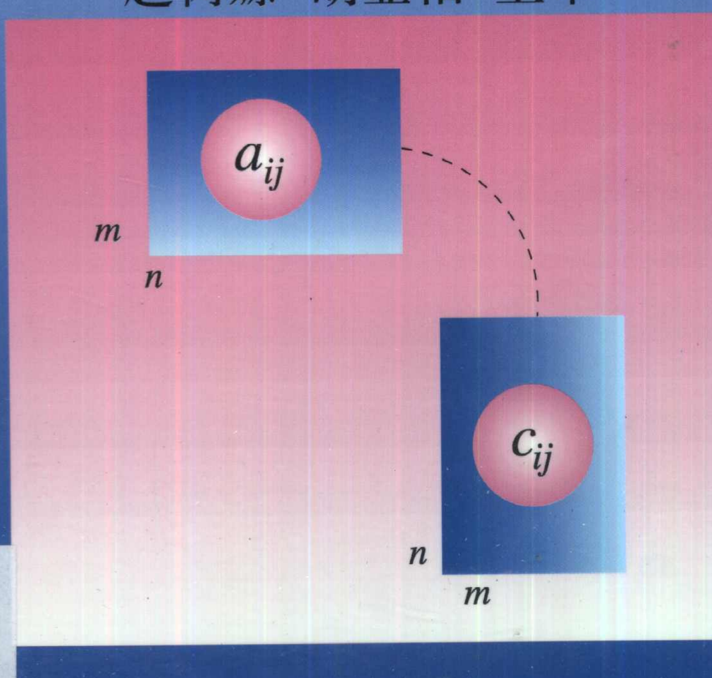
财经与管理等专业
教学与自学参考书

线性代数

学习与考试参考题集
（附解答）

褚永增 主编
赵树嫄 胡显佑 主审



中国人民大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习与考试参考题集(附解答)/褚永增主编
北京:中国人民大学出版社,2000
财经与管理等专业教学与自学参考书

ISBN 7-300-03552-3/O·43
Ⅰ.线…
Ⅱ.褚…
Ⅲ.线性代数-高等教育-自学考试-习题
Ⅳ.0151.2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 34619 号

财经与管理等专业教学与自学参考书
线性代数学习与考试参考题集
(附解答)
褚永增　主编
赵树嫄　胡显佑　主审

出版发行:中国人民大学出版社
(北京海淀路 157 号　邮编 100080)
发行部:62514146　门市部:62511369
总编室:62511242　出版部:62511239
E-mail:rendafx@public3.bta.net.cn
经　　销:新华书店
印　　刷:北京市丰台区印刷厂

开本:850×1168 毫米 1/32　印张:6.5
2000 年 9 月第 1 版　2002 年 5 月第 2 次印刷
字数:163 000

定价:9.00 元
(图书出现印装问题,本社负责调换)

前　言

由赵树嫄教授主编的《经济应用数学基础》，自1981年出版后，多年来发行量经久不衰，深受广大读者欢迎。该教材被广泛应用于本科教学及高等教育自学考试的教学与辅导，且近几年来需求量又有较大幅度的上升。中国人民大学出版社与该书作者不断收到各地读者的来信，要求出版与该教材配套的辅导书，以帮助读者充分理解基本概念和基本理论，学会和掌握各种计算方法和解题的技巧。应读者的要求，1997年仍由赵树嫄教授担任主编，组织几位具有丰富教学经验的资深教授执笔，编写了微积分、线性代数和概率论与数理统计的学习与考试指导书，出版后又受到了读者的一致好评。书中的重要概念与定理的梳理和总结，对学生学习中的难点与疑点的分析和讲解，有助于读者对重要概念、方法的理解与掌握，也有助于读者把握知识的内在联系，并将知识条理化。

实践表明，一些数学概念与方法的掌握以一定数量的练习为基础，因此，有必要出一本高质量的习题集，帮助读者在茫茫的题海中把握方向，有效地提高读者对知识点的掌握程度，并取得事半功倍的学习效果。应读者的要求，我们组织了部分有丰富教学经验与命题经验的教师编写了微积分、线性代数和概率论与数理统计的参考题集，作为教学与学习的配套用书。

在《线性代数学习与考试参考题集（附解答）》的编写过程中，我们从大量题目中精选出300题。赵树嫄、胡显佑两位教授的指

导与帮助，更加保证了本书的质量及题目的适宜性和精品性。

本书中的题型按现行考试的要求设计，按内容分为六章，各章中的题目按照知识点的顺序排列，其中第六章为综合题。习题中有一定数量的基本训练题,也有一些是有一定难度的提高题,在提高题的序号前我们均打上了“*”号。本书可供财经、管理等专业的在校生及参加高等教育自学考试的学员使用，习题难度及类型的选择适宜参加高等教育自学考试学员应试的要求与需要，对其中打“*”的题目，学员可以选做。本书还可以供报考经济类的硕士生准备入学考试时复习参考。

参加本书编写的有褚永增、周邦珞、肖淳、姜华。由褚永增任主编，赵树嫄、胡显佑主审。

限于水平，疏漏之处在所难免，不妥之处，敬请读者批评指正。

编　者

2000 年 6 月

目　录

第一章　行 列 式

一、行 列 式

(一) 单项选择题

1. 设 n 阶行列式 $|a_{ij}|$ 中等于零的元素个数大于 n^2-n，则此行列式 $|a_{ij}|=($　　$)$.

(A) -1　　(B) 0　　(C) 1　　(D) 1 或 -1

【解】 根据 n 阶行列式定义，$|a_{ij}|$ 的一般项为

$$(-1)^{N(j_1,j_2,\cdots,j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

又 $|a_{ij}|$ 中零元素个数大于 n^2-n，所以 $|a_{ij}|$ 中不等于零的元素个数小于 $n^2-(n^2-n)=n$ 个. 由此可知行列式 $|a_{ij}|$ 的任一项都等于零，所以

$$|a_{ij}|=0.$$

故本题应选(B).

2. n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(\quad).$$

(A)1　　(B) -1　　(C) $(-1)^{n-1}$　　(D) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

【解】 根据 n 阶行列式的定义，D_n 的一般项为

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

由此可知，仅当 $j_n=1,j_{n-1}=2,\cdots,j_2=n-1,j_1=n$ 时，该行列式的一般项不等于零. 所以

$$\begin{aligned}D_n&=(-1)^{N(n(n-1)\cdots 2\cdot 1)}1\times 1\times\cdots\times 1\\&=(-1)^{(n-1)+\cdots+1}\\&=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.\end{aligned}$$

故本题应选(D).

3. 若三阶行列式 $\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ 2b_1-a_1 & 2b_2-a_2 & 2b_3-a_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=6$，

则 $\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=($　　$)$.

(A) -3　　(B)3　　(C) -6　　(D)6

【解】

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ 2b_1-a_1 & 2b_2-a_2 & 2b_3-a_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}\\=&\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ 2b_1 & 2b_2 & 2b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ -a_1 & -a_2 & -a_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}\\=&2\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=6,\end{aligned}$$

所以$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \dfrac{6}{2} = 3.$

故本题应选(B).

4. 用 A_j 表示三阶行列式 $|a_{ij}|$ 的第 j 列($j = 1,2,3$),已知 $|a_{ij}| = -2$,那么 $|A_3 - 2A_1 \quad 3A_2 \quad A_1| = (\quad)$.

(A) -12 (B)12 (C) -6 (D)6

【解】 $|A_3 - 2A_1 \quad 3A_2 \quad A_1|$

$= -|A_1 \quad 3A_2 \quad A_3 - 2A_1|$

$= -3|A_1 \quad A_2 \quad A_3| = 6.$

故本题应选(D).

5. 已知多项式

$$f(x) = \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & a_{13}+x & a_{14}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & a_{23}+x & a_{24}+x \\ a_{31}+x & a_{32}+x & a_{33}+x & a_{34}+x \\ a_{41}+x & a_{42}+x & a_{43}+x & a_{44}+x \end{vmatrix},$$

则 $f(x)$ 的最高次数是(   ).

(A)1 (B)2 (C)3 (D)4

【解】 $f(x) = \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & a_{13}+x & a_{14}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & a_{23}+x & a_{24}+x \\ a_{31}+x & a_{32}+x & a_{33}+x & a_{34}+x \\ a_{41}+x & a_{42}+x & a_{43}+x & a_{44}+x \end{vmatrix}$

$\times(-1)$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}-a_{11} & a_{13}-a_{11} & a_{14}-a_{11} \\ a_{21}+x & a_{22}-a_{21} & a_{23}-a_{21} & a_{24}-a_{21} \\ a_{31}+x & a_{32}-a_{31} & a_{33}-a_{31} & a_{34}-a_{31} \\ a_{41}+x & a_{42}-a_{41} & a_{43}-a_{41} & a_{44}-a_{41} \end{vmatrix}.$$

按第一列展开，得出的是一次多项式.

故本题应选(A).

6. 四阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ 的值等于(　　).

(A)$a_1a_2a_3a_4 - b_1b_2b_3b_4$

(B)$a_1a_2a_3a_4 + b_1b_2b_3b_4$

(C)$(a_1a_2 - b_1b_2)(a_3a_4 - b_3b_4)$

(D)$(a_2a_3 - b_2b_3)(a_1a_4 - b_1b_4)$

【解】 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$(按第一行展开)

$$= a_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & b_3 & a_3 \\ b_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \text{(各按第三行展开)}$$

$$= a_1(-1)^{3+3}a_4 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} - b_1(-1)^{3+1}b_4 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} (a_1a_4 - b_1b_4)$$

$$= (a_2a_3 - b_2b_3)(a_1a_4 - b_1b_4).$$

故本题应选(D).

(二) 填空题

7. 在五阶行列式 $|a_{ij}|$ 中，项 $a_{13}a_{24}a_{32}a_{45}a_{51}$ 前的符号应取________号；项 $a_{32}a_{21}a_{45}a_{13}a_{54}$ 前的符号应取________号.

【解】 $a_{13}a_{24}a_{32}a_{45}a_{51}$ 的行标已按自然数顺序排列，列标排列的逆序数为

$$N(34251)=6.$$

故该项前应冠以正号.

$a_{32}a_{21}a_{45}a_{13}a_{54}$ 行标排列与列标排列的逆序数和为

$$N(32415)+N(21534)$$
$$=4+3=7.$$

故该项前应冠以负号.

8. 若 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=1$，则

$$D_1=\begin{vmatrix} 4a_{11} & 2a_{11}-3a_{12} & a_{13} \\ 4a_{21} & 2a_{21}-3a_{22} & a_{23} \\ 4a_{31} & 2a_{31}-3a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\underline{\qquad\qquad}.$$

【解】 $$D_1=\begin{vmatrix} 4a_{11} & 2a_{11}-3a_{12} & a_{13} \\ 4a_{21} & 2a_{21}-3a_{22} & a_{23} \\ 4a_{31} & 2a_{31}-3a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 4a_{11} & 2a_{11} & a_{13} \\ 4a_{21} & 2a_{21} & a_{23} \\ 4a_{31} & 2a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 4a_{11} & -3a_{12} & a_{13} \\ 4a_{21} & -3a_{22} & a_{23} \\ 4a_{31} & -3a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=0+4\times(-3)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=-12.$$

9. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ ________.

【解】

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\times 1 \quad \times 1 \quad \times 1$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \times (-1)$$

$$= 3\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3.$$

10. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 302 \\ -4 & 3 & 297 \\ 2 & 2 & 203 \end{vmatrix} =$ ________.

【解】 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 302 \\ -4 & 3 & 297 \\ 2 & 2 & 203 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 300 \\ -4 & 3 & 300 \\ 2 & 2 & 200 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -4 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$= 0 + 5 = 5.$

11. 五阶行列式 $\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} =$

________.

【解】 将给定的五阶行列式的第五行加到第四行上，再将新得到的第四行加到第三行上……直至新得到的第二行加到第一行上，那么

$$\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -a & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}（按第五行展开）$$

$$=(1-a)(-a)^4+(-1)^{5+4}\times(-1)\times$$

$$\begin{vmatrix} -a & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -a & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -a & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}（按第四行展开）$$

$$=a^4-a^5+(-a)^3+(-1)^{4+3}\times(-1)\times\begin{vmatrix} -a & 0 & 1 \\ -1 & -a & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=1-a+a^2-a^3+a^4-a^5.$$

12. 设 n 阶行列式 $|a_{ij}|$ 中每一行的诸元素之和为零，则 $|a_{ij}|=$ ________.

【解】 将 $|a_{ij}|$ 中自第 2 列到第 n 列均加到第一列上，则所得行列式的第 1 列为零列. 故此行列式必等于零.

13. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=$ ________.

【解】

$$
\begin{array}{c}
\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\
\begin{array}{cccc} \quad & \times 1 & \times 1 & \times 1 \end{array}
\end{array}
$$

$$
= \begin{array}{cc} \begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{array}{l} \times(-1) \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}
$$

$$
= \begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ 0 & 0 & x & -x \\ 0 & x & 0 & -x \\ 0 & 0 & 0 & -x \end{vmatrix}
$$

$$
= x \begin{vmatrix} 0 & x & -x \\ x & 0 & -x \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix}
$$

$$
= x \cdot x^3 = x^4.
$$

（三）计算题

14. 讨论排列 $n(n-1)(n-2)\cdots 321$ 的奇偶性.

【解】 $N[n(n-1)(n-2)\cdots 321] = \dfrac{n(n-1)}{2}$

所以，当 $n = 4k, 4k+1$ 时为偶排列.

当 $n = 4k+2, 4k+3$ 时为奇排列

$(k = 0, 1, 2, \cdots)$.

15. 求由数码 $1, 2, \cdots, n, n+1, \cdots, 2n$ 构成的一个排列 $2n, 1, 2n-1, 2, \cdots, n+1, n$ 的逆序数.

【解】 1 前面有 1 个大于 1 的数码，

2 前面有 2 个大于 2 的数码，

……

n 前面有 n 个大于 n 的数码，

$n+1$ 前面有 $n-1$ 个大于 $n+1$ 的数码，

$n+2$ 前面有 $n-2$ 个大于 $n+2$ 的数码，

……

$2n$ 前面有 $n-n=0$ 个大于 $2n$ 的数码.

因此

$$\begin{aligned}
&N(2n,1,2n-1,2,\cdots,n+1,n)\\
&=1+2+\cdots+n+(n-1)+(n-2)+\cdots+(n-n)\\
&=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}\\
&=n^2.
\end{aligned}$$

16. 写出四阶行列式 $|a_{ij}|$ 中所有带负号且包含因子 a_{23} 的项.

【解】 设这样的项为

$$a_{1i}\,a_{23}\,a_{3j}\,a_{4k}$$

其行标已按自然顺序排列，而其列标排列为 $i\ 3\ j\ k$，i,j,k 只能取 1,2,4 中的数.

若取 $i=1,j=2,k=4$，则

$N(1\ 3\ 2\ 4)=1$，1 3 2 4 为奇排列.

$a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 前应冠以负号.

若取 $i=2,j=4,k=1$，则

$N(2\ 3\ 4\ 1)=3$，2 3 4 1 为奇排列.

$a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$ 前应冠以负号.

若取 $i=4,j=1,k=2$，

$N(4\ 3\ 1\ 2)=5$，4 3 1 2 为奇排列.

$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 前应冠以负号.

除此三项外，其余含 a_{23} 的项尚有 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$，$a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$，$a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$ 前面均应冠以正号.

17. x,y 满足什么条件时，有

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 \\ x-y & x+y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

【解】
$$\begin{vmatrix} x & y & 0 \\ x-y & x+y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} x & y \\ x-y & x+y \end{vmatrix}$$

$$= x(x+y) - y(x-y)$$

$$= x^2 + y^2.$$

若要 $x^2 + y^2 = 0$ 必须 $x = 0$ 且 $y = 0$.

所以当 $x = 0$ 且 $y = 0$ 时，有

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 \\ x-y & x+y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

18. 计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 5 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix}$

【解】

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 5 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix} \quad \times(-1)$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-3 \end{vmatrix}$$

$(-1) \quad \cdots$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-3 \end{vmatrix}$$

$= 6(n-3)!$.