O22-43
W55(2)

高等财经院校试用教材
经济应用数学基础(五)

运筹学通论

（修订本）

魏权龄　胡显佑　严颖　编著

中国人民大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

运筹学通论/魏权龄,胡显佑,严颖编著.—2版(修订本).
北京:中国人民大学出版社,2001
高等财经院校试用教材
(经济应用数学基础;5)

ISBN 7-300-00039-8/O·11
Ⅰ.运…
Ⅱ.①魏… ②胡… ③严…
Ⅲ.运筹学-高等学校-教材
Ⅳ.O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 51538 号

高等财经院校试用教材
经济应用数学基础(五)

运筹学通论

(修订本)

魏权龄　胡显佑　严颖　编著

出版发行:中国人民大学出版社
(北京中关村大街 31 号　邮编 100080)
邮购部:62515351　门市部:62514148
总编室:62511242　出版部:62511239
E-mail:rendafx@public3.bta.net.cn
经　　销:新华书店
印　　刷:北京市丰台区印刷厂

开本:850×1168 毫米 1/32　印张:16.25
1987 年 5 月第 1 版
2001 年 3 月第 2 版　2001 年 9 月第 2 次印刷
字数:404 000

定价:15.00 元
(图书出现印装问题,本社负责调换)

再版前言

《经济应用数学基础》是受教育部委托编写的高等财经院校试用教材，全书共分为五册。《运筹学通论》是该系列教材的第五册。

本书作者都是于 1980 年前后开始在中国人民大学从事科研和教学工作的教师。在教学相长的过程中，我们切身感受到数学基础对于经济、管理和财经各专业学生的重要性。而运筹学各分支的内容也早已深入到有关学科领域和专业的教材之中。数学的概念、数学的运算，乃至数学的推理和证明，对于培养学生运用数学语言进行描述和创造都是必不可少的。计算机和计算机网络技术的飞速发展和普及，使学生迫切地需要学习更多的数学和用数学进行创造。

本版的修订是在《运筹学通论》(1987 年 5 月第 1 版)的基础上进行的。新版在讲述运筹学各主要分支时，增加了某些较为简单的证明。一方面有利于说清道理；另一方面通过运筹学的教学，训练学生用数学进行创造的能力。个别章节做了加强，例如，对策论和非线性规划。增加对策论的内容，是为了适应当今经济、管理和财经领域中较多地运用经济对策论研究现实问题的需要；加强非线性规划中的某些理论内容(特别是 Kuhn-Tucker 定理)，是因为在经济学等领域(例如：微观经济学，数理经济学，数量经济学等)的讨论中都是以它们作为基础进行的。同时，对运筹学中的新领域——数据包络分析(即 DEA)的内容，增加了新的一章。也删除了某些章节，例如“质量管理”一章。此外，增加了“线性规划”一章，是关于线性规划的一个简介(《线性规划》(胡富昌编)已作为《经济应用数学基础》中独立的一本书出版)。增加此章是因为本

书的以后各章中(例如,非线性规划、多目标规划、整数规划、对策论、数据包络分析等)需要线性规划的某些内容。

参加本书编写的有胡显佑(第1、4、5、8、9章),魏权龄(第2、3、6、7章)和严颖(第10、11、12、13章)。在使用本书的过程中,我们得到了有关院校老师们的帮助和支持,在此表示衷心的谢意。本书的第1版,中国科学院系统科学研究所田丰教授、应用数学研究所程侃教授和北京航空航天大学王日爽教授对有关章节提出了很多宝贵意见,再一次表示感谢。中国人民大学出版社的有关同志为本书的再版提出了宝贵的建议,付出了辛勤的劳动,对此深表感谢。

编著者

2000年6月

第 1 版前言

《经济应用数学基础》是受原教育部委托编写的高等财经院校试用教材，全书共分五册。

本书为第五册《运筹学通论》，书中介绍了运筹学各分支的主要内容(线性规划部分已独立为第四册)。本书不仅适宜作为高等院校财经专业的试用教材，也可作为其他院校的运筹学、系统工程、管理工程等有关专业的教材。书中有些章节(例如，第 3 章、第 8 章、第 10 章、第 12 章)，时间不够时可略去不讲。

参加本书编写的有胡显佑(第 1、2、3、4 章)、严颖(第 5、9、10、11、12 章)、魏权龄(第 6、7、8 章)。在编写过程中，中国科学院系统科学研究所田丰同志、应用数学研究所程侃同志和北京航空学院王日爽等同志对有关章节提出了很多宝贵意见，谨在此表示感谢。

编　者

1985 年 7 月

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目　录

第 1 章　线性规划简介

线性规划是运筹学中研究较早,理论和算法比较成熟的一个重要分支.它主要研究在线性等式(或不等式)的限制条件下,使得某一线性目标函数取得最小值(或最大值)的问题.早在 1939 年,前苏联的数学家康托洛维奇(Л.В.Канторович,1975 年诺贝尔经济奖获得者)就提出了生产组织和管理中的线性规划模型.40 年代末,美国的丹齐格(G.B.Dantzig)提出了求解一般线性规划的单纯形方法.库普曼(T.C.Koopmans)和查恩斯(A.Charnes)对于线性规划的理论和应用也做出了突出的贡献.目前可供计算大规模线性规划问题的计算机软件也较为成熟.因而线性规划的方法在生产计划、运输、军事等领域都得到了重要的应用.

本书的许多内容,如非线性规划、整数规划、博弈论、多目标规划和 DEA 分析等都需要应用线性规划的方法.本章所介绍的线性规划的基本理论和方法,主要目的正是为本书的其他各章做好必要的理论准备,至于线性规划理论和方法的更为系统、全面的论述,可参阅文献[4]和[5].

§1.1　基本概念

1. 线性规划问题的一般形式

为了说明线性规划问题的特点,我们首先研究一些例子.

例 1　(生产计划问题)某企业利用三种原料 B_1, B_2, B_3 生产

试读结束：需要全本请在线购买：　www.ertongbook.com

A_1, A_2 两种产品.三种原料的月供应量(吨),生产一吨产品 A_1, A_2 所需各种原料的数量以及单位产品的价格(万元/吨)如表1—1所示.那么该企业应如何安排生产计划,使总收益最大?

表1—1

产品 / 单位产品消耗 / 原料	A_1	A_2	原料月供应量(吨/月)
B_1	1	1	150
B_2	2	3	240
B_3	3	2	300
单位产品价格	2.4	1.8	

解　设生产产品 A_i 的数量为 x_i(吨/月), $i = 1, 2$.则因原料 B_1 的月供应量为150(吨),因此应有

$$x_1 + x_2 \leqslant 150$$

类似可得 $2x_1 + 3x_2 \leqslant 240$ 和 $3x_1 + 2x_3 \leqslant 300$,此时该企业的总收益为 $2.4x_1 + 1.8x_2$.由于产品数量不能取负值,因此应有 $x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$.这样,所研究的问题可写成

$$\max f = 2.4x_1 + 1.8x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 150 \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 240 \\ 3x_1 + 2x_2 \leqslant 300 \\ x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

例2　某种物资要由 m 个产地 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 运往 n 个销地 $B_1, B_2, \cdots, B_n$.若产地 A_i 的产量为 a_i 吨, $i = 1, 2, \cdots, m$;销地 B_j 的需求量为 b_j 吨, $j = 1, 2, \cdots, n$,并且 $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$(总供给 = 总需求).各产地到各销地的物资单位运价如表1—2所示,那么应如何组织调运工作,使总运费最小?

表 1—2

运价 产地 \ 销地	$B_1 \quad B_2 \cdots B_n$	产量(吨)
A_1	$C_{11} \quad C_{12} \cdots C_m$	a_1
A_2	$C_{21} \quad C_{22} \cdots C_{2n}$	a_2
$\vdots$	$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$	$\vdots$
A_m	$C_{m1} \quad C_{m2} \cdots C_{mn}$	a_m
销量(吨)	$b_1 \quad b_2 \cdots b_n$	

解　设 x_{ij} 表示由产地 A_i 运往销地 B_j 的物资数量, $i=1, 2, \cdots, m$; $j=1, 2, \cdots, n$. 则由产地 A_i 运往各个销地的物资总量应等于其产量 a_i, 即

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

类似, 各产地运往销地 B_j 的物资数量应等于其需求量, 即

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

此时, 总运价为 $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$, 且 $x_{ij} \geqslant 0, \quad i=1, 2, \cdots, m$; $j=1, 2, \cdots, n$.

于是, 运输问题可写成

$$\min f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n \\ x_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m; \ j = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

这一问题是线性规划最早研究的问题之一, 并且已有了一些

特殊的求解方法.

例3 （营养配方问题）某饲料厂利用 n 种原料配制含有 m 种营养成分 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 的饲料，要求每单位饲料中含各种营养成分的数量不得少于 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 个国际单位. 已知原料 B_j 含有营养成分 A_i 的数量为 c_{ij}, $i = 1, 2, \cdots, m$; $j = 1, 2, \cdots, n$, 个国际单位，其单价为 b_j, $j = 1, 2, \cdots, n$. 问应如何配料，可使饲料满足营养要求，且成本最低？

解 设每单位饲料中选用原料 B_j 的数量为 x_j, $j = 1, 2, \cdots, n$, 单位. 由于每单位饲料中含 A_i 的数量不得少于 a_i，故应有

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j \geqslant a_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$$

此时，单位饲料的成本为 $\sum_{j=1}^{n} b_j x_j$. 于是营养配方问题可写成

$$\min f = \sum_{j=1}^{n} b_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j \geqslant a_i, & i = 1, 2, \cdots, m \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \\ x_j \geqslant 0, & j = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

由上面的例子可以看出，它们的经济背景虽有区别，但其数学模型却有共同的特点：要确定一组变量的值，使之满足一组线性等式或线性不等式，并使一个线性目标函数取得最小值（或最大值），这类问题都称为线性规划问题.

一般地，具有 n 个变量的线性规划问题的一般形式可以记为

$$\min f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad (\text{或} \max f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j * b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m & (1.1) \\ x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \cdots, n & (1.2) \end{cases}$$

其中“ * ”表示“$\geqslant$”或“$\leqslant$”或“=”中的某一个. 线性函数 $f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ 称为线性规划问题的目标函数. 条件(1.1),(1.2)称为线性规划问题的约束条件. 满足约束条件的一组 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的值称为线性规划的一个可行解. 如果存在一个可行解使目标函数取得最小值(或最大值),该可行解称为线性规划问题的最优解.

2. 两个变量线性规划问题的图解法

为了进一步研究线性规划问题解的性质,我们首先讨论两个变量的线性规划问题的图解法.

例 4 用图解法求下面线性规划问题的最优解.

$$\max f = 3x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ \qquad x_2 \leqslant 3 \\ x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解 我们把 x_1, x_2 看做平面直角坐标系中某个点的坐标,则满足任一约束不等式的所有的点(x_1, x_2)就位于一个半平面上. 如满足不等式 $x_1 + x_2 \leqslant 6$ 的所有的点都在以 $x_1 + x_2 = 6$ 为边界的左下平面上. 在此例中共有五个约束不等式,所以这五个半平面的公共部分(图 1—1)中的点就是线性规划问题的可行解. 这一公共部分(图 1—1 中的区域 $OABCD$)称为线性规划问题的可行解区域. 它是一个凸区域.

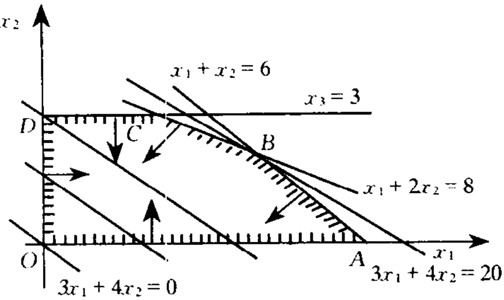

图 1—1

为了求出此线性规划问题的最优解，我们将 f 看做参数，则 $f=3x_1+4x_2$ 表示坐标平面上的一族平行直线. 直线 $3x_1+4x_2=f$ 上的任意一点的坐标对应的目标函数值均为 f. 我们称这样的直线为等值线(或等高线).

令 f 分别取值 0, 2, 4 等，就可以作出一族等值线，由此观察目标函数值变化时，等值线的变化规律. 由图 1—1 可以看出，当 f 取值越大时，对应的等值线离原点越远. 我们只要选取等值线中既与可行解区域有公共点，又尽可能与原点距离远的那一条就可以了. 由图 1—1 看出通过 B 点的等值线满足这一要求. 解方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2=6 \\ x_1+2x_2=8 \end{cases}$$

可得 B 点坐标 $x_1=4$, $x_2=2$. 对应的目标函数值为 $f_{\max}=3\times 4+4\times 2=20$. 因此线性规划问题的最优解为 $x_1=4$, $x_2=2$，最优值为 $f_{\max}=20$. 不难看出，该线性规划问题的最优解是惟一的.

例 5 用图解法解线性规划问题.

$$\max f=x_1+x_2$$

$$\begin{cases} x_1+x_2\leqslant 6 \\ x_1+2x_2\leqslant 8 \\ \qquad\quad x_2\leqslant 3 \\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

解　由于约束条件与例 4 完全相同，所以可行解区域仍为图 1—1 中的凸区域 $OABCD$.

因目标函数 $f = x_1 + x_2$ 所确定的任一等值线平行于直线 $x_1 + x_2 = 6$. 由图 1—1 可以看出，图中线段 BC 上的任意一点都是此线性规划问题的最优解. 例如，$x_1 = 4$，$x_2 = 2$(B 点)，或 $x_1 = 3$，$x_2 = 3$(C 点) 都是最优解，对应的目标函数的最优值为 $f_{\max} = 6$. 这一线性规划问题有无穷多解.

例 6　用图解法求解线性规划问题.

$$\min f = 2x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geqslant 1 \\ x_1 - 2x_2 \geqslant 0 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解　在直角坐标系中，确定各约束不等式所对应的半平面，其公共部分为图中(图 1—2) 的无界凸区域.

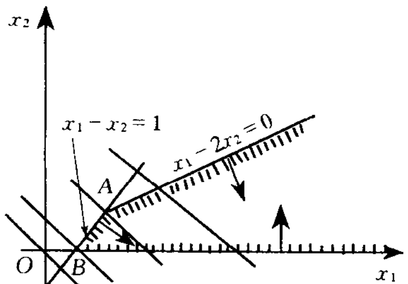

图 1—2

在目标函数 $f = 2x_1 + 2x_2$ 中，令参数 $f = 0, 2, \cdots$ 作出等值线. 由图 1—2 直接可看出在 B 点取得最优值. B 点坐标为 $x_1 = 1$，$x_2 = 0$，所以最优值为 $f_{\min} = 2$.

在例 6 中，如果是求目标函数 $f = 2x_1 + 2x_2$ 的最大值，则由图 1—2 看出，不论设参数取多大的正数 M，等值线 $2x_1 + 2x_2 =$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com