化为 $v(x)u'(x)$ 的积分. 要求表达式 $v(x)u'(x)$ 不比 $u(x)v'(x)$ 更复杂.

例 1.11　求$\int \ln x\mathrm{d}x$.

解　原式 $=x\ln x-\int\mathrm{d}x=x\ln x-x+C$.

例 1.12　求$\int x^2\arcsin x\mathrm{d}x$.

解　
$$\begin{aligned}\text{原式}&=\frac{x^3}{3}\arcsin x-\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}\arcsin x-\frac{1}{6}\int\frac{x^2\mathrm{d}x^2}{\sqrt{1-x^2}}\\&=\frac{x^3}{3}\arcsin x-\frac{1}{6}\int(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1-x^2)+\frac{1}{6}\int(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1-x^2)\\&=\frac{x^3}{3}\arcsin x-\frac{1}{9}(1-x^2)^{3/2}+\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+C.\end{aligned}$$

例 1.13　求$\int x^2e^x\mathrm{d}x$.

解 1　原式 $=x^2e^x-2\int xe^x\mathrm{d}x=x^2e^x-2xe^x+2e^x+C$.

解 2　(待定系数法).　设　$(x^2+bx+c)e^x$ 是要求的一个原函数.

则　$[(x^2-bx+c)e^x]'=[x^2+(b+2)x+(b+c)]e^x=x^2e^x$.

故　$b=-2, c=-b=2$. 即　$\int x^2e^x\mathrm{d}x=(x^2-2x+2)e^x+C$.

以上分部积分法的作用(第一个作用)可以称作是**依次化简被积函数直至求出原函数**. 分部积分的第二个作用是产生**递推公式**.

例 1.14　求$\int\sin^4x\mathrm{d}x$.

解　记$\int\sin^nx\mathrm{d}x=I_n$

$$\begin{aligned}I_4&=-\sin^3x\cos x+3\int\sin^2x\cos^2x\mathrm{d}x\\&=-\sin^3x\cos x+3\int\sin^2x\mathrm{d}x-3\int\sin^4x\mathrm{d}x\quad(\text{将 }3I_4\text{ 移到等号左边}).\end{aligned}$$

$$I_4=-\frac{1}{4}\sin^3x\cos x+\frac{3}{4}I_2.$$

$$I_2=\int\sin^2x\mathrm{d}x=-\sin x\cos x+\int\mathrm{d}x-I_2\quad(\text{将 }I_2\text{ 移到等号左边}).$$

$$I_2=-\frac{1}{2}\sin x\cos x+I_0=-\frac{1}{2}\sin x\cos x+x+C$$

从而 $$I_4 = -\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x - \frac{3}{8}\sin x\cos x + \frac{3}{4}x + C.$$

读者可以推导一般的 $I_n = \int \sin^n x\,\mathrm{d}x$ 和 $I_n = \int \cos^n x\,\mathrm{d}x$ 的递推公式.

例 1.15 求 $I_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$.

解 我们采用**倒推的方法**.由

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2} + 2\int -\frac{x^2\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{1+x^2} + 2I_1 - 2I_2.$$

故 $$I_2 = \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}I_1 = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan x + C.$$

分部积分的第三个主要作用是产生**循环公式**而得出积分结果.

例 1.16 求 $I = \int e^x\cos x\,\mathrm{d}x$.

解 $I = e^x\cos x + \int e^x\sin x\,\mathrm{d}x = e^x\cos x + e^x\sin x - I$ (将 I 移到等号左边)

$$I = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C.$$

例 1.17 求 $I = \int \sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x \quad (a>0)$.

解 1 $I = x\sqrt{a^2+x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x = x\sqrt{a^2+x^2} - I + a^2\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}}$ (移项)

$$I = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + C.$$

即 $$\boxed{\int \sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + C}$$

框中的结果可以当公式用.

解 2 $I = \int \frac{a^2+x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x = a^2\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + x\sqrt{a^2+x^2} - I$ (移项)

$$I = \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + C.$$

读者还可用换元积分做本题.

与微分四则运算及复合求导对照的积分法主要就是四种:① **分项积分法**;② **凑微分法**;③ **换元法**;④ **分部积分法**.

有理函数的积分主要是用**分项积分**.其关键是化一个分式为部分分式,而化一个分式为部分分式的关键是将分母分解因式.三角有理函数从理论上讲用万能变换:即设 $\tan\frac{x}{2} = t$,可将三角有理函数化为有理函数的积分.但一般做题用万能变换往往十分麻烦,要利用三角函数间的关系灵活去做题,也往往要综合运用以上四种基本的积分方法.

例 1.18 求 $\int \frac{x+5}{x^2-6x+13}\mathrm{d}x$.

解 本题中 $\frac{x+5}{x^2-6x+13}$ 已是部分分式了.

由 $(x^2-6x+13)' = 2x-6$,化 $x+5 = \frac{1}{2}(2x-6)+8$.于是

$$原式 = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2 - 6x + 13)}{x^2 - 6x + 13} + \int \frac{8}{(x-3)^2 + 4}\mathrm{d}(x-3)$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x^2 - 6x + 13| + 4\arctan\frac{x-3}{2} + C.$$

例 1.19(2000,二)① 设 $f(\ln x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$,求$\int f(x)\mathrm{d}x$.

解 令 $x = \mathrm{e}^t$,得 $f(t) = \frac{\ln(1+\mathrm{e}^t)}{\mathrm{e}^t}$,则 $f(x) = \frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x}$.

$$原式 = -\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x) + \int \mathrm{e}^{-x}\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x) + x - \ln(1+\mathrm{e}^x) + C.$$

例 1.20(2000,四) 求$\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解 1
$$原式 = 2\int \arcsin\sqrt{x}\,\mathrm{d}\sqrt{x} = 2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x} - \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}$$
$$= 2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x} + 2\sqrt{1-x} + C.$$

解 2 令 $x = \sin^2 t$.则

$$原式 = \int t\cos t\,\mathrm{d}t = 2t\sin t - 2\int \sin t\,\mathrm{d}t = 2t\sin t + 2\cos t + C$$
$$= 2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x} + 2\sqrt{1-x} + C.$$

例 1.21(2001,一) 求$\int \frac{\arctan\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x$.

解 1
$$原式 = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\arctan\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}(1+\mathrm{e}^{2x})}$$
$$= -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\arctan\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}$$
$$= -\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-2x}\arctan\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} + \arctan\mathrm{e}^x) + C.$$

解 2 令 $\mathrm{e}^x = \tan t$.则 $\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{d}\tan t$.

$$原式 = \int \frac{t}{\tan^3 t}\mathrm{d}\tan t = -\frac{1}{2}\frac{t}{\tan^2 t} + \frac{1}{2}\int \cot^2 t\,\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\tan^2 t} + \int \csc^2 t\,\mathrm{d}t - \int \mathrm{d}t\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\tan^2 t} - \cot t - t + C\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\arctan\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}} + \mathrm{e}^{-x} - \arctan\mathrm{e}^x + C\right).$$

例 1.22(2001,二) 求$\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

解 令 $x = \tan t$.则 $\mathrm{d}x = \sec^2 t\,\mathrm{d}t$.

$$原式 = \int \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{1+\sin^2 t} = \arctan\sin t + C = \arctan\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

注 以上我们用到由 $x = \tan t$,得 $\sin t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 可用画小直角三角形(见图 1.1)方法求得.这种方法方便.

---

① (2000,二)表示 2000 年数学二的试题.下同.

例 1.18 ~ 例 1.22 的 5 道例题对我们有如下启发:不定积分题在考研试题中常常出现,但没有很难的题.所用方法全是我们讲到的四种积分法,都有点综合性.故**练习微积分的基本技巧是很重要的**.

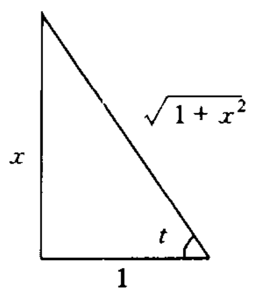

图 1.1

抓住微积分的联系,不仅可使积分题好做,而且给我们提供了**主动命题练习基本功的机会**.比如,想练习换元积分与分部积分的一道综合的积分题,便可先随意给定一个既要用复合求导,又要用乘法求导方能求出导函数的初等函数,求出导数,再反过来积分.

例 1.23 设 $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2}e^{x^2}$,求 $f'(x)$.再命一道相应的积分题做积分练习.

解 $f'(x)=2\dfrac{x+1}{x}e^{x^2}-\dfrac{1}{x^2}e^{x^2}-\dfrac{2}{x^3}e^{x^2}=\dfrac{2x^3+2x^2-x-2}{x^3}e^{x^2}$.

相应的积分题便是求$\displaystyle\int\frac{2x^3+2x^2-x-2}{x^3}e^{x^2}dx$.由求导过程使我们得到下面的积分方法(按求导步骤反过来作).

$$-\int\frac{x}{x^3}e^{x^2}dx=\int e^{x^2}d\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}e^{x^2}-\int 2e^{x^2}dx$$

$$-\int\frac{2}{x^3}e^{x^2}dx=\int e^{x^2}d\left(\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{x^2}e^{x^2}-\int\frac{2e^{x^2}}{x}dx$$

故
$$-\int\frac{x+2}{x^3}e^{x^2}dx=\frac{x+1}{x^2}e^{x^2}-\int\frac{2x^3+2x^2}{x^3}e^{x^2}dx.$$

即得
$$\int\frac{2x^3+2x^2-x-2}{x^3}e^{x^2}=\frac{x+1}{x^2}e^{x^2}+C.$$

注 这样巧妙的积分方法一般教科书上不易见到.

例 1.24 设 $f(x)=x\sqrt{1+x^2}$,求 $f'(x)$,再作相应积分练习.

解 $f'(x)=\sqrt{1+x^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}=2\sqrt{1+x^2}-\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$=2\sqrt{1+x^2}-[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]'$

于是得到相应的积分题及其巧妙解法,求 $I=\displaystyle\int\sqrt{1+x^2}dx$.

$$I=\int\frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+x\sqrt{1+x^2}-I$$

解得 $I=\dfrac{1}{2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\dfrac{x}{2}\sqrt{1+x^2}+C$.

希望读者能学会这样的练习方法,**这样练习的好处是不需要用任何参考书,也不一定要用整段的复习时间,只要带上一支笔一个练习本,随时可以自己出题考自己.这种复习方法会使你轻松愉快地练好基本功,起到意想不到的好效果**.

1.1.3 定积分与微分的联系

1.1.3.1 定积分的概念与性质

定义 1.2 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义.经以下三步:

(1) 分割 对区间 $[a,b]$ 进行任意分割:$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$.记 $\Delta_k=$