SUIJI FENXI JICHU JIQI YINGYONG

随机分析基础及其应用

金治明 编著

国防工业出版社

http://www.ndip.com.cn

随机分析基础及其应用

金治明　编著

国防工业出版社

·北京·

图书在版编目(CIP)数据

随机分析基础及其应用/金治明 编著:—北京:国防工业出版社,2003.4
ISBN 7-118-03083-X

Ⅰ.随... Ⅱ.金... Ⅲ.随机分析 Ⅳ.0211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 110623 号

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)
(邮政编码 100044)
新艺印刷厂印刷
新华书店经售
*
开本 850×1168 1/32 印张 11.125 280 千字
2003 年 4 月第 1 版 2003 年 4 月北京第 1 次印刷
印数:1—2000 册 定价:18.00 元

前　言

本书是为概率论专业硕博连读生编写的教材，并且已经多届教学的实践．本书以介绍现代鞅论与随机积分为基本内容，进而讨论 Wiener 过程泛函与扩散过程泛函的结构，最后介绍有应用价值的 Kalman-Bucy 滤波与非线性滤波、内插与外推等内容，作为例子也讨论到随机分析在数理金融中的某些应用．

预备知识：条件期望与离散时间鞅是为读本书打基础的内容，主要介绍测度论基础上的条件期望概念与经典（离散）鞅论基础．

第一章连续时间鞅，是现代鞅论的主要内容，同时介绍过程的可选，可料投影．简略地介绍测度的投影．这些都是后续内容的基础．

第二章随机积分，从可料过程对 L^2 鞅的随机积分开始，逐步深入到对一般适应过程的随机积分．对平方变差过程的介绍，我们只局限于连续局部鞅的情形．这样做的原因是篇幅与教学时数的限制．

第三章 Ito 公式与 Girsanou 定理，它们是随机分析的重要工具，Girsanou 定理给出的测度鞅变换在现代数理金融学中有重要的意义．我们在股票市场与等价鞅测度 1 节阐述了这一点，这样可以使读者较早地看到它们的应用．

第四章随机微分方程，讨论了随机微分方程的强解和弱解，以及偏微分方程概率解问题，书中还介绍作者提出的解一类随机微

分方程的方法,最后的一节也是作者本人的成果,它表明 Feynman-Kac 公式不但可以给出热传导方程解的概率表示，而且借助概率的方法还可进一步给出解析解. 而热传导方程的 Cauchy 问题在现代数理金融学的期权定价中有重要的意义,

第五章平方可积鞅与 Wiener 泛函的结构, 本章主要讨论平方可积鞅以及局部鞅的随机积分表示，进一步讨论某些 Winner 泛函, 扩散过程泛函的结构. §1.5 介绍了获得诺贝尔经济奖的著名的 Black-Scholes 公式，因为它恰恰用到局部鞅表示定理与 Feynman-Kac 公式.

第六章 Ito 过程与扩散过程测度的绝对连续性， Ito 过程，扩散过程， Wiener 过程可在连续函数空间诱导出相应的测度，以 Wiener 测度为基准，本章讨论这些测度关于 Wiener 测度的绝对连续性以及 Radon-Nikydom 导数，为滤波理论奠定基础，也是过程统计的基础.

第七章滤波理论及其它应用，主要介绍一般的非线性滤波理论，同时也讨论到内插，外推问题. 这对一般的数据处理工作者是有应用价值的. 在这里，我们只讨论连续时间的情形，对于应用更实际的是离散时间，此时随机微分方程需用随机差分方程来代替，在这方面已经有许多专著可供参考.

随机分析的内容非常丰富，作为教材，我们只能选择最基础的内容. 由于水平的限制，也由于篇幅的限制，挂一漏万在所难免，敬请各位读者批评指正.

编　者

目　　录

符号 ………………………………………………………… 1

预备知识　条件期望与离散时间鞅 ………………… 4

　§0.1　条件期望 ………………………………………… 4

　§0.2　离散时间鞅 ……………………………………… 13

第一章　连续时间鞅 …………………………………… 25

　§1.1　右连续上鞅与基本不等式 ……………………… 25

　§1.2　鞅收敛与 Doob 停止定理 ……………………… 31

　§1.3　上鞅的 Doob－Meyer 分解 ……………………… 37

　§1.4　过程与测度的投影 ……………………………… 50

　习题与问题一 ………………………………………… 68

第二章　随机积分 ……………………………………… 70

　§2.1　引　言 …………………………………………… 70

　§2.2　Doleans 测度 …………………………………… 75

　§2.3　可料过程对 L^2 鞅的随机积分 ………………… 76

　§2.4　可料过程对局部 L^2 鞅的随机积分 …………… 85

　§2.5　对适应过程的随机积分 ………………………… 90

　§2.6　平方可积鞅与投影算子 ………………………… 93

　§2.7　连续局部鞅的平方变差过程 …………………… 101

　习题与问题二 ………………………………………… 109

第三章　Ito 公式与 Girsanov 定理 ………………… 112

　§3.1　连续半鞅的 Ito 公式 …………………………… 112

　§3.2　指数鞅与 Girsanov 定理 ……………………… 122

§3.3 股票市场与等价鞅测度 …… 131
§3.4 Brownian 运动的弱可料表示 …… 142
§3.5 局部时与 Tanaka 公式 …… 146
习题与问题三 …… 157

第四章 随机微分方程 …… 159
§4.1 随机微分方程的强解 …… 159
§4.2 L 扩散过程与解的马氏性 …… 174
§4.3 弱解与鞅问题 …… 181
§4.4 Feynman - Kac 公式 …… 186
§4.5 一类热传导方程柯西问题的解析解 …… 193
习题与问题四 …… 201

第五章 平方可积鞅与 Wiener 泛函的结构 …… 205
§5.1 平方可积鞅的 Doob - Meyer 分解 …… 205
§5.2 平方可积鞅表示定理 …… 215
§5.3 条件期望鞅的表示与随机 Fubini 定理 …… 231
§5.4 扩散过程泛函的结构 …… 235
§5.5 欧式期权的定价——Black - Scholes 公式 …… 243
习题与问题五 …… 251

第六章 Ito 过程与扩散过程测度的绝对连续性 …… 253
§6.1 Ito 过程与 Wiener 测度的绝对连续性 …… 254
§6.2 扩散过程测度关于 Wiener 测度的绝对连续性 …… 260
§6.3 所诱导的测度关于 Wiener 测度
绝对连续的过程 …… 269
§6.4 Ito 过程的泛函结构 …… 272
§6.5 Gauss 过程的情形 …… 276
§6.6 Ito 过程的测度关于扩散过程测度的
绝对连续性 …… 279

第七章 滤波、内插与外推 …… 289
§7.1 线性滤波 …… 291

§7.2 非线性滤波的一般方程 …… 304
§7.3 扩散 Markov 过程的滤波 …… 314
§7.4 最佳非线性内插方程 …… 317
§7.5 最佳非线性外推方程 …… 320
§7.6 条件 Gauss 情形下的滤波 …… 322
§7.7 可列状态马氏过程的滤波 …… 326
§7.8 扩散型过程偏差系数的估计 …… 334

参考文献 …… 342

索引 …… 343

符　号

$\triangleq$　定义为

$\square$　证明结束

$\mathrm{sgn}(x)$　x 的符号函数

a.e.　关于 Lebesgue 测度的几乎处处

a.s.　关于概率测度的几乎处处

$\mathrm{d}P\times\mathrm{d}\lambda$–a.s.　关于概率与 Lebesgue 测度乘积的几乎处处

N_0　自然数集 $N\cup\{0\}$

$\overline{N}_0=N_0\cup\{\infty\}$

Q,Q_+　有理数，非负有理数集合

R,R_+　实数，非负实数集合

$\overline{R}_+=R_+\cup\{\infty\}$

R^d　d 维实数空间

C^n　n 维复数域

(C_T,B_T)　$[0,T]$ 上连续函数全体按一致拓扑生成的可测空间

A^*　矩阵或向量的转置

$X\in b\mathcal{F}$　$\mathcal{F}$ 可测且有界

$\mathcal{J}(\mathcal{J}_f)$　所论停时 (只取有限多个值) 的全体

$\mathcal{J}_b$　有界停时全体

$\mathcal{F}_\tau$　τ 前事件的 σ 代数 (§1.2)

$\mathcal{F}_{\tau-}$ 严格 τ 前事件的 σ 代数 (1.47)

τ_F 停时 τ 在 F 上的限制

$[\tau],[\tau,\sigma],(\tau,\sigma]$ 停时图，随机区间

$\mathcal{F}_t^\xi$ 由过程 ξ 产生的 σ 代数

$\mathcal{O}$ 可选 σ 代数

$\mathcal{P}$ 可料 σ 代数

$\mathfrak{D}$ 循序 σ 代数

$\mathcal{S}$ 可测的适应过程类

$\mathcal{E}$ 简单函数量

$\mathcal{R}$ 可料矩形全体 (1.30 定义)

$\sigma(c.),\sigma(r.c.),\sigma(l.c.),\sigma(l.c.r.l.)$ 分别表示由适应的连续，右连续，左连续，左连右极过程产生的 σ 代数

$\mathfrak{M}^2$ 平方可积鞅空间

$\mathfrak{M}^2_T$, $[0,T]$ 上平方可积鞅 (ch.5)

$\mathfrak{M}^c_{\mathrm{loc}}$ 连续局部鞅全体

$\mathfrak{M}^2_{\mathrm{loc}}$ 局部平方可积鞅空间

μ_{M^2} 由右连续 L^2 鞅生成的 Doleans 测度 (§2.2)

$\mathcal{L}^2_M \triangleq L^2(R_+\times\Omega,\mathcal{P},\mu_{M^2})$

$\Lambda^2(\mathcal{W},M)=\left\{X\in\mathcal{W}:\forall t\in R_+,\int I_{[0,t]}X\,\mathrm{d}\mu_{M^2}<\infty\right\}$. 其中 $\mathcal{W}$ 表示某过程类

$X\in\mathcal{L}_{\mathrm{loc}}\Longleftrightarrow\forall t,\int_0^t|X_s|\mathrm{d}s<\infty$

$X\in\mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}\Longleftrightarrow\forall t,\int_0^t X_s^2\,\mathrm{d}s<\infty$

$X\in\mathcal{L}^{2,\mathrm{loc}}_M(\mathcal{W})\Longleftrightarrow X\in\mathcal{W}$, 存在 M 的局部化停时列 $\{\tau_k\}$,

使得 $I_{[0,\tau_k]}X \in \Lambda^2(\mathcal{W}, M^k)$

$Z_t(\phi) \triangleq \exp\left\{\int_0^t \phi(s)\mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}\phi^2(s)\,\mathrm{d}s\right\}$ 指数鞅

$C_0^\infty(R)$ R 上具紧支集无穷次可微函数全体

$D(R)$ $C_0^\infty(R)$ 赋以在紧集上各阶导数一致收敛拓扑的线性拓扑空间

$D^*(R)$ $D(R)$ 上连续线性泛函，即广义函数全体 (§3.5)

预备知识　条件期望与离散时间鞅

本章的内容是作为预备知识引入的，有些证明可参考文献 [3].

§0.1　条 件 期 望

条件期望是现代概率论的基础概念，也是鞅论的基础.

由初等概率论知道，如果 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为一个概率空间，$A, B \in \mathcal{F}$，称为是事件，如果 $P(B) > 0$，则称

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

为在事件 B 发生条件下的条件概率，条件概率 $P(\cdot|B)$ 仍然是可测空间 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的概率测度. 设 ξ 为可积的随机变量，我们自然称

$$E(\xi|B) = \int_{\Omega} \xi \; \mathrm{d}P(\omega|B)$$

为 ξ 关于条件概率 $P(\cdot|B)$ 的条件期望. 容易证明

$$E(\xi|B) = \frac{1}{P(B)} \int_B \xi \, \mathrm{d}P \qquad (0-1)$$

事实上，当 $\xi = I_A(\omega)$ 时，由定义上式左边就是 $P(A|B)$，而右边恰是 $\dfrac{P(AB)}{P(B)}$，两者相等. 从而易知 $(0-1)$ 式对 ξ 为简单函数是

成立的，由此利用积分的单调收敛定理可知，它对非负可测函数成立，最后得到 $(0-1)$ 式对一般的可测函数成立.

记 $\mathcal{G}=\{B,B^c\}$, 是一个 σ 代数，我们定义

$$E(\xi|\mathcal{G})(\omega)=\begin{cases}E(\xi|B), & \omega\in B\\ E(\xi|B^c), & \omega\in B^c\end{cases}$$

这样 $E(\xi|\mathcal{G})$ 便是一个 $\mathcal{G}$ 可测随机变量，而且满足

$$\forall A\in\mathcal{G},\quad \int_\Omega E(\xi|\mathcal{G})\,\mathrm{d}P=\int_\Omega \xi\,\mathrm{d}P$$

我们称 $E(\xi|\mathcal{G})$ 为随机变量 ξ 关于 σ 代数 $\mathcal{G}$ 的条件期望.

当 σ 代数 $\mathcal{G}=\sigma(B_n,n\geqslant 1)$, 其中 $\{B_n:n\geqslant 1\}$ 是 Ω 的一个可测分割时，我们可知：

$$E(\xi|\mathcal{G})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{P(B_n)}\int_{B_n}\xi\,\mathrm{d}P\cdot I_{B_n}(\omega)$$

为随机变量 ξ 关于 σ 代数 $\mathcal{G}$ 的条件期望. 进一步的推广就是下面的定义.

0.1定义 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为概率空间，$\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的子 σ 代数 (也即 $\mathcal{G}$ 为 σ 代数，且 $\mathcal{G}\subseteq\mathcal{F}$),$\xi$ 为数学期望存在的随机变量，一个 $\mathcal{G}$ 可测随机变量 η 如果满足：

$$\forall A\in\mathcal{G},\quad \int_A \eta\,\mathrm{d}P=\int_A \xi\,\mathrm{d}P \qquad (0-2)$$

则称 η 为 ξ 关于 $\mathcal{G}$ 的条件期望, 当 $\xi=I_A(\omega)$, $A\in\mathcal{F}$, 则称 $E(\xi|\mathcal{G})$ 为 A 关于 $\mathcal{G}$ 的条件概率，并记为 $P(A|\mathcal{G})$.

Radon-Nikodym 定理保证了上述条件期望 η 的存在性. 事实上，对任意的 $A\in\mathcal{G}$,

$$\nu(A)=\int_A \xi\,\mathrm{d}P$$

是 $\mathcal{G}$ 上的符号测度, 且关于 P 绝对连续. 因此由 Radon-Nikodym 定理，存在 Radon-Nikodym 导数 $\eta=\dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}P}$. 于是 $\forall A\in\mathcal{G}$,

$$\int_\Omega \eta\,\mathrm{d}P=\nu(A)=\int_\Omega \xi\,\mathrm{d}P$$

由定义看出条件期望 $E(\xi|\mathcal{G})$ 实际上是随机变量 ξ 在 $\mathcal{G}$ 的每个可测子集上按概率测度的平均 (称之为平滑性). 特别当 $\mathcal{G}=\sigma(\eta),\eta$ 为随机变量，则记 $E(\xi|\mathcal{G})=E(\xi|\eta)$. 容易看出，条件期望是几乎处处确定的，因此有关条件期望的性质也是 a.s. 成立的.

条件期望具有下面的性质:

0.2定理

(1)$E(\alpha\xi+\beta\eta|\mathcal{G})=\alpha E(\xi|\mathcal{G})+\beta E(\eta|\mathcal{G})$ 式中 $\alpha,\beta\in R$, 且假定 $E(\alpha\xi+\beta\eta)$ 存在.

(2)$E[E(\xi|\mathcal{G})]=E(\xi)$

(3) 若 ξ 为 $\mathcal{G}$ 可测，则 $E(\xi|\mathcal{G})=\xi$.

(4) 若 ξ 与 σ 代数独立，则

$$E(\xi|\mathcal{G})=E(\xi)$$

(5) 若 $\mathcal{G}_1$ 是 σ 代数 $\mathcal{G}$ 的子 σ 代数，则

$$E(E(\xi|\mathcal{G})|\mathcal{G}_1)=E(\xi|\mathcal{G}_1) \qquad (0-3)$$

(6)(Jensen 不等式) 若 f 是 R 上的下凸函数，则

$$f(E(\xi|\mathcal{G})) \leqslant E(f(\xi)|\mathcal{G}) \tag{0-4}$$

0.3条件期望的极限定理

(1) 条件期望的单调收敛定理：若 $\xi_n \uparrow \xi$ a.s., 且 $E\xi$ 存在，则在 $\{E(\xi|\mathcal{G}) > -\infty\}$ 上，

$$E(\xi|\mathcal{G}) = \lim_{n\to\infty} E(\xi_n|\mathcal{G}) \tag{0-5}$$

类似地，若 $\xi_n \downarrow \xi$ a.s., 且 $E\xi$ 存在，则在 $\{E(\xi|\mathcal{G}) < \infty\}$ 上，

$$E(\xi|\mathcal{G}) = \lim_{n\to\infty} E(\xi_n|\mathcal{G}) \tag{0-6}$$

(2) 条件期望的 Fatou 引理：若 $\xi_n \leqslant \xi_1$ a.s., 且 $E\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\xi_n\right)$ 存在，则在 $\{E(\xi_1|\mathcal{G}) < \infty\}$ 上，

$$E\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\xi_n|\mathcal{G}\right) \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}E(\xi_n|\mathcal{G}) \tag{0-7}$$

类似地，若 $\xi_n \geqslant \xi_1$a.s., 且 $E(\lim_{n\to\infty}\xi_n)$ 存在，则在 $\{E(\xi_1|\mathcal{G}) > -\infty\}$ 上，

$$E(\lim_{n\to\infty}\xi_n|\mathcal{G}) \leqslant \lim_{n\to\infty} E(\xi_n|\mathcal{G}) \tag{0-8}$$

(3) 条件期望的控制收敛定理：若 $|\xi_n| \leqslant \xi_1$ a.s.,ξ_1 可积，且 $\xi_n \xrightarrow{\text{a.s.or}P} \xi$, 则在 $\{E(\xi_1|\mathcal{G}) < \infty\}$ 上，

$$\lim_{n\to\infty} E(|\xi_n - \xi||\mathcal{G}) = 0 \tag{0-9}$$

0.4定义 称随机变量族 $\mathcal{U}$ 为 **一致可积族** (简记为 u.i.) 是指，

$$\lim_{c\to\infty} \sup\nolimits_{\xi\in\mathcal{U}} \int_{|\xi|>c} |\xi|\mathrm{d}P = 0$$

显然，如果对某个 $r>1,\sup_{\xi\in\mathcal{U}} E|\xi|^r<\infty$, 则 $\mathcal{U}$ 为一致可积族.

可以证明，$\mathcal{U}$ 为一致可积族的充要条件是：

(1)$\sup_{\xi\in\mathcal{U}} E|\xi|<\infty$;

(2)$\forall\epsilon>0,\exists\delta>0$, 对一切满足 $P(A)<\delta$, 有

$$\sup_{\xi\in\mathcal{U}}\int_A|\xi|\mathrm{d}P<\epsilon$$

应用一致可积性，我们可将 Fatou 引理推广.

0.5推广的 Fatou 引理

(1) 若 $\{X_n^+\}$u.i. 且 $E\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}X_n\right)$ 存在，则

$$E\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}X_n\right)\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}EX_n \tag{0-10}$$

(2) 若 $\{X_n^-\}$u.i. 且 $E\left(\underline{\lim_{n\to\infty}}X_n\right)$ 存在，则

$$E\left(\underline{\lim_{n\to\infty}}X_n\right)\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}EX_n \tag{0-11}$$

证明 我们只证 (1). 如 $X_n\leqslant a<\infty$, 则由通常的 Fatou 引理知，(0 − 10) 式成立. 对于一般情形，取 $a>0$, 由于

$$EX_n-E(X_n\wedge a)=\int_{X_n>a}(X_n-a)\leqslant\int_{X_n^+>a}X_n^+\,\mathrm{d}P$$

由 $\{X_n^+\}$u.i., 对 $\epsilon>0$, 取 a 充分大，可使上式右端对 n 一致地小于 ϵ. 因而

$$\forall n\in N_0,E(X_n\wedge a)\geqslant EX_n-\epsilon$$

于是

$$E\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}X_n\right) \geqslant E\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}(X_n\wedge a)\right)$$

$$\geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}E(X_n\wedge a) \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}EX_n-\epsilon$$

由 ϵ 的任意性，定理得证. □

注意！有反例表明对条件期望没有相应的定理.

由此得到

0.6定理 设 $0\leqslant X_n\to X$, 且 $\forall n, EX_n<\infty$, 则 $EX_n\to EX \iff \{X_n\}$, u.i..

证明 充分性：对 X_n 及 $-X_n$ 应用推广的 Fatou 引理，得

$$EX\leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}EX_n\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}EX_n\leqslant EX$$

由 $\{X_n\}$, u.i.., 可得 $E|X|<\infty$, 所以 $EX=\lim\limits_{n\to\infty}EX_n$.

必要性：$\forall m\in N_0, \{B: P(X=b)\geqslant m^{-1}\}$ 为有限集，故 $B=\{b: P(X=b)>0\}$ 为至多可列集. $\forall a\notin B$, 有 $X_nI_{(X_n<a)}\to XI_{(X<a)}$. 显然 $\{X_nI_{(X_n<a)}\}$ 仍是一致可积，从而由充分性的证明，

$$\int_{(X_n<a)}X_n\mathrm{d}P\to\int_{(X<a)}X\mathrm{d}P$$

于是对 $a\notin B$, $\int_{(X_n\geqslant a)}X_n\,\mathrm{d}P\to\int_{(X\geqslant a)}X\mathrm{d}P$. 对任意的 $\epsilon>0$, 选 $a_0\notin B$ 且充分大，使得 $\int_{X\geqslant a_0}X<\epsilon/2$, 再令 N_0 充分大，使得 $\forall n\geqslant N_0$, 有

$$\int_{(X_n\geqslant a_0)}X_n\,\mathrm{d}P\leqslant\int_{(X\geqslant a_0)}X\,\mathrm{d}P+\epsilon/2$$