中央人民政府高等教育部推薦

高等學校教材試用本

材料力學教程

第一卷 第二分册

М. М. ФИЛОНЕНКО-БОРОДИЧ主編
陶學文譯

商務印書館

中央人民政府高等教育部推薦
高等學校教材試用本的說明

充分學習蘇聯的先進經驗，根據國家建設需要，設置專業，培養幹部，是全國高等學校院系調整後的一項重大工作。在我國高等學校裏，按照所設置的專業試用蘇聯教材，而不再使用以英美資產階級教育內容爲基礎的教材，是進一步改革教學內容和提高教學質量的正確方向。

一九五二年九月二十四日人民日報社論已經指出：'蘇聯各種專業的教學計劃和教材，基本上對我們是適用的。它是眞正科學的和密切聯系實際的。至於與中國實際結合的問題，則可在今後教學實踐中逐漸求得解决。'我們現在就是本着這種認識來組織人力，依照需要的緩急，有計劃地大量翻譯蘇聯高等學校的各科教材，並將繼續向全國推薦，作爲現階段我國高等學校教材的試用本。

我們希望：使用這一試用本及今後由我們繼續推薦的每一種試用本的教師和同學們，特別是各有關教研組的同志們，在教學過程中，對譯本的內容和譯文廣泛地認眞地提出修正意見，作爲該書再版時的參考。我們並希望各有關教研組在此基礎上逐步加以改進，使能結合中國實際，最後能編出完全適合我國需要的新教材來。

中央人民政府高等教育部

目　　錄

第七章　梁的彈性線 ………………………………… 225

§68　彈性線的微分方程 ………………………………… 225
§69　彈性線微分方程的積分 ………………………………… 230
§70　求彈性線的複雜情形 ………………………………… 234
§71　克萊勃斯法 ………………………………… 242
§72　圖解分析法　假想荷重 ………………………………… 244
§73　圖解法 ………………………………… 259
§74　一端固定的梁和自由置於二支座上的梁在任意荷重下的位移 ………………………………… 265

第八章　彎曲的靜不定問題 ………………………………… 269

§75　一或二個固定端的單跨梁 ………………………………… 269
§76　雙跨梁 ………………………………… 277
§77　連續梁　三彎矩方程式 ………………………………… 282
§78　按承載能力作靜不定梁的計算 ………………………………… 291
§79　圖解分析法中的假想圖 ………………………………… 294

第九章　直桿的扭轉 ………………………………… 298

§80　圓斷面桿的扭轉　變形　剪應力　主應力 ………………………………… 298
§81　軸受扭轉的計算　扭矩圖 ………………………………… 306
§82　非圓形橫斷面桿的扭轉 ………………………………… 312
§83　小間距螺旋彈簧的計算 ………………………………… 316

第十章　直桿的組合強度 ………………………………… 320

§84　力在桿上作用的普遍情形　正應力公式 ………………………………… 320
§85　斜彎曲　零線　求撓度 ………………………………… 326
§86　梁受斜彎曲的計算　梁受不在一平面內各力的彎曲 ………………………………… 330
§87　拉伸或壓縮和彎曲同時作用 ………………………………… 336
§88　偏心拉伸(壓縮)　斷面核心 ………………………………… 339
§89　偏心拉伸(壓縮)計算例 ………………………………… 349
§90　彎曲和扭轉同時作用 ………………………………… 351
§91　曲柄軸 ………………………………… 358

第十一章　彈性平衡形式的穩定性・縱彎曲 ………………………………… 361

§92　穩定的和不穩定的平衡形式 ………………………………… 361

§ 93 歐拉問題 …… 364
§ 94 各種桿端固定情形 …… 373
§ 95 歐拉公式應用的限度 彈性極限以後的縱彎曲 …… 378
§ 96 縱彎曲的實際計算方法 …… 382
§ 97 縱橫彎曲 …… 386
第十二章 材料力學中的動力學問題 …… 391
§ 98 由於運動而發生的應力 慣性力 …… 391
§ 99 彈性桿受撞擊時的應力 …… 399
§ 100 受撞擊物體質量的影響 …… 406
§ 101 彈性桿內的變形傳播速度 …… 409
俄中名詞對照表 …… 414
中俄名詞對照表 …… 418

第七章　梁的彈性線

§68 彈性線的微分方程

(一)我們在研究關於受彎梁內應力的分佈和計算問題時，注意到變形，只是在為求應力所必需的範圍內。但彎曲時的變形問題本身極重要，卽：

(1)對所設計的結構各部份不僅要求強度，而且要求剛度，卽要求在荷重作用下的彈性變形盡可能地小❶。

(2)我們已知道，變形的研究是解決靜不定問題所必需的。而實際上常不得不遇到梁彎曲的靜不定情形。

本章中詳細討論梁受彎曲時的變形問題。

首先談一下如下的極重要的道理。根據為全部彎曲理論奠基的柏努利假定，梁的平面橫斷面在彎曲後仍為平面，且垂直於其撓曲軸。因此，如我們知道梁的撓曲軸的形狀，則求出所選斷面上任一點的位移是不難的了，特別是，如果略去如第 55 節所曾提到的，橫斷面本身的不大的變形的話。因此，以後全部注意力集中在梁的撓曲軸的研究。如彎曲現象是在材料的彈性範圍內進行的，則梁的所有點特別是它的軸的所有點的位移將是彈性的。柏努利從這觀點，把梁的撓曲軸叫做彈性線，此術語在現代應用極廣。

我們將和以前相同，使 OX 軸在沿梁軸方向(彎曲之前的方向)，軸 OY 在荷重作用方向(圖 226)。我們限制在對稱橫斷面梁的情形，且平面 xOy 為對稱斷面。於是我們容易得到結論，卽梁軸在荷重作用下在對稱平面內彎曲，而軸上各點無 Oz 軸方向的位移(圖 226)。如梁的變

---

❶ 計算強度及剛度的實際規則在設計規範裏有。若干實際有益的方法在庫特略采夫的著作“關於計算梁式樓蓋時的剛度計算問題”(建築工業 №10, 1930 和 № $^{2}/_{3}$, 1931)中有敍述。

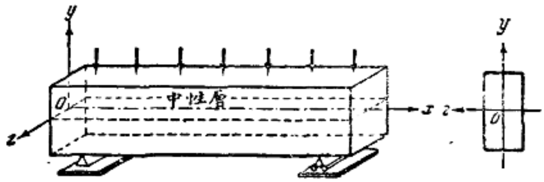

圖 226

形極小，如在結構和機器的構件中幾乎一直是那樣，則顯然可認爲梁軸上各點只在 Oy 軸方向有位移；實際上，梁軸在中性層上，其纖維長度是不變的。因此，軸上各點在 Ox 軸方向的位移只有考慮梁軸曲率始能求出。如此曲率不大，則其影響可略去不計。梁軸各點在 Oy 軸方向的位移將稱爲撓度，以字母 v 表示(圖 227)。最大撓度稱爲垂度，以字母 f 表示：$v_{\max}=f$。

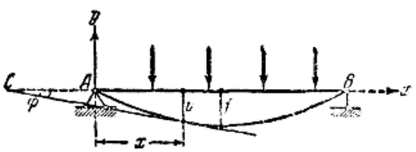

圖 227

彈性線方程一般形式可寫爲：

$$v=f(x)。\tag{7.1}$$

按其物理本質，彈性線應是一連續而光滑的曲線。連續性的概念是顯然的。光滑性的概念是：彈性線的任何地方不應有折損處，即其每一點應存在一完全確定的切線。在圖 228 *a* 上畫出了沒有連續性的情形，在圖 228 *b* 上畫出了彈性線連續，但不是光滑曲線的情形。

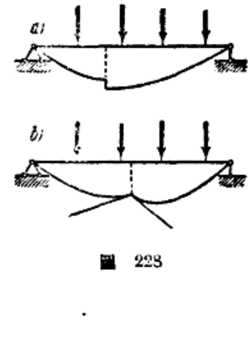

圖 228

顯然連續及光滑條件要求函數 $v=f(x)$ 及其微分 $v'=\dfrac{dv}{dx}=f'(x)$ 在梁軸全長各處爲連續的。

(二)在第 55 節中，我們建立了曲率，剛度和彎矩間的基本關係：

$$\frac{1}{\rho}=\pm\frac{M}{EJ}。\tag{7.2}$$

關係 (7.2) 是在研究純彎時得到的。但在 § 58 中我們指出，此關係也可用在橫向彎曲，因剪力 Q 的造成斷面彎曲的影響，常因其微小而可忽略。

較精確的研究證明❶，梁的跨長 l 和橫斷面高之比愈大，則剪力 Q 對梁變形的影響愈小。例如，在矩形斷面情形：當 $\frac{l}{h}<10$，剪力對撓度的影響通常不大於由彎矩所引起撓度的 3%。

利用關係式(7.2)，可以研究彈性線的形狀。如果在任一段梁上彎矩 $M=$ 常數和 $EJ=$ 常數，這就特別容易，那時候顯然曲率不變，因此該段彎成圓弧，其半徑為❷

$$\rho=\frac{EJ}{M}。$$

如彎矩 M 是變數而其橫標 x 的函數關係已知，則自等式 (7.2) 不難得到梁的彈性線微分方程。

預先討論一下等式 (7.2) 中符號的選擇。我們認為當曲率中心在

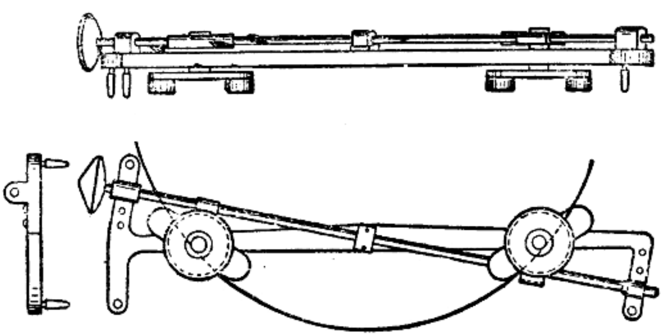

圖　229

❶　剪切對撓度的影響以後在教程第二冊中研究。

❷　里查利的原理據此，其構造在圖 229 很清楚。

Oy 軸的正方向時，曲率 $\frac{1}{\rho}$ 爲正；換句話說，軸線凹邊向着軸的正向 Oy 時，曲率爲正，相反情形爲負。於是等式(7.2)中符號的選擇將和所選座標軸方向及所用彎矩 M 的符號規則有關。但在§56中我們已將彎矩符號和曲線的彎向上或下相聯繫。考慮到這一點，我們得如下結論：

(1)如 Oy 軸向上，則曲率 $\frac{1}{\rho}$ 和彎矩 M 恆相同符號(圖 230 a 和 b)而關係式(7.2)中保留正號：

$$\frac{1}{\rho}=+\frac{M}{EJ};\qquad(7.2a)$$

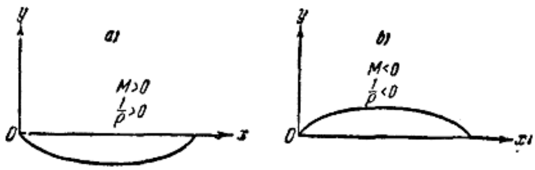

圖 230

(2)如 Oy 軸向下，則 $\frac{1}{\rho}$ 和 M 恆異符號(圖 231 a, b)而我們得：

$$\frac{1}{\rho}=-\frac{M}{EJ}。\qquad(7.2б)$$

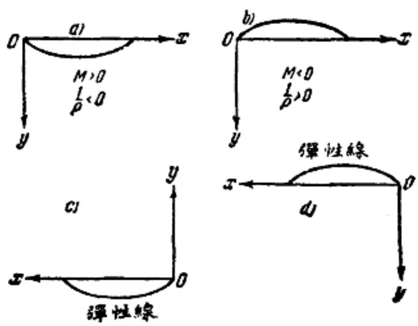

圖 231

作爲練習，建議讀者說明在圖 231c 和 d 所示情形，等式(7.2)必須用甚麼符號。

由關係式 (7.2)，我們立刻得到彈性線的微分方程，只需利用微積分中已知曲線 $y=f(x)$ 的曲率的式子，即

$$\frac{1}{\rho}=\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}。\tag{7.3a}$$

在此公式中 $\frac{1}{\rho}$ 和 y'' 的符號相同，而我們所定的曲率符號規則被滿足[1]。剩下的是如我們已約定的改符號 y 爲 v:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{v''}{(1+v'^2)^{\frac{3}{2}}}。\tag{7.3б}$$

梁的撓度多半是向下的，如約定 Oy 亦向下，使這些普通的撓度得正號，則顯然應用等式(7.2б)。在此代入曲率式(7.3б)得

$$\frac{v''}{(1+v'^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{M}{EJ}。\tag{7.4}$$

這是二級的非直線常微分方程；積分成橢圓函數或甚至更複雜的函數；因此，其在實際的應用是困難的。但很容易代之以極易積分之近似方程[2]。

在實際應用中常要求撓度和跨長比較爲極小，例如，不超過 $\frac{1}{500}$ 跨長。此時切線傾角 φ 將極小，而不到 $1°$。如容許梁彈性線切線的最大傾角 φ 甚至達到 $1°$，則

$$\operatorname{tg} 1°=0.017=\frac{dv}{dx}=v'。$$

在方程(7.4)左邊分母中有此值平方，在所舉例爲

$$0.017^2=0.000289。$$

[1] $y''>0$ 是凹邊向 Op 軸正向的情形，及反之。

[2] 準確方程(7,4)的積分方法，在彈性理論教程中討論，參見例如：略夫“數學彈性理論”，莫斯科，1935；鐵木生可“彈性理論教程”，彼得堡，1916。亦見本教程第二册第一章。

此值和方程(7.4)左邊分母中的1比較，很小，在實用目的上可棄去而有足夠精確度。於是方程(7.4)取形式：

$$v''=-\frac{M}{EJ}, \tag{7.5}$$

其中 M——已知的 x 函數，由 M 圖表示；得到了一個直線微分方程，其積分不難。雖方程(7.5)爲近似的，但其精確度就實用目的而言，已足夠。微分方程(7.4)只在極少情形作較精確研究之用。

§69 彈性線微分方程的積分

(一)以後將從近似微分方程(7.5)出發：

$$EJv''=-M。$$

在第51節中還曾導出二個微分方程

$$\frac{dM}{dX}=Q, \tag{7.6}$$

$$\frac{dQ}{dX}=-q(x), \tag{7.7}$$

其中 $q(x)$——連續荷重的強度。這樣，我們有了一組聯立微分方程(7.5)、(7.6)、(7.7)。此地給出的是荷重 $q(x)$，而未知的是函數 Q，M 和 v，可由依次積分來得。但在第51節中已證明、方程(7.6)和(7.7)的積分用作 M 和 Q 圖的方法完成。如 M 圖已作出，卽彎矩爲 x 的已知函數，則可立卽進至作方程(7.5)的積分。

由方程(7.5)找彈性線在那種情形最容易，卽當

$$M=f(x) \tag{7.8}$$

在梁全長有同一分析式時。

若干這種情形以前已作過分析，例如

在例24(圖140) $M=-Px$，

在例25(圖141) $M=-\frac{qx^2}{2}$，

在例 26 (圖 142) $M=-\frac{qx}{2}(l-x)$,

在例 27 (圖 143) $M=\frac{qx}{64}(l^2-x^2)$,

在例 32 §52 圖 154, 公式(5.26) $M=M_A\frac{l-x}{l}+M_B\frac{x}{l}$。

這些彎矩式在整個梁長爲有效。

(7.5) 中的 M 以其 x 的函數式 (7.8) 代替, 依次積分, 求得如下各式:

$$EJv'=\int(-M)dx+C_1, \tag{7.9}$$

$$EJv=\int\left[\int(-M)\,dx\right]dx+C_1x+C_2, \tag{7.10}$$

其中 C_1 和 C_2——任意積分常數。爲求常數必須有二個條件, 給出梁端的函數 v 的值或其一次微分 v' 的值。此種條件稱爲梁的邊界條件。

在第五章中我們只研究過梁彎曲的二種可能的靜定情形〔見 §46第(三)段末〕: 懸臂梁 (圖 232a) 和簡單梁 (圖 232b)。不管梁上給出荷重怎樣, 在每一情形考慮梁端固定方法, 不難得二個邊界條件。

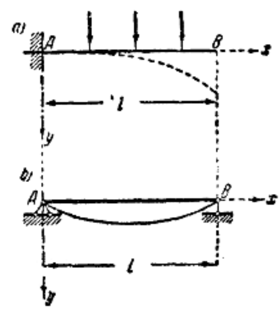

圖 232

(1) 對於懸臂梁 (圖 232a) 左端撓度等於零; 切線和 Ox 軸所成傾角亦等於零, 因此, 有如下邊界條件:

當 $x=0$ $v=0$, $v'=0$。

(2) 對於簡單梁 (圖 232b) 端點 A 和 B 的撓度爲零, 因此, 亦得二條件:

當 $x=0$ $v=0$,

當 $x=l$ $v=0$。

由邊界條件求出任意常數 C_1 及 C_2，並把其值代進方程(7.10)，得到彈性線最後方程，滿足該問題的所有條件。

由方程(7.9)可求出梁軸上任一點切線的角係數；或由於切線傾角 φ 很徵小，用 $v'=\operatorname{tg}\varphi\approx\varphi$ 可認爲方程(7.9)給出的就是角 φ 值：

$$EJ\varphi=\int(-M)\,dx+C_1\text{。}\tag{7.11}$$

(二)例

例 36 研究一梁，跨長 l，左端固定於牆內；而右端受一力 P (圖 233)。

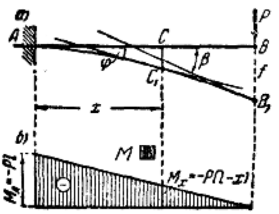

圖 233

圖 233 a 示梁的撓曲軸 AC_1B_1 的大概形狀；彎矩圖示如圖 233 b。離左端爲 x 的斷面的彎矩爲

$$M=-P(l-x)\text{。}$$

把彎矩式子代進彈性線微分方程，得：

$$EJv''=-[-P(l-x)]$$

或

$$EJv''=P(l-x)=Pl-Px\text{。}$$

積分，有：

$$EJv'=Plx-\frac{Px^2}{2}+C_1,\tag{7.12}$$

$$EJv=Pl\frac{x^2}{2}-\frac{Px^3}{6}+C_1x+C_2\text{。}\tag{7.13}$$

用邊界條件：

(1)當 $x=0$ $v'=0$，由方程(7.12)得 $C_1=0$

(2)當 $x=0$ $v=0$ 由方程(7.13)得 $C_2=0$

此後方程(7.12) 和 (7.13)取形式：

$$\varphi\approx\operatorname{tg}\varphi=v'=\frac{1}{EJ}\left(Plx-\frac{Px^2}{2}\right),\tag{7.14}$$

$$v=\frac{1}{EJ}\left(Pl\frac{x^2}{2}-P\frac{x^3}{6}\right)\text{。}\tag{7.15}$$

所得公式(7.14)和(7.15)宜以不名數橫標 $\xi=\frac{x}{l}$ 表示，在 $0<\xi<1$ 中變化：

$$\varphi\approx\operatorname{tg}\varphi=v'=\frac{1}{EJ}\left(Plx-\frac{Px^2}{2}\right)=\frac{Pl^2}{2EJ}\xi(2-\xi),\tag{7.14 a}$$

$$v'=\frac{1}{EJ}\left(Pl\frac{x^2}{2}-P\frac{x^2}{6}\right)=\frac{Pl^3}{6EJ}\xi^2(3-\xi)\text{。}\tag{7.15 a}$$

爲求端點傾角 β 及撓度 f，只需令橫標 x 的値爲 l (相對橫標 $\xi=1$)：

$$\beta=\frac{Pl^2}{2EJ},\tag{7.16}$$

$$f=\frac{Pl^3}{3EJ}。\tag{7.17}$$

爲實用目的，傾角和撓度公式宜以支座彎矩表示，在本例 $M_a=-Pl$。於是：

$$\beta=\frac{Pl^2}{2EJ}=-\frac{(-Pl)l}{2EJ}=-\frac{1}{2}\frac{M_al}{EJ},\tag{7.16a}$$

$$f=\frac{Pl^3}{3EJ}=-\frac{(-Pl)l^2}{3EJ}=-\frac{1}{3}\frac{M_al^2}{EJ}。\tag{7.17a}$$

注意，最好用比較所得公式的左部份和右部份的因次的方法，校核導出的式子。例如在公式 (7.16) 和 (7.17) 有

$$\beta=\frac{[力][長]^2}{\frac{[力]}{[長]^2}[長]^4}=(弧度),$$

$$f=\frac{[力][長]^3}{\frac{[力]}{[長]}[長]^4}=(長度)。$$

例 37 現在研究一梁，跨度 l，自由支於二支座上，全長受强度爲 q 的均佈荷重。圖 234 上畫了彈性線。

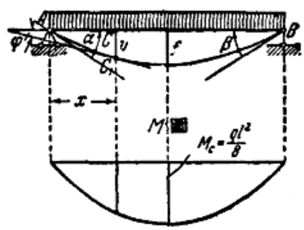

圖 234

梁的任一斷面的彎矩：

$$M=\frac{ql}{2}x-\frac{qx^2}{2}。$$

彈性線微分方程取形式：

$$EJv''=-\frac{ql}{2}x+\frac{qx^2}{2}。$$

積分，得

$$EJv'=-\frac{qlx^2}{4}+\frac{qx^3}{6}+C_1,\tag{7.18}$$

$$EJv=-\frac{qlx^3}{12}+\frac{qx^4}{24}+C_1x+C_2。\tag{7.19}$$

爲求任意積分常數 C_1 和 C_2 有如下的邊界條件：

(1)當 $x=0$, $v=0$,

(2)當 $x=l$, $v=0$。

由方程(7.19)令 $x=0$，求得 $C_2=0$。令 $x=l$，得

$$C_1=\frac{ql^3}{24}。$$

於是方程 (7.18) 和 (7.19) 取形式：

$$\varphi \approx \operatorname{tg} \varphi = v' = \frac{1}{EJ}\left[-\frac{qlx^2}{4}+\frac{qx^3}{6}+\frac{ql^3}{24}\right], \tag{7.20}$$

$$v = \frac{1}{EJ}\left[-\frac{qlx^3}{12}+\frac{qx^4}{24}+\frac{ql^3}{24}x\right] \tag{7.21}$$

或用無因次橫標 $\xi=\frac{x}{l}$:

$$\varphi = \operatorname{tg}\varphi = \frac{ql^3}{24EJ}(-6\xi^2+4\xi^3+1), \tag{7.20 a}$$

$$v = \frac{ql^4}{24EJ}\xi(1-2\xi^2+\xi^3)。 \tag{7.21 a}$$

最大傾角將在支座處,當 $\xi=0$ 和 $\xi=1$, 而最大撓度在跨中當 $\xi=\frac{1}{2}$,卽

(1)當　$\xi=0$, $\alpha=\frac{ql^3}{24EJ}$, (7.22)

(2)當　$\xi=1$, $\beta=\frac{-ql^3}{24EJ}$, (7.24)

(3)當　$\xi=\frac{1}{2}$, $f=v_{max}=\frac{5ql^4}{384EJ}$。 (7.23)

由於彈性線對梁中點對稱,我們假定最大撓度在梁中點卽當 $x=\frac{l}{2}$ 或當 $\xi=\frac{1}{2}$。不難校核此假定的正確性,根據在於:在最大點,函數的第一次導數應等於零,卽曲線的切線應平行於 Ox 軸。給出値 $\xi=\frac{1}{2}$ 代進公式(7.20 a),我們實際得到 $\varphi=0$。

§70 求彈性線的複雜情形

(一)§69 中所研究的方法,若函數 $M=f(x)$ 在梁的各段有不同的分析式時,就變複雜了。在第五章中我們已多次遇到類似情形。

例如在 §50 例 28 中,集中力分梁爲二段,每段的 M 式子不同。在同節的例 29, 我們有三個相似的段。在這些情形, 應用以前各例所用方法時, 我們必需立每一段的單獨的微分方程而分別積分。每一微分方程的積分將包含二個任意常數。如梁分成 n 段,則這樣做就有 $2n$ 個任意常數。要求出這些常數,除梁端二個邊界條件外,必需尙有$(2n-2)$個條件。我們考慮各段交界處彈性線的連續性及光滑性, 可立出這些條件。實際上,如 v_{m-1} 和 v'_{m-1}, 表示第$(m-1)$段終點的撓度縱標及其第一次微分, 而以 v_m 和 v'_m 表示第 m 段起點的同上的各量, 則隣段接界處條件爲

$$v_{m-1}=v_m;\quad v'_{m-1}=v'_m。\tag{7.25}$$

當梁分成 n 段時，我們得有 $(n-1)$ 個交界點，而依 (7.25) 立出 $(2n-2)$ 接界條件。和梁端的邊界條件一起成

$$2(n-1)+2=2n$$

個條件，以定出 $2n$ 個任意積分常數。解決過程以如下例子說明。

(二)例 38　研究一梁，跨長 l，加於(圖 235)離左支座 a 處 $\left(且\ a>\frac{l}{2}\right)$ 的受集中荷重 P。

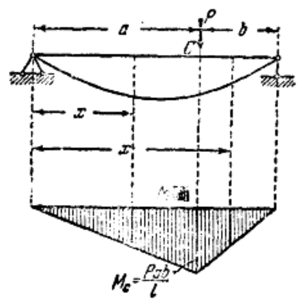

圖　235

在本情形應將梁分成二段：

$0\leqslant x\leqslant a,\quad a\leqslant x\leqslant l$。

第一段內離左支座 x 的斷面的彎矩：

$$M=\frac{Pb}{l}x。$$

因此，梁彈性線微分方程有形式：

$$EJv''=-\frac{Pb}{l}x。$$

積分，得：

$$EJv'=-\frac{Pbx^2}{2l}+C_1,\tag{7.26}$$

$$EJv=-\frac{Pbx^3}{6l}+C_1x+C_2。\tag{7.27}$$

第二段內彎矩

$$M=\frac{Pb}{l}x-P(x-a)。$$

彈性綫微分方程

$$EJv''=-\frac{Pb}{l}x+P(x-a)。$$

積分得：

$$EJv'=-\frac{Pbx^2}{2l}+\frac{P(x-a)^2}{6}+C_3, \tag{7.28}$$

$$EJv=-\frac{Pbx^3}{6l}+\frac{P(x-a)^3}{6}+C_3x+C_4。 \tag{7.29}$$

進而求四個任意積分常數 C_1, C_2, C_3 和 C_4。

二端條件 當 $x=0$, $v=0$。利用方程(7.27)，得 $C_2=0$。

當 $x=l$ $v=0$。由方程(7.29)得：

$$0=-\frac{Pbl^3}{6l}+\frac{P(l-a)^3}{6}+C_3l+C_4,$$

或用符號 $l-a=b$，將有

$$C_3l+C_4=\frac{Pb}{6}(l^2-b^2)。 \tag{7.30}$$

引進 C 點接界條件得：當 $x=a$，方程(7.26)和(7.28)給出的 v' 值應相等：

$$-\frac{Pba^2}{2l}+C_1=-\frac{Pba^2}{2l}+C_3,$$

由此得 $C_1=C_3$。

其次，當 $x=a$ 時，方程(7.27) 和 (7.29)給出的撓度 v 值應相等：

$$-\frac{Pba^3}{6l}+C_1a+C_2=-\frac{Pba^3}{6l}+C_3a+C_4,$$

由此

$$C_4=C_2=0。$$

據此，自(7.30)得：

$$C_1=C_3=\frac{Pb(l^2-b^2)}{6l}。$$

把所得 C_1, C_2, C_3 和 C_4 值代進(7.26)—(7.29)，得下列方程：

第一段：

$$\varphi\approx v'=\frac{1}{EJ}\left[-\frac{Pbx^2}{2l}+\frac{Pb(l^2-b^2)}{6l}\right]=\frac{Pb}{6EJl}[(l^2-b^2)-3x^2], \tag{7.31}$$

$$v=\frac{1}{EJ}\left[-\frac{Pbx^3}{6l}+\frac{Pb(l^2-b^2)}{6l}x\right]=\frac{Pbx}{6EJl}[(l^2-b^2)-x^2]; \quad (7.32)$$

第二段

$$\varphi\approx v'=\frac{1}{EJ}\left[-\frac{Pbx^2}{2l}+\frac{P(x-a)^2}{2}+\frac{Pb(l^2-b^2)}{6l}\right], \quad (7.33)$$

$$v=\frac{1}{EJ}\left[-\frac{Pbx^3}{6l}+\frac{P(x-a)^3}{6}+\frac{Pb(l^2-b^2)}{6l}x\right]。 \quad (7.34)$$

這樣，彈性線方程在第一段和第二段有不同的分析式(7.32)和(7.34)。方程(7.31)—(7.34)和以前一樣，可表之以無因次橫標：在加荷重點

$$m=\frac{a}{l};\quad n=\frac{b}{l},\quad 且\quad m+n=1;$$

在求撓度的點

$$\xi=\frac{x}{l};\quad \eta=\frac{l-x}{l},\quad 且\quad \xi+\eta=1。$$

於是第一段的方程(7.31)和(7.32)得：

$$v'=\frac{Pl^2}{6EJ}[-3n\xi^2+n(1-n^2)]=\frac{Pl^2}{6EJ}n[m(1+n)-3\xi^2], \quad (7.35)$$

$$v=\frac{Pl^2}{6EJ}[-n\xi^3+n(1-n^2)\xi]=\frac{Pl^3}{6EJ}n\xi[m(1+n)-\xi^2]; \quad (7.36)$$

這些方程當 $0\leqslant x\leqslant a$，卽當 $0\leqslant\xi\leqslant m$ 時正確。

第二段

$$v'=\frac{Pl^2}{6EJ}[3(\xi-m)^2-3n\xi^2+mn(1+n)], \quad (7.37)$$

$$v=\frac{Pl^3}{6EJ}[(\xi-m)^3-n\xi^3+mn(1+n)\xi]; \quad (7.38)$$

這些方程發生在當 $m\leqslant\xi\leqslant 1$ 時。

左支座傾角 α 自方程(7.31)令 $x=0$ 求得：

$$\alpha=\frac{Pb(l^2-b^2)}{6EJl}=\frac{Pb(l+b)(l-b)}{6EJl}=\frac{Pab(l+b)}{6EJl}, \quad (7.39)$$