

022-43

W/15(2)

高等财经院校试用教材
经济应用数学基础(五)

运筹学通论

(修订本)

魏权龄 胡显佑 严颖 编著

中国人民大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

运筹学通论/魏权龄,胡显佑,严颖编著.—2版(修订本).

北京:中国人民大学出版社,2001

高等财经院校试用教材

(经济应用数学基础;5)

ISBN 7-300-00039-8/O·11

I. 运…

II. ①魏… ②胡… ③严…

III. 运筹学-高等学校-教材

IV. 022

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 51538 号

高等财经院校试用教材

经济应用数学基础(五)

运筹学通论

(修订本)

魏权龄 胡显佑 严颖 编著

出版发行:中国人民大学出版社

(北京中关村大街 31 号 邮编 100080)

邮购部:62515351 门市部:62514148

总编室:62511242 出版部:62511239

E-mail:rendafx@public3.bta.net.cn

经 销:新华书店

印 刷:北京市丰台区印刷厂

开本:850×1168毫米 1/32 印张:16.25

1987年5月第1版

2001年3月第2版 2001年9月第2次印刷

字数:404 000

定价:15.00元

(图书出现印装问题,本社负责调换)

再版前言

《经济应用数学基础》是受教育部委托编写的高等财经院校试用教材,全书共分为五册。《运筹学通论》是该系列教材的第五册。

本书作者都是于 1980 年前后开始在中国人民大学从事科研和教学工作的教师。在教学相长的过程中,我们切身感受到数学基础对于经济、管理和财经各专业学生的重要性。而运筹学各分支的内容也早已深入到有关学科领域和专业的教材之中。数学的概念、数学的运算,乃至数学的推理和证明,对于培养学生运用数学语言进行描述和创造都是必不可少的。计算机和计算机网络技术的飞速发展和普及,使学生迫切地需要学习更多的数学和用数学进行创造。

本版的修订是在《运筹学通论》(1987 年 5 月第 1 版)的基础上进行的。新版在讲述运筹学各主要分支时,增加了某些较为简单的证明。一方面有利于说清道理;另一方面通过运筹学的教学,训练学生用数学进行创造的能力。个别章节做了加强,例如,对策论和非线性规划。增加对策论的内容,是为了适应当今经济、管理和财经领域中较多地运用经济对策论研究现实问题的需要;加强非线性规划中的某些理论内容(特别是 Kuhn-Tucker 定理),是因为在经济学等领域(例如:微观经济学,数理经济学,数量经济学等)的讨论中都是以它们作为基础进行的。同时,对运筹学中的新领域——数据包络分析(即 DEA)的内容,增加了新的一章。也删除了某些章节,例如“质量管理”一章。此外,增加了“线性规划”一章,是关于线性规划的一个简介(《线性规划》(胡富昌编)已作为《经济应用数学基础》中独立的一本书出版)。增加此章是因为本

书的以后各章中(例如,非线性规划、多目标规划、整数规划、对策论、数据包络分析等)需要线性规划的某些内容。

参加本书编写的有胡显佑(第1、4、5、8、9章),魏权龄(第2、3、6、7章)和严颖(第10、11、12、13章)。在使用本书的过程中,我们得到了有关院校老师们的帮助和支持,在此表示衷心的感谢。本书的第1版,中国科学院系统科学研究所田丰教授、应用数学研究所程侃教授和北京航空航天大学王日爽教授对有关章节提出了很多宝贵意见,再一次表示感谢。中国人民大学出版社的有关同志为本书的再版提出了宝贵的建议,付出了辛勤的劳动,对此深表感谢。

编著者

2000年6月

第 1 版前言

《经济应用数学基础》是受原教育部委托编写的高等财经院校试用教材,全书共分五册。

本书为第五册《运筹学通论》,书中介绍了运筹学各分支的主要内容(线性规划部分已独立为第四册)。本书不仅适宜作为高等院校财经专业的试用教材,也可作为其他院校的运筹学、系统工程、管理工程等有关专业的教材。书中有些章节(例如,第 3 章、第 8 章、第 10 章、第 12 章),时间不够时可略去不讲。

参加本书编写的有胡显佑(第 1、2、3、4 章)、严颖(第 5、9、10、11、12 章)、魏权龄(第 6、7、8 章)。在编写过程中,中国科学院系统科学研究所田丰同志、应用数学研究所程侃同志和北京航空学院王日爽等同志对有关章节提出了很多宝贵意见,谨在此表示感谢。

编者

1985 年 7 月

目 录

第 1 章 线性规划简介	(1)
§ 1.1 基本概念	(1)
§ 1.2 线性规划问题解的性质	(8)
§ 1.3 单纯形表.....	(14)
§ 1.4 单纯形方法.....	(23)
§ 1.5 对偶线性规划.....	(37)
§ 1.6 对偶单纯形方法.....	(44)
§ 1.7 对偶线性规划的应用.....	(51)
习题一	(59)
参考文献	(65)
第 2 章 非线性规划	(66)
§ 2.1 例子.....	(67)
§ 2.2 预备知识.....	(69)
§ 2.3 凸集、凸函数与凸规划	(78)
§ 2.4 非线性规划的库恩-塔克定理	(88)
§ 2.5 单变量极值问题的解法.....	(98)
§ 2.6 无约束极值问题的解法	(106)
§ 2.7 罚函数方法	(113)
§ 2.8 线性约束条件下线性逼近的方法	(121)
习题二.....	(129)
参考文献.....	(132)

第 3 章 多目标数学规划	(134)
§ 3.1 多目标数学规划的特点	(134)
§ 3.2 解集	(139)
§ 3.3 像集	(146)
§ 3.4 线性加权和模型	(154)
§ 3.5 评价函数方法	(158)
§ 3.6 最简单的“交互式”方法	(167)
习题三.....	(171)
参考文献.....	(174)
第 4 章 整数规划	(176)
§ 4.1 整数规划的例子	(176)
§ 4.2 分枝定界法	(180)
§ 4.3 割平面法	(192)
习题四.....	(202)
参考文献.....	(204)
第 5 章 对策论	(206)
§ 5.1 对策论的基本概念	(206)
§ 5.2 矩阵对策及其解	(213)
§ 5.3 矩阵对策的线性规划解法	(223)
§ 5.4 二人有限非零和对策	(230)
§ 5.5 n 人非合作对策	(238)
§ 5.6 不完全信息对策	(245)
习题五.....	(249)
参考文献.....	(252)
第 6 章 数据包络分析(DEA)	(253)

§ 6.1	多指标评价的 DEA 模型 C^2R	(254)
§ 6.2	C^2R 模型之下的生产可能集 T_{C^2R}	(263)
§ 6.3	“技术有效”、“规模有效”与 C^2R 模型	(267)
§ 6.4	DEA 模型 BC^2 , FG 和 ST	(269)
§ 6.5	DEA 有效(C^2R), (FG), (ST)和(BC^2)之间 的关系	(276)
§ 6.6	DEA 有效性和多目标问题的有效解	(281)
§ 6.7	关于“产出最大的 DEA 模型类”的说明	(288)
	习题六	(290)
	参考文献	(293)
第 7 章	动态规划	(297)
§ 7.1	最短路问题与“最优化原则”	(297)
§ 7.2	多阶段配置问题	(304)
§ 7.3	“背包”问题	(308)
§ 7.4	资源分配问题	(316)
§ 7.5	随机型采购问题	(321)
	习题七	(326)
	参考文献	(329)
第 8 章	图与网络	(330)
§ 8.1	基本概念	(330)
§ 8.2	中国邮路问题与货郎担问题	(335)
§ 8.3	最短通路问题	(346)
§ 8.4	最大流问题	(353)
§ 8.5	最小树问题	(362)
	习题八	(365)
	参考文献	(369)

第 9 章 统筹方法	(371)
§ 9.1 统筹图	(371)
§ 9.2 统筹图上的有关参数计算	(379)
习题九.....	(383)
参考文献.....	(384)
第 10 章 决策分析	(385)
§ 10.1 决策的基本概念.....	(385)
§ 10.2 概率的确定.....	(387)
§ 10.3 效用函数.....	(389)
§ 10.4 信息的价值.....	(397)
§ 10.5 决策树.....	(403)
习题十.....	(411)
参考文献.....	(414)
第 11 章 排队论	(415)
§ 11.1 排队系统的描述及排队论研究的问题.....	(416)
§ 11.2 指数、爱尔朗及泊松分布	(421)
§ 11.3 泊松过程与生灭过程.....	(424)
§ 11.4 基本的排队模型.....	(432)
习题十一.....	(451)
参考文献.....	(454)
第 12 章 库存理论	(455)
§ 12.1 库存模型中的几个要素.....	(456)
§ 12.2 确定性库存模型.....	(457)
§ 12.3 随机性库存模型.....	(466)
习题十二.....	(473)

参考文献	(474)
第 13 章 模拟	(476)
§ 13.1 引论	(476)
§ 13.2 均匀随机数的生成	(484)
§ 13.3 一般随机数产生的基本方法	(487)
§ 13.4 几类重要的连续随机数的产生	(491)
§ 13.5 几类重要的离散随机数的产生	(494)
§ 13.6 随机向量的生成	(499)
习题十三	(503)
参考文献	(507)

第 1 章 线性规划简介

线性规划是运筹学中研究较早,理论和算法比较成熟的一个重要分支.它主要研究在线性等式(或不等式)的限制条件下,使得某一线性目标函数取得最小值(或最大值)的问题.早在 1939 年,前苏联的数学家康托洛维奇(Л. В. Канторович, 1975 年诺贝尔经济奖获得者)就提出了生产组织和管理中的线性规划模型. 40 年代末,美国的丹齐格(G. B. Dantzig)提出了求解一般线性规划的单纯形方法. 库普曼(T. C. Koopmans)和查恩斯(A. Charnes)对于线性规划的理论和应用也做出了突出的贡献.目前可供计算大规模线性规划问题的计算机软件也较为成熟.因而线性规划的方法在生产计划、运输、军事等领域都得到了重要的应用.

本书的许多内容,如非线性规划、整数规划、博弈论、多目标规划和 DEA 分析等都需要应用线性规划的方法.本章所介绍的线性规划的基本理论和方法,主要目的正是为本书的其他各章做好必要的理论准备,至于线性规划理论和方法的更为系统、全面的论述,可参阅文献[4]和[5].

§ 1.1 基本概念

1. 线性规划问题的一般形式

为了说明线性规划问题的特点,我们首先研究一些例子.

例 1 (生产计划问题) 某企业利用三种原料 B_1, B_2, B_3 生产

A_1, A_2 两种产品. 三种原料的月供应量(吨), 生产一吨产品 A_1, A_2 所需各种原料的数量以及单位产品的价格(万元/吨) 如表 1—1 所示. 那么该企业应如何安排生产计划, 使总收益最大?

表 1—1

原 料	产 品		原料月供应量 (吨/月)
	A_1	A_2	
B_1	1	1	150
B_2	2	3	240
B_3	3	2	300
单位产品价格	2.4	1.8	

解 设生产产品 A_i 的数量为 x_i (吨/月), $i = 1, 2$. 则因原料 B_1 的月供应量为 150(吨), 因此应有

$$x_1 + x_2 \leq 150$$

类似可得 $2x_1 + 3x_2 \leq 240$ 和 $3x_1 + 2x_2 \leq 300$, 此时该企业的总收益为 $2.4x_1 + 1.8x_2$. 由于产品数量不能取负值, 因此应有 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$. 这样, 所研究的问题可写成

$$\begin{aligned} \max f &= 2.4x_1 + 1.8x_2 \\ &\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 150 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 240 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 300 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

例 2 某种物资要由 m 个产地 A_1, A_2, \dots, A_m 运往 n 个销地 B_1, B_2, \dots, B_n . 若产地 A_i 的产量为 a_i 吨, $i = 1, 2, \dots, m$; 销地 B_j 的需求量为 b_j 吨, $j = 1, 2, \dots, n$, 并且 $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$ (总供给 = 总需求). 各产地到各销地的物资单位运价如表 1—2 所示, 那么应如何组织调运工作, 使总运费最小?

表 1-2

运 价		销 地		产量(吨)
		B_1	$B_2 \cdots B_n$	
产 地	A_1	C_{11}	$C_{12} \cdots C_{1n}$	a_1
	A_2	C_{21}	$C_{22} \cdots C_{2n}$	a_2
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
	A_m	C_{m1}	$C_{m2} \cdots C_{mn}$	a_m
销量(吨)		b_1	$b_2 \cdots b_n$	

解 设 x_{ij} 表示由产地 A_i 运往销地 B_j 的物资数量, $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$. 则由产地 A_i 运往各个销地的物资总量应等于其产量 a_i , 即

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

类似, 各产地运往销地 B_j 的物资数量应等于其需求量, 即

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

此时, 总运价为 $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$, 且 $x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$.

于是, 运输问题可写成

$$\min f = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, & i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, & j = 1, 2, \dots, n \\ x_{ij} \geq 0, & i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

这一问题是线性规划最早研究的问题之一, 并且已有了一些

特殊的求解方法.

例3 (营养配方问题) 某饲料厂利用 n 种原料配制含有 m 种营养成分 A_1, A_2, \dots, A_m 的饲料, 要求每单位饲料中含各种营养成分的数量不得少于 a_1, a_2, \dots, a_m 个国际单位. 已知原料 B_j 含有营养成分 A_i 的数量为 $c_{ij}, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$, 个国际单位, 其单价为 $b_j, j = 1, 2, \dots, n$. 问应如何配料, 可使饲料满足营养要求, 且成本最低?

解 设每单位饲料中选用原料 B_j 的数量为 $x_j, j = 1, 2, \dots, n$, 单位. 由于每单位饲料中含 A_i 的数量不得少于 a_i , 故应有

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n c_{ij}x_j &\geq a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{j=1}^n x_j &= 1 \end{aligned}$$

此时, 单位饲料的成本为 $\sum_{j=1}^n b_jx_j$. 于是营养配方问题可写成

$$\begin{aligned} \min f &= \sum_{j=1}^n b_jx_j \\ \begin{cases} \sum_{j=1}^n c_{ij}x_j \geq a_i, & i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{j=1}^n x_j = 1 \\ x_j \geq 0, & j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \end{aligned}$$

由上面的例子可以看出, 它们的经济背景虽有区别, 但其数学模型却有共同的特点: 要确定一组变量的值, 使之满足一组线性等式或线性不等式, 并使一个线性目标函数取得最小值(或最大值), 这类问题都称为线性规划问题.

一般地, 具有 n 个变量的线性规划问题的一般形式可以记为

$$\min f = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (\text{或 } \max f = \sum_{j=1}^n c_j x_j)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j * b_i, & i = 1, 2, \dots, m \\ x_j \geq 0, & j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (1.1)$$

$$(1.2)$$

其中“*”表示“ \geq ”或“ \leq ”或“ $=$ ”中的某一个. 线性函数

$f = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ 称为线性规划问题的目标函数. 条件(1.1), (1.2) 称为线性规划问题的约束条件. 满足约束条件的一组 x_1, x_2, \dots, x_n 的值称为线性规划的一个可行解. 如果存在一个可行解使目标函数取得最小值(或最大值), 该可行解称为线性规划问题的最优解.

2. 两个变量线性规划问题的图解法

为了进一步研究线性规划问题解的性质, 我们首先讨论两个变量的线性规划问题的图解法.

例 4 用图解法求下面线性规划问题的最优解.

$$\max f = 3x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

解 我们把 x_1, x_2 看做平面直角坐标系中某个点的坐标, 则满足任一约束不等式的所有的点 (x_1, x_2) 就位于一个半平面上. 如满足不等式 $x_1 + x_2 \leq 6$ 的所有的点都在以 $x_1 + x_2 = 6$ 为边界的左下平面上. 在此例中共有五个约束不等式, 所以这五个半平面的公共部分(图 1—1) 中的点就是线性规划问题的可行解. 这一公共部分(图 1—1 中的区域 $OABCD$) 称为线性规划问题的可行解区域. 它是一个凸区域.

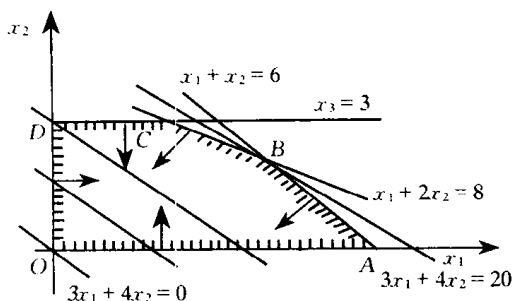


图 1-1

为了求出此线性规划问题的最优解,我们将 f 看做参数,则 $f = 3x_1 + 4x_2$ 表示坐标平面上的一族平行直线.直线 $3x_1 + 4x_2 = f$ 上的任意一点的坐标对应的目标函数值均为 f .我们称这样的直线为等值线(或等高线).

令 f 分别取值 $0, 2, 4$ 等,就可以作出一族等值线,由此观察目标函数值变化时,等值线的变化规律.由图 1-1 可以看出,当 f 取值越大时,对应的等值线离原点越远.我们只要选取等值线中既与可行解区域有公共点,又尽可能与原点距离远的那一条就可以了.由图 1-1 看出通过 B 点的等值线满足这一要求.解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}$$

可得 B 点坐标 $x_1 = 4, x_2 = 2$.对应的目标函数值为 $f_{\max} = 3 \times 4 + 4 \times 2 = 20$.因此线性规划问题的最优解为 $x_1 = 4, x_2 = 2$,最优值为 $f_{\max} = 20$.不难看出,该线性规划问题的最优解是惟一的.

例 5 用图解法解线性规划问题.

$$\begin{cases} \max f = x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

解 由于约束条件与例 4 完全相同,所以可行解区域仍为图 1—1 中的凸区域 $OABCD$.

因目标函数 $f = x_1 + x_2$ 所确定的任一等值线平行于直线 $x_1 + x_2 = 6$.由图 1—1 可以看出,图中线段 BC 上的任意一点都是此线性规划问题的最优解.例如, $x_1 = 4, x_2 = 2$ (B 点),或 $x_1 = 3, x_2 = 3$ (C 点) 都是最优解,对应的目标函数的最优值为 $f_{\max} = 6$.这一线性规划问题有无穷多解.

例 6 用图解法求解线性规划问题.

$$\begin{aligned} \min f &= 2x_1 + 2x_2 \\ \begin{cases} x_1 - x_2 \geq 1 \\ x_1 - 2x_2 \geq 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

解 在直角坐标系中,确定各约束不等式所对应的半平面,其公共部分为图中(图 1—2) 的无界凸区域.

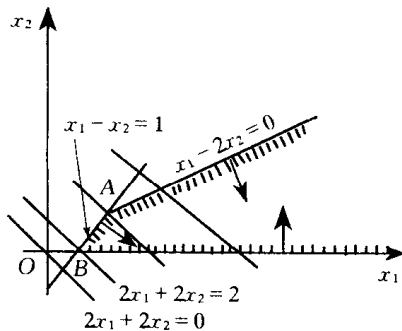


图 1—2

在目标函数 $f = 2x_1 + 2x_2$ 中,令参数 $f = 0, 2, \dots$ 作出等值线.由图 1—2 直接可看出在 B 点取得最优值. B 点坐标为 $x_1 = 1, x_2 = 0$,所以最优值为 $f_{\min} = 2$.

在例 6 中,如果是求目标函数 $f = 2x_1 + 2x_2$ 的最大值,则由图 1—2 看出,不论设参数取多大的正数 M ,等值线 $2x_1 + 2x_2 =$